EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Název projektu	Rozvoj vzdělávání na Slezské univerzitě v Opavě
Registrační číslo projektu	CZ.02.2.69/0.0./0.0/16_015/0002400

Expertní systémy

Fuzzy přístupy k neurčitosti

Jan Górecki

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Fuzzy množiny

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Fuzzy množina A v univerzu *U* :

$$A = (U, \mu_A)$$

$U \neq \emptyset$ … klasická množina

… funkce příslušnosti (charakteristická funkce)

$$\mu_A : U \rightarrow \langle 0; 1 \rangle$$

… stupeň příslušnosti prvku x k fuzzy množině A

Prázdná fuzzy množina $\emptyset$

$$\mu_{\emptyset}(x) = 0$$

Fuzzy čísla

Fuzzy číslo A je fuzzy množina na universu reálných čísel, která je určena čtveřicí bodů

$$(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)})$$

a po částech souvislou funkcí příslušnosti s následujícími vlastnostmi:

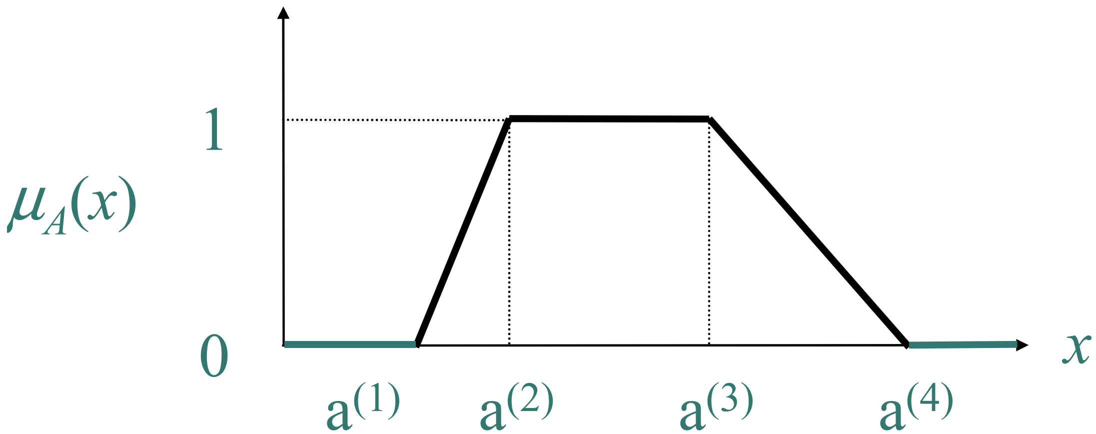
- $a^{(1)} \leq a^{(2)} \leq a^{(3)} \leq a^{(4)}$
- je rovna nule pro $x \leq a^{(1)}$ a $x \geq a^{(4)}$
- je rovna jedné pro $a^{(2)} \leq x \leq a^{(3)}$
- je rostoucí na $\langle a^{(1)},\ a^{(2)} \rangle$ a klesající na $\langle a^{(3)}, a^{(4)} \rangle$

Speciální případy fuzzy čísel

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Lichoběžníkové fuzzy číslo: $A = (a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)})$

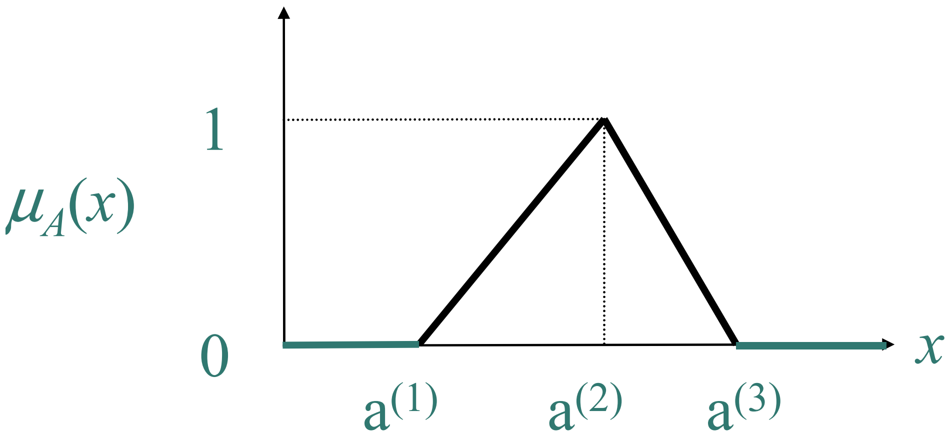
$$\mu_A(x) = \max\left(\min\left(\frac{x - a^{(1)}}{a^{(2)} - a^{(1)}}, \frac{x - a^{(4)}}{a^{(3)} - a^{(4)}}, 1 \right), 0 \right)$$



Speciální případy fuzzy čísel

Trojúhelníkové fuzzy číslo: $A = (\, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)} \,)$

$$\mu_A(x) = \max\left(\min\left(\frac{x - a^{(1)}}{a^{(2)} - a^{(1)}}, \frac{x - a^{(3)}}{a^{(2)} - a^{(3)}} \right), 0 \right)$$



Základní operace s fuzzy množinami

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Nechť $A = (U, \mu_A)$, $B = (U, \mu_B)$.

Doplněk fuzzy množiny *A*:

$$\overline{A} = (U, \mu_{\overline{A}}) \qquad \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Základní operace s fuzzy množinami

Nechť $A = (U, \mu_A)$, $B = (U, \mu_B)$.

Sjednocení fuzzy množin *A* a *B*:

$$A \cup B = (U, \mu_{A \cup B}) \qquad \mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Základní operace s fuzzy množinami

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Nechť $A = (U, \mu_A)$, $B = (U, \mu_B)$.

Průnik fuzzy množin A a B:

$$A \cap B = (U, \mu_{A \cap B}) \qquad \mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Základní operace s fuzzy množinami

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Nechť $A = (U, \mu_A)$, $B = (U, \mu_B)$.

Kartézský součin fuzzy množin *A* a *B*:

$$A \times B = (U \times V, \mu_{A \times B}) \quad \mu_{A \times B}(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$$

Fuzzy relace

$$R = (U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n, \mu_R)$$

$U_1, U_2, \ldots, U_n$ jsou klasické množiny

$$\mu_R : U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \to \langle 0, 1 \rangle$$

Kartézský součin fuzzy množin je zvláštním případem fuzzy relace

Cylindrické rozšíření

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Nechť $m < n$, $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq n$, $R = (U_{i_1} \times U_{i_2} \times \ldots \times U_{i_m}, \mu_R)$

Cylindrické rozšíření fuzzy relace R na

$$Cyl(R) = R^* \qquad \mu_{R^*}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu_R(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$$

Silná kompozice

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Nechť $R = (U \times V, \mu_R)$, $S = (V \times W, \mu_S)$

Silná kompozice relací *R* a *S*

$$R \circ S = (U \times W, \mu_{R \circ S})$$

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \sup_{y \in V} \min\{\mu_R(x, y), \mu_S(y, z)\}$$

Lingvistická proměnná

Lingvistická (slovní, jazyková) proměnná je taková proměnná, jejíž hodnotami jsou slova. Významy těchto slov jsou reprezentovány jako fuzzy množiny v nějakém univerzu.

Lingvistická proměnná

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Strukturovaná lingvistická proměnná:

$$\mathcal{X} = (X, T, U, G, M)$$

X … jméno proměnné,

T … množina termů (tj. slovních hodnot proměnné),

U … univerzum (neprázdná klasická množina),

G … množina syntaktických pravidel pro generování hodnot z T

M … množina sémantických pravidel interpretujících hodnoty z T jako fuzzy množiny s univerzem U.

Lingvistická proměnná

Nestrukturovaná lingvistická proměnná:

$$\mathcal{X} = (X, T, U)$$

T … konečná množina fuzzy množin s univerzem U.

Vícehodnotová logika

Množina logických (pravdivostních) hodnot

$$C = \langle 0, 1 \rangle$$

0 představuje pravdu a 1 nepravdu.

Logická proměnná je proměnná nabývající hodnot z množiny C.
Nechť W je konečná množina logických proměnných.

Vícehodnotová logika

Množina logických spojek

$$L = \{\vee, \wedge, \&, \Rightarrow\}$$

(*disjunkce*, *konjunkce*, *odvážná konjunkce*, *implikace*).

Vícehodnotová logika

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Formule je konečný řetězec, definovaný těmito pravidly:

Je-li $\alpha \in C$, pak α je formule.

Je-li $\beta \in W$, pak β je formule.

Jestliže φ a ψ jsou formule a $* \in L$, pak $(\varphi * \psi)$ je formule.

Vícehodnotová logika

Interpretace formule je dosazení logických konstant za logické proměnné.

Pravdivostní ohodnocení

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Nechť Q je množina všech formulí a $\Omega(Q)$ množina všech jejich interpretací. *Pravdivostním ohodnocením* nazveme zobrazení $V\colon \Omega(Q) \to C$, splňující následující požadavky:

$$V(\alpha) = \alpha$$

$$V(\varphi \vee \psi) = \max\left(V(\varphi), V(\psi)\right)$$

$$V(\varphi \wedge \psi) = \min\left(V(\varphi), V(\psi)\right)$$

$$V(\varphi \,\&\, \psi) = \max\left(0, V(\varphi) + V(\psi) - 1\right)$$

$$V(\varphi \Rightarrow \psi) = \min\left(1, 1 - V(\varphi) + V(\psi)\right)$$

Negace

Operace *negace* je definována takto:

$$\neg\varphi = \varphi \Rightarrow 0$$

Pro pravdivostní ohodnocení negace pak dostaneme:

$$V(\neg\varphi) = V(\varphi \Rightarrow 0) = \min\left(1, 1 - V(\varphi)\right) = 1 - V(\varphi)$$

Příklady implikací

Lukasiewiczova:

$$V(\varphi \Rightarrow \psi) = \min\left(1, 1 - V(\varphi) + V(\psi)\right)$$

Příklady implikací

Kleene-Dienesova:

$$V(\varphi \Rightarrow \psi) = \max\left(1 - V(\varphi), V(\psi)\right)$$

Příklady implikací

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Zadehova:

$$V(\varphi \Rightarrow \psi) = \max\left(1 - V(\varphi), \min\left(V(\varphi), V(\psi)\right)\right)$$

Příklady implikací

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Gödelova:

$$V(\varphi \Rightarrow \psi) = \begin{cases} 1 & \text{pro } V(\varphi) \leq V(\psi) \\ V(\psi) & \text{jinak} \end{cases}$$

Kompoziční pravidlo usuzování

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Uvažujme pravidlo

IF $X = A$ THEN $Y = B$

Nechť $A = (U, \mu_A)$, $B = (V, \mu_B)$. Pak toto pravidlo můžeme chápat jako fuzzy relaci

$$R = (U \times V, \mu_R)$$

Ve fuzzy systémech se charakteristická funkce této relace často definuje vztahem

$$\mu_R(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$$

a relace se nepřesně označuje názvem *Mamdaniho implikace*.

Kompoziční pravidlo usuzování

Pravidlo *fuzzy modus ponens*:

$$\frac{X = A', \quad \text{IF } X = A \text{ THEN } Y = B}{Y = B'}$$

Nechť $A' = (U, \mu_{A'})$. Pak fuzzy množina $B' = (V, \mu_{B'})$ může být určena takto:

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in U} \min\{\mu_{A'}(x), \mu_R(x, y)\}$$

Je-li univerzum U konečná množina, můžeme operátor *sup* nahradit operátorem *max*.

Báze fuzzy pravidel

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Předpokládejme , že znalostní báze je tvořena *m* pravidly tvaru

IF $X_1 = A_{i1}$ AND $X_2 = A_{i2}$ AND … AND $X_n = A_{in}$ THEN $Y = B$

kde $A_{ij} = (U_j, \mu_{A_{ij}})$, $B_i = (V, \mu_{B_i})$.

Těmto pravidlům odpovídají fuzzy relace

$$R_i = (U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \times V, \mu_{R_i})$$

Podmínku na levé straně *i*-tého pravidla můžeme vyjádřit ve tvaru

$X = A_i$, kde $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $A_i = A_{i1} \times A_{i2} \times \ldots \times A_{in}$

Báze fuzzy pravidel může být reprezentována relací

$$R = \bigcup_{i=1}^{m} R_i$$

Zodpovězení dotazu

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Nechť nyní je položen dotaz

$X_1 = A_{01}$ AND $X_2 = A_{02}$ AND … AND $X_n = A_{0n}$

Odpovědí systému je fuzzy množina $B_0 = (V, \mu_{B_0})$

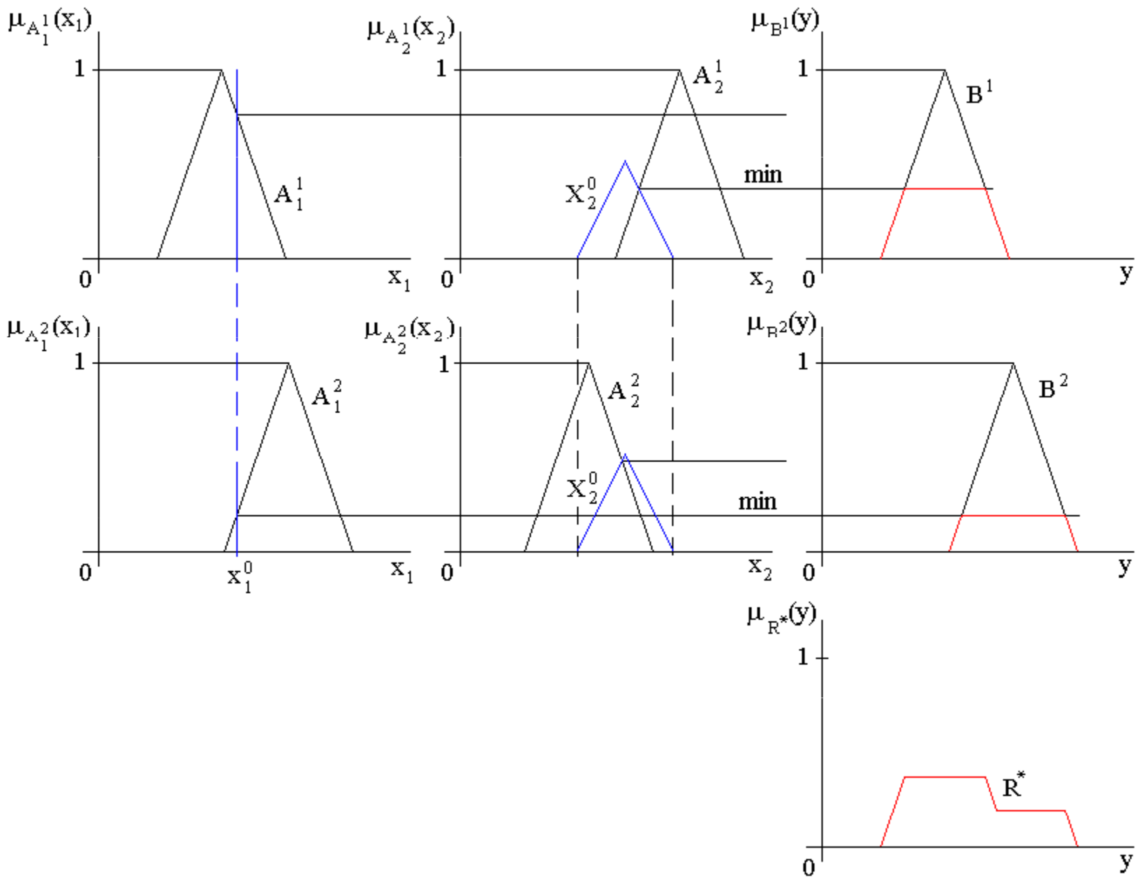
$$\mu_{B_0}(y) = \sup_{\mathbf{x}\in U} \min\left\{ \min_{j=1,\dots,n} \mu_{A_{0j}}(x_j), \max_{i=1,\dots,m} \mu_{R_i}(\mathbf{x}, y) \right\}$$

Při použití Mamdaniho interpretace relací R_i můžeme tento vztah převést do tvaru umožňujícího efektivnější výpočet:

$$\mu_{B_0}(y) = \max_{i=1,\dots,m} \min\left\{ \mu_{B_i}(y), \min_{j=1,\dots,n} \sup_{x_j\in U_j} \min\left\{ \mu_{A_{0j}}(x_j), \mu_{A_{ij}}(x_j) \right\} \right\}$$

Příklad tvorby odpovědi

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ



Defuzzifikace

Defuzzifikace je proces, v němž nějaké fuzzy množině přiřazujeme ostrou hodnotu, která ji v jistém smyslu nejlépe reprezentuje.

Nejčastěji používané metody defuzzifikace:

Metoda těžiště (COA, center of area):

$$y_0 = \frac{\int_V y\mu_{B_0}(y)dy}{\int_V \mu_{B_0}(y)dy}$$

Metoda maxima:

$$y_0 = \arg\max_{y \in V} \mu_{B_0}(y)$$

Pokud je takových bodů více, může se použít některá z následujících metod.

Metoda prvého maxima (FOM, first of maxima).

Metoda průměrného maxima (MOM, mean of maxima).

Děkuji za pozornost

Některé snímky převzaty od:

RNDr. Jiří Dvořák, CSc. dvorak@fme.vutbr.cz