

MATEMATIKA V EKONOMII – seminář č. 1 – Funkce jedné reálné proměnné

1.) Zopakujte si algebraické funkce (funkce tvořené mnohočleny, mocninami a odmocninami) a transcendentní funkce (exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické funkce). Měli byste znát předpisy funkcí, jejich grafy a vlastnosti.

2.) Načrtněte a určete vlastnosti funkcí a) $y = x^2 - 1$, b) $y = e^x + 2$, c) $y = \ln(x - 3)$

3.) Jsou dány funkce $f(x) = \frac{1}{x-1}$ a $g(x) = \sqrt{x}$. Určete složené funkce $g[f(x)]$ a $f[g(x)]$ a jejich definiční obory.

Výsledky: $f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$, $f(g(x)) = \sqrt{\frac{1}{x-1}}$, $D(f) =]-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, $D(g) = (0, \infty)$

4.) Určete definiční obor funkcí:

a) $f(x) = \ln \frac{x+3}{x-3}$, b) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{-x^2-5x-6}} + \arcsin(2x+5)$

Výsledky: a) $D(f) = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$, b) $D(f) = (-3, -2)$

5.) Najděte rovnovážnou cenu a množství, je-li funkce poptávky: $D(P) = 83 - 3P$ a funkce nabídky: $S(P) = 2P + 3$. Úlohu řešte početně i graficky.

Výsledky: $P_E = 16$, $Q_E = S(P) = D(P) = 35$

6. Najděte nulové body polynomu, upravte polynom na součin: $x^3 + 3x^2 - 10x$

Výsledky: nulové body: $-5, 0$ a 2 , $x^3 + 3x^2 - 10x = x(x+5)(x-2)$

7.) Derivujte:

a) $y = 5 + x + x^2 + x^3$

b) $y = 24x^5 - 3x^2 + 8x - 4$

c) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

d) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

e) $y = \frac{3}{x^4} - 2\sqrt[3]{x} + \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}$

f) $y = 2\ln x + 5\sin x - \cos x + e^x$

g) $y = 3^x + 2\log x + \sqrt[3]{x^2}$

h) $y = 4\operatorname{tg}x - \operatorname{cot}gx$

i) $y = 2\operatorname{arctg}x + 5\operatorname{arc} \sin x$

Výsledky: a) $y' = 1 + 2x + 3x^2$ b) $y' = 120x^4 - 6x + 8$, c) $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$

d) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$, e) $y' = -\frac{12}{x^5} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{\sqrt[4]{x^7}}$, f) $y' = \frac{2}{x} + 5\cos x + \sin x + e^x$

g) $y' = 3^x \cdot \ln 3 + \frac{2}{x \ln 10} + \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$, h) $y' = \frac{4}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$, i) $y' = \frac{2}{x^2 + 1} + \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}$

8.) Vypočítejte derivaci funkce a určete monotónnost v daném bodě:

a) $f(x) = x^2$, $f'(4) = ?$

b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $f'(3) = ?$

d) $f(x) = 3 \ln x + 1$, $f'(1) = ?$

Výsledky: $f'(4) = 8$, $f'(3) = 9$, $f'(1) = 3$.

9.) Derivujte součin funkcí:

a) $y = x \cdot e^x$ b) $y = (x^2 + 1) \cdot e^x$ c) $y = x^3 \cdot \ln x$ d) $y = (x^2 + 4) \cdot \sin x$ e) $y = x^2 \cdot \arctg x$

Výsledky: a) $y' = (x+1)e^x$, b) $y' = (x^2 + 2x + 1)e^x$, c) $y' = 3x^2 \ln x + x^2$, d) $y' = 2x \sin x + (x^2 + 4) \cos x$, e)

$$y' = 2x \arctg x + \frac{x^2}{1+x^2}$$

10.) Derivujte podíl funkcí:

a) $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$ b) $y = \frac{x}{\ln x}$ c) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ d) $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ e) $y = \frac{e^x + 3}{e^x}$

Výsledky: a) $y' = \frac{2x^2 - 1}{x^2}$, b) $y' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$, c) $y' = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$, d) $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$, e) $y' = \frac{-3}{e^x}$

11.) Derivujte složenou funkci:

a) $y = \ln \frac{x+3}{x^2}$ b) $y = \sqrt{x^3 - 6x + 1}$ c) $y = \sin^4(x^2 - 3)$

Výsledky: a) $y' = -\frac{x+6}{x^2 + 3x}$, b) $y' = \frac{3x^2 - 6}{2\sqrt{x^3 - 6x + 1}}$, c) $y' = 8x \sin^3(x^2 - 3) \cdot \cos(x^2 - 3)$