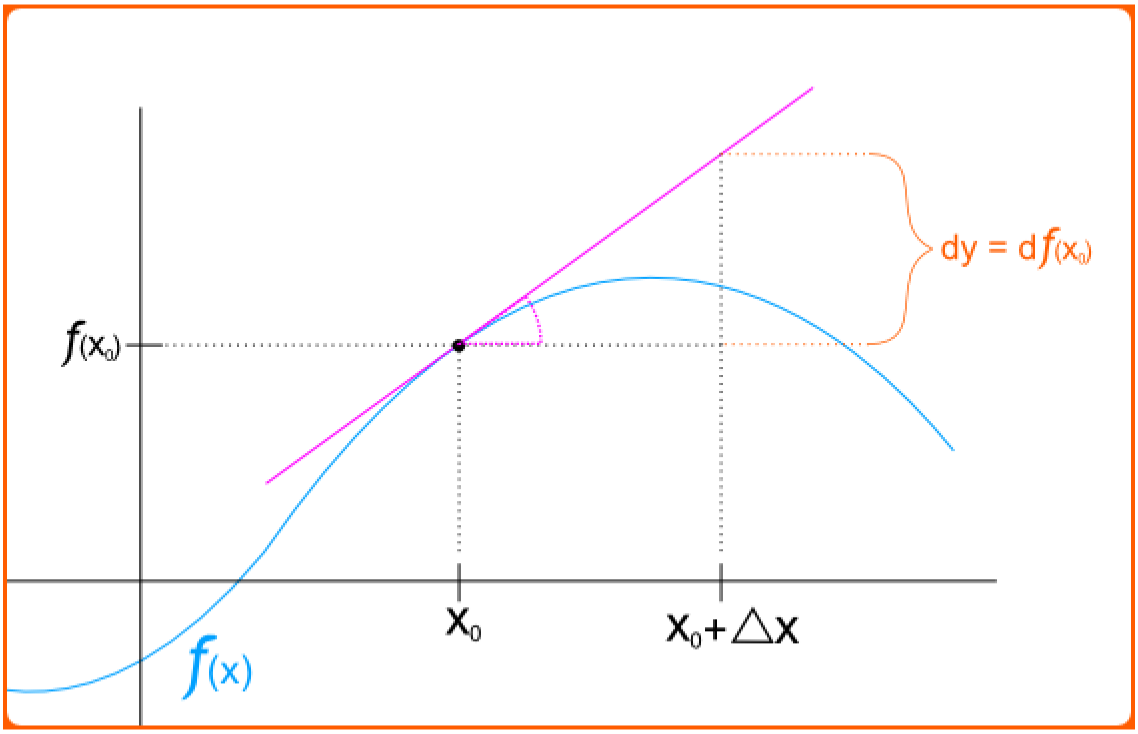
MATEMATIKA V EKONOMII- PŘEDNÁŠKA Č. 2

-**Diferenciálem funkce** $y = f(x)$ nazýváme funkci $df(x, dx) = f'(x)\,dx$.

-Diferenciál funkce **vyjadřuje přibližně přírůstek funkce** df při změně argumentu x o dx v bodě x. (Toto přibližné vyjádření je tím přesnější, čím menší je dx).



Příklad 2.6. Určete přírůstek funkce $y = x^3$ v bodě $x = 3$ pro přírůstek argumentu $dx = 0{,}2$ pomocí diferenciálu funkce.

Logaritmická derivace

-Používá se pro funkce ve **tvaru** $y = f(x)^{g(x)}$.
-U těchto funkcí nejpve jejich předpis **logaritmujeme**, a teprve potom derivujeme.

Příklad 2.7. Derivujte: a) $y = x^x$, b) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\sin x + 1}$

Derivace implicitní funkce

U některých funkcí se může stát, že y nejde vyjádřit jako funkci x. Například u funkce $f(x,y) = xy^2 + \log(x-y)$ není možné vyjádřit (osamostatnit vlevo) y. V takovém případě hovoříme o *implicitní funkci*.

***Věta 2.1**. Nechť $f(x,y)=0$ je implicitní funkce, která má v bodě C konečné parciální derivace* $\frac{\partial f(C)}{\partial x}$ a $\frac{\partial f(C)}{\partial y}$, a nechť $\frac{\partial f(C)}{\partial y} \neq 0$. *Derivace implicitní funkce v bodě C je pak definována takto:*

$$y'(C) = \frac{-\frac{\partial f(C)}{\partial x}}{\frac{\partial f(C)}{\partial y}} \tag{2.1}$$

Příklad 2.8. Derivujte: a) $f(x,y)=\sin y+2xy$, b) $f(x,y)=e^y+e^{2x}+2x^2y$.

1.1 TAYLOROVA A MACLAURINOVA ŘADA (POLYNOM)

-Složité funkce, které mají derivace všech řádů (resp. až do n-tého řádu) v okolí zvoleného bodu $x = a$, můžeme za splnění určitých podmínek (konvergence zbytku řady k nule) nahradit jejich **Taylorovou řadou** (**Taylorovým polynomem** n-tého stupně).

-Vyjádření funkce pomocí polynomu (mnohočlenu) je jednodušší a usnadňuje výpočty.

Tabulka 2.2. Mocninné rozvoje vybraných funkcí.

Funkce	Maclaurinův rozvoj	Obor konvergence
$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$	$(-\infty,\infty)$
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$	$(-\infty,\infty)$
e^x	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$	$(-\infty,\infty)$
$\ln(x+1)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$	$(-1,1\rangle$

Příklad. Exponenciální funkci $y=e^x$ můžeme nahradit na okolí budu $x = 0$ například takto: $e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}$, tedy kvadratickým polynomem stupně $n = 2$.

-Taylorova řada (rozvoj) funkce $f(x)$ v bodě a je definována takto:

$$T(f,a,x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ \dots\ +\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots$$

-Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ v bodě a je definován takto:

$$T_n(f,a,x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ \dots\ +\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

-Pokud zvolíme a = 0, dostaneme **Maclaurinovu řadu resp. polynom**:

$$T(f,0,x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ \dots\ +\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots$$

Příklad 2.9. Určete Maclaurinův rozvoj funkce *f*: a) $y=e^x$, b) $y=\ln(x+1)$.

Příklad. Určete Taylorův polynom stupně n = 4 funkce *f*: $y=e^x$ v bodě x = 3.

Příklady užití (první) derivace v ekonomii

- Mějme funkci $y = f(x)$. **Elasticitu** funkce definujeme takto:

$$E(x) = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}y'$$

-Elasticita funkce **udává** přibližnou procentní změnu y odpovídající jednotkové procentní změně x. Kladná změna znamená růst, záporná pokles.

Příklad. Určete elasticitu funkce $y = x^2 + 5x - 3$ v bodě $x = 3$.

-**Cenovou elasticitu poptávky**, kde $Q(P)$ je funkce poptávky, definujeme takto:

$$E(P) = -\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP} \qquad (2.6)$$

$E(P)$ udává, o kolik procent se změní poptávané množství, jestliže se cena změní o 1 %. Znaménko mínus ve vztahu (2.6) se zavádí proto, aby výsledná elasticita byla kladné číslo.

Příklad 2.11. Je dána funkce poptávky $Q(P) = 80 - 4P$. Určete elasticitu poptávky obecně a pak v bodě $P = 5$.

Podle hodnoty elasticity poptávky při dané ceně P rozlišujeme poptávku:

- elastickou, je-li $E(P) > 1$,
- jednotkově elastickou, je-li $E(P) = 1$,
- neelastickou, je-li $E(P) < 1$.

Příklad 2.12. Je dána nabídka $Q = 0{,}5P^2 + 120$. Určete elasticitu nabídky obecně a pro P = 40. Dále ověřte, že funkce $E(P)$ je rostoucí.

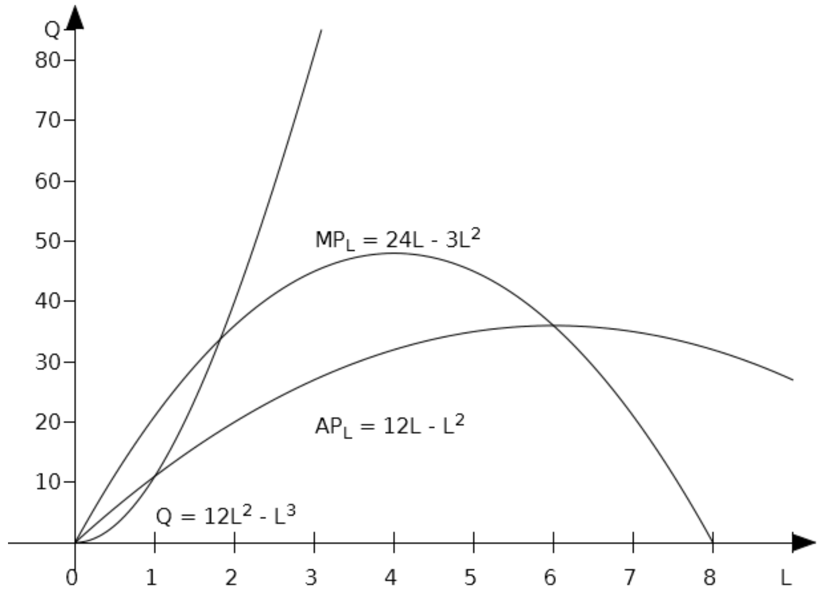
Mezní (marginální) veličiny

Mezní produkt práce (*marginal product of labour*) MP_L je derivace funkce produkce podle práce:

$$MP_L = \frac{dQ}{dL} = Q'(L) \qquad (2.8)$$

Mezní produkt práce udává, jak se (přibližně) změní produkce při dané práci L, pokud se práce zvětší o 1 jednotku (jednoho pracovníka) na L + 1.

Příklad 2.14. Je dána produkce $Q = 12L^2 - L^3$. Určete mezní produkt práce MP_L obecně a pro L = 2 resp. L = 8.



Obr. 2.2.

-**Mezní příjem *MR*** (marginal revenue) je definován jako derivace celkového příjmu:

$$MR = \frac{dTR(Q)}{dQ}$$

Mezní příjem vyjadřuje (přibližně), jak se změní celkový příjem, jestliže se množství Q změní o jednotku.

Příklad 2.18. Celkový příjem je $TR(Q) = -0,5Q^2 + 25Q$. Určete:

a) průměrný a mezní příjem obecně,

b) průměrný a mezní příjem pro $Q = 10$,

-**Mezní náklady *MC*** (marginal cost) jsou derivací celkových nákladů:

$$MC = \frac{dTC}{dQ}$$

Příklad 2.19. Jsou dány celkové náklady $TC(Q) = 50 + 2Q - 5Q^2 + Q^3$. Určete *MC*.

Maximalizace zisku, minimalizace nákladů

- **Zisk *PR*** (*profit*) se vypočte jako rozdíl celkového příjmu a celkových nákladů:

$$PR(Q) = TR(Q) - TC(Q)$$

-**Maximální zisk** lze určit z funkce $PR(Q)$ pomocí první (druhé) derivace, nebo pomocí *principu maximalizace zisku*:

V bodě maxima zisku je $MR = MC$.

V maximu tedy platí, že mezní příjem je roven mezním nákladům.

Příklad 2.22. Jsou dány celkové náklady $TC(Q) = Q^2 + 5Q + 4$ a celkové příjmy $TR(Q) = 45Q - Q^2$. Určete: a) maximum zisku, b) ověřte, že v bodě maxima je *MR* = *MC*.

Příklad 2.23. Určete maximální zisk firmy, jestliže celkové příjmy jsou popsány funkcí $TR = 200Q - 40$ a celkové náklady funkcí $TR = 100 + 0,2Q^2$.

Příklad 2.20. Jsou dány celkové náklady $TC(Q) = 54 - 6Q + Q^3$. Minimalizujte průměrné náklady.