

## MATEMATIKA – seminář č. 10 – NEKONEČNÉ ŘADY

### NEKONEČNÁ ŘADA A JEJÍ SOUČET

Nechť  $a_n$  je posloupnost, pak symbol  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  se nazývá nekonečná řada.

Součet nekonečné řady  $s$  zjistíme jako limitu posloupnosti částečných součtů  $s_n : \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  (to znamená, že sečteme nejprve 2 členy, pak 3 členy, 4 členy, atd, a zjistíme, čemu se tyto součty blíží). Pokud je součet řady konečný, nazývá se řada KONVERGENTNÍ. Pokud je součet řady nekonečný, nebo řada nemá součet, pak se nazývá DIVERGENTNÍ.

### GEOMETRICKÁ ŘADA

Speciální případ řady, která vznikne součtem členů geometrické posloupnosti s kvocientem  $q$  (u geometrické posloupnosti je podíl sousedních členů  $a_n$  a  $a_{n+1}$  vždy konstantní a rovný  $q$ ).

Tato řada je konvergentní, pokud  $|q| < 1$ . Její součet je:  $s = \frac{a_1}{1-q}$ .

### NUTNÁ PODMÍNKA KONVERGENCE ŘAD, KRITÉRIA KONVERGENCE

Nutná podmínka konvergence:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Tato podmínka říká, že členy řady musí klesat k nule, ale tato podmínka sama o sobě ke konvergenci nestačí, viz harmonická řada.

KRITÉRIA (viz níže):

- i) srovnávací (důležitá je řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ )
- ii) podílové (používáme, když řada obsahuje faktoriál)
- iii) odmocninové (používáme, když řada obsahuje n-tou mocninu)
- iv) integrální (je univerzální)
- v) Leibnizovo (pro řady alternující)

1. Rozhodněte, zda-li je daná řada geometrická, pokud ano, určete její součet.

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$       c)  $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot 2^{2n-1}$
- d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$       e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^{n+1}$

**Výsledky:** a) řada je geometrická (G), konvergentní (K), součet:  $s = 1$    b) G, K,  $s = \frac{\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$ ,  
 c) G, divergentní (D) , d) dvě G řady, K,  $s = 3/2$  , e) G, D.

2. Dva speciální případy na zapamatování:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$\sum_1^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

**Výsledky:** První řada je harmonická a diverguje, druhá řada nemá součet, tudíž také diverguje.

3. Určete součet řad:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

**Výsledky:** a) 1/2 , b) 3/4 , c) 3/2

4.) Rozhodněte o konvergenci/divergenci řady:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n} & \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} & \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} & \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{8^n} \\ \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+6} & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{2n+1} & \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} (\arctg(n^2+1))^n & \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n} \\ \text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} & \text{j) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} & \text{k) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} & \text{l) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \end{array}$$

**Výsledky:** a) D (podle srovnávacího kritéria s řadou 1/n), b) D (podle srovnávacího kritéria s řadou 1/n), c) K (podílové) , d) K (odmocninové) , e) D (není splněna nutná podmínka konvergence), f) D (není splněna nutná podmínka konvergence), g) D (není splněna nutná podmínka konvergence), , h) K (odmocninové) , i) D (integrální) , j) D (integrální), k) K (srovnávací) , l) K (srovnávací).

5. Rozhodněte o konvergenci alternujících řad:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+200} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n}$$

**Výsledky:** a) K relativně (Leibnizovo), b) K absolutně (Leibnizovo a odmocninné).

### KRITÉRIA - TEORIE

**Srovnávací kritérium:** Mějme dvě nekonečné řady  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  , a necht' platí  $a_n \geq b_n$  pro všechna  $n$  větší než nějaký index  $k$  (tato podmínka říká, že od  $k$ -tého členu jsou všechny členy řady  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  větší než tytéž členy řady  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ). Necht' dále řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je konvergentní.

Potom také řada  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konverguje. Řadu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  nazýváme *majorantou* řady  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  .

Srovnávací kritérium říká, že pokud k dané řadě  $(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$  najdeme nějakou konvergentní řadu  $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$ , jejíž členy jsou větší než členy dané řady, pak daná řada  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konverguje (což je logické, neboť  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  obsahuje větší členy, a její součet je konečný, tudíž řada  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  s menšími členy musí mít rovněž konečný (a menší) součet).

Analogicky můžeme rozhodnout o divergenci dané řady, pokud její členy jsou větší než členy jiné divergentní řady.

Často používanou řadou pro srovnávací kritérium je **Dirichletova řada**:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ . Tato řada konverguje pro  $\alpha > 1$ . To znamená, že například  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,2}}$  je konvergentní ( $\alpha = 1,2 > 1$ ), zatímco řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  je divergentní ( $\alpha = 0,5$ ). Pro  $\alpha = 1$  dostaneme již známou harmonickou řadu, která je divergentní.

**Příklad.** Rozhodněte o konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$  pomocí srovnávacího kritéria.

Zadaná řada má členy  $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ , které jsou menší než členy  $\frac{1}{n^2}$  řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Tato řada je majorantou zadané řady, jedná se o Dirichletovu řadu, která je konvergentní ( $\alpha = 2$ ). Proto podle srovnávacího kritéria konverguje i zadaná řada.

**Příklad.** Rozhodněte o konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$  pomocí srovnávacího kritéria.

Zadaná řada má členy  $\frac{1}{n \cdot 3^n}$ , které jsou menší než členy  $\frac{1}{3^n}$  řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ . Řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$  je tedy majorantou zadané řady. Zároveň je to řada geometrická s kvocientem  $q = \frac{1}{3}$ , a tudíž je konvergentní. Proto konverguje i zadaná řada.

Nyná si uvedeme další kritéria konvergence řad pro řady s kladnými členy. Na závěr pak uvedeme jedno kritérium pro řady s alternujícími členy (řady, ve kterých se střídají kladné a záporné členy).

### Limitní podílové kritérium:

Nechť  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je nekonečná číselná řada s kladnými členy, a necht'  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ . Potom:

- Je-li  $L < 1 \Rightarrow$  řada konverguje.
- Je-li  $L > 1 \Rightarrow$  řada diverguje.
- Je-li  $L = 1 \Rightarrow$  nelze rozhodnout.

Toto kritérium používáme především tehdy, když daná řada obsahuje faktoriál.

**Příklad.** Rozhodněte o konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$  pomocí podílového kritéria.

Nejprve vypočteme limitu  $L$ :  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0$ . Podle limitního podílového

kritéria řada konverguje.

**Příklad.** Rozhodněte o konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^5}$  pomocí podílového kritéria.

Vypočteme limitu  $L$ :  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1}}{(n+1)^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 e^{n+1}}{(n+1)^5 e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{(n+1)^5} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1}}{e^n} = 1 \cdot e = e$ .

Protože  $L > 1$ , řada diverguje (mimočodem, řada nespĺňuje ani nutnou podmínku konvergence).

### Limitní odmocninové kritérium

Nechť  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je nekonečná číselná řada s kladnými členy, a necht'  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ . Potom:

- Je-li  $L < 1 \Rightarrow$  řada konverguje.
- Je-li  $L > 1 \Rightarrow$  řada diverguje.
- Je-li  $L = 1 \Rightarrow$  nelze rozhodnout.

Toto kritérium používáme především tehdy, když daná řada obsahuje  $n$  v exponentu.

**Příklad.** Rozhodněte o konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ .

Použijeme limitní odmocninové kritérium:  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{3}{5}$ .

Protože  $L = \frac{3}{5} < 1$ , řada konverguje.

Limitní podílové i odmocninové kritérium lze použít i pro řady se zápornými členy (v tom případě při výpočtu limity  $L$  počítáme s absolutními hodnotami členů řady).

### Integrální kritérium

Integrální kritérium je univerzální v tom smyslu, že pro ně není požadován nějaký speciální tvar řady. Pomocí tohoto kritéria navíc dokážeme rozhodnout o konvergenci i u řad, pro něž předešlá kritéria selhávají (například u harmonické řady).

Nechť  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je řada s kladnými členy,  $a_n = f(n)$ , a necht'  $f(x)$  je spojitá a nerostoucí funkce na intervalu  $(a, +\infty)$ . Potom daná řada konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ .

**Příklad.** Rozhodněte o konvergenci harmonické řady.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_1^{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty$$

Daný nevlastní integrál je nekonečný, proto řada diverguje.

Pro *alternující řady* ve tvaru  $\sum_1^{\infty} (-1)^n a_n$  se používá Leibnizovo kritérium. Alternující řady jsou řady, v nichž se střídají kladné a záporné členy. Střídání znamének členů řady způsobuje výraz  $(-1)^n$ .

**Leibnizovo kritérium:** Necht'  $\sum_1^{\infty} (-1)^n a_n$  je alternující řada a necht' platí:

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

ii)  $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Pak je řada  $\sum_1^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$  konvergentní.