

Vícefaktorová analýza rozptylu

Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D.

Vícefaktorová analýza

- Jde o situaci, kdy se zkoumá, zda kvantitativní znak Y je ovlivňován dvěma nebo třemi faktory, opět ne nutně kvantitativními znaky.
- Vícefaktorová analýza rozptylu má svůj experimentální plán. (experimentální plány – později).
- Tento plán může být navržen efektivně tak, aby výsledky analýzy rozptylu byly přesvědčivé a přitom nebylo třeba mít k dispozici příliš mnoho údajů.
- Jak přibývá faktorů, které slouží ke klasifikaci sledovaného znaku Y , zvyšuje se tím rychle i požadavek na objem dat.

Dvoufaktorová a vícefaktorová ANOVA

- Techniky testů hypotéz o rozdílech mezi skupinami, kdy rozdíly způsobuje 2 nebo více faktorů
- Příklad otázek, na které odpovídá VF ANOVA:
- (Příklad - Má barva auta, resp. pohlaví respondentů vliv na pravděpodobnost prodeje auta?)
 - Která složka má větší vliv?
 - Je celkový vliv součtem vlivů jednotlivých znaků posuzovaných odděleně?
- Účinky jednotlivých znaků mohou být vzájemně nezávislé (bez interakce) nebo závislé (s interakcí)

Dvojné třídění

- Sleduje-li se vliv dvou faktorů, které mohou ovlivnit hodnotu sledovaného (kvantitativního) znaku Y , hovoříme o dvojném třídění.
- Obdobně jako v případě jednoduchého třídění je možné pro různé kombinace těchto dvou faktorů provést náhodné výběry a na jejich základě pak testovat individuální vliv obou faktorů.
- Kromě uvedených dvou faktorů je možno uvažovat jako samostatný faktor také jejich interakci. Podle toho se pak rozlišuje analýza rozptylu dvojné třídění s interakcemi nebo bez interakcí.
- My - bez interakcí.

Trojné třídění

- Analogická tvrzení jako pro dvojné třídění platí také pro případ, kdy pracujeme se třemi „hlavními“ faktory – v tomto případě mluvíme o analýze rozptylu trojné třídění.
- Můžeme zkoumat také jako speciální faktory všechny možné dvoučlenné interakce tří hlavních faktorů a také trojčlennou interakci tvořenou všemi třemi hlavními faktory.

Vyvážené třídění

- Vzhledem k časté náročnosti požadavku na objem dat v případě vícefaktorové analýzy rozptylu se omezujeme na případ, kdy pro danou kombinaci faktorů obsahuje příslušný náhodný výběr **pouze jedno pozorování**.
- Hovoříme pak o analýze rozptylu s jedním pozorováním v každé podskupině. Tento případ také patří mezi případy vyváženého třídění.
- Zatímco u jednofaktorové ANOVA vyvážené třídění není až tak zásadní požadavek, v případech vícefaktorové ANOVA hraje podstatně důležitější roli a doporučujeme jej v praxi dodržovat. Splnění tohoto požadavku obvykle v praxi ani nečiní žádné zvláštní problémy. Pokud tento požadavek splněn není, potom záleží na tom, jak jsou vícefaktorové ANOVA prováděny (mohou být totiž prováděny vícero způsoby) a každý z těchto postupů může dát obecně jiný závěr a mít jinou interpretaci.
- V případě vyváženého třídění toto úskalí nenastává.

Dvojné třídění

- Je-li sledovaný znak ovlivňován dvěma faktory, hovoříme o dvojném třídění.
- I v tomto případě dochází ke vhodnému rozkladu celkové variability znaku na dílčí zdroje variability.
- Rozklad celkového součtu čtverců S se provede analogicky jako v případě jednoduchého třídění s tím rozdílem, že přibude v rozkladu nový činitel odrážející vliv druhého faktoru.
- Vysvětlení na příkladu

Příklad 1

- 6 řidičů absolvovalo s každým typem benzínu jednu jízdu. Na hladině významnosti 0,05 testujte, je-li průměrná spotřeba paliva (l/100km) závislá na typu použitého benzínu (faktor A) a na řidiči (faktor B).
- **Pozn.: Jako faktor A označujte vždy faktor s úrovněmi v levém sloupci (tedy s řádkovými průměry)!**

	Řidič						
Benzín	1	2	3	4	5	6	Průměr
Aral	7,5	6,9	7,9	7,3	6,9	7,8	7,38
Shell	7,6	7,2	7,5	8	7,3	8,2	7,63
Benzina	7,2	8,1	7,8	7,6	7,8	6,9	7,57
Slovnaft	7	7,3	7,2	7,5	8,2	7,7	7,48
Průměr	7,33	7,38	7,6	7,6	7,55	7,65	7,5

Testy hypotéz

- Zkoumáme tedy závislost průměrné spotřeby (znak Y) na typu použitého benzínu (faktor A) a na řidiči (faktor B).
- Faktor A nabývá $n = 4$ úrovní a faktor B nabývá $k = 6$ úrovní.
- Pro oba faktory testujeme dvě hypotézy:
- Pro faktor A formulujeme hypotézu:
 - H_0 : faktor A neúčinkuje
 - H_1 : faktor A účinkuje (V tomto případě to značí, že průměrná spotřeba závisí na použitém druhu benzínu)
- Pro faktor B formulujeme hypotézu:
 - H_0 : faktor B neúčinkuje
 - H_1 : faktor B účinkuje (V tomto případě to značí, že průměrná spotřeba závisí na řidiči, který s vozem jel)

Rozklad variability – součty čtverců

Celkový součet čtverců se rozdělí takto:

$$S = S_A + S_B + S_R$$

Celkový součet čtverců: $S = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2$

Součet čtverců pro faktor A: $S_A = k \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y})^2$

(v sumě jsou řádkové průměry a před sumou počet sloupců)

Součet čtverců pro faktor B: $S_B = n \sum_{j=1}^k (\bar{y}_j - \bar{y})^2$

(v sumě jsou sloupcové průměry a před sumou počet řádků)

Příklad 1: Součty čtverců

- Celkový součet čtverců:

$$S = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 (y_{ij} - \bar{y})^2 = (7,5 - 7,5)^2 + (6,9 - 7,5)^2 + \dots + (8,2 - 7,5)^2 + (7,7 - 7,5)^2 = 3,79$$

- Součet čtverců pro faktor A:

$$S_A = k \sum_{i=1}^4 (\bar{y}_i - \bar{y})^2 = 6 \left[(7,38 - 7,5)^2 + \dots + (7,48 - 7,5)^2 \right] = 0,21$$

- Součet čtverců pro faktor B:

$$S_B = n \sum_{j=1}^6 (\bar{y}_j - \bar{y})^2 = 4 \left[(7,33 - 7,5)^2 + \dots + (7,38 - 7,5)^2 \right] = 0,36$$

- Nakonec spočteme $S_R = S - S_A - S_B$
- $S_R = 3,22$.

Postup testování – Testové kritérium:

- Testové kritérium pro 1. hypotézu (faktor A):

$$T = \frac{S_A / (n - 1)}{S_R / (nk - n - k + 1)}$$

- Testové kritérium pro 2. hypotézu (faktor B):

$$T = \frac{S_B / (k - 1)}{S_R / (nk - n - k + 1)}$$

Postup testování:

Kritická hodnota a výsledek

- Kritická hodnota:
 - tabulce kritických hodnot Fisherova rozdělení (F -rozdělení):

$$K = F_{n-1, nk-n-k+1}(\alpha)$$

- Nebo v programu MS Excel: funkce =FINV.RT.()
- Pokud $T \geq K$, zamítáme nulovou hypotézu. Můžeme tedy v takovém případě říci, že faktor A statisticky významně ovlivňuje sledovaný znak Y .
- Je-li naopak $T < K$, přijímáme nulovou hypotézu, jinými slovy, faktor A statisticky významně neovlivňuje sledovaný znak Y .

Příklad 1: Test 1

- Testové kritérium pro 1. hypotézu (faktor A):

$$F = \frac{\frac{S_A}{k-1}}{\frac{S_R}{(k-1)(r-1)}} = \frac{0,21}{\frac{3}{3,5}} = 0,33$$

- V tabulce kritických hodnot F -rozdělení najdeme $F_{3,15}(0,05) = 3,29$
- Protože $0,33 < 3,29$, nelze zamítnout H_0 , což znamená, že **použitý typ benzínu nemá na průměrnou spotřebu vliv.**

Příklad 1: Test 2

- Testové kritérium pro 1. hypotézu (faktor B):

$$F = \frac{\frac{S_B}{r-1}}{\frac{S_R}{(k-1)(r-1)}} = \frac{0,36}{\frac{3,22}{3,5}} = 0,34$$

- V tabulce kritických hodnot F -rozdělení najdeme $F_{25,15}(0,05) = 2,9$
- Protože $0,34 < 2,9$, nelze zamítnout H_0 , což znamená, že **volba řidiče nemá na průměrnou spotřebu vliv.**

Příklad 1: Výstup Excel

Anova: dva faktory bez opakování						
<i>Faktor</i>	<i>Počet</i>	<i>Součet</i>	<i>Průměr</i>	<i>Rozptyl</i>		
Aral	6	44,3	7,383333333	0,185666667		
Shell	6	45,8	7,633333333	0,154666667		
Benzina	6	45,4	7,566666667	0,194666667		
Slovnaft	6	44,9	7,483333333	0,181666667		
A	4	29,3	7,325	0,075833333		
B	4	29,5	7,375	0,2625		
C	4	30,4	7,6	0,1		
D	4	30,4	7,6	0,086666667		
E	4	30,2	7,55	0,323333333		
F	4	30,6	7,65	0,296666667		
ANOVA						
<i>Zdroj variability</i>	<i>SS</i>	<i>Rozdíl</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Hodnota P</i>	<i>F krit</i>
Řádky	0,21	3	0,07	0,325581395	0,806868171	3,287382105
Sloupce	0,358333333	5	0,071666667	0,333333333	0,884912733	2,901294536
Chyba	3,225	15	0,215			
Celkem	3,793333333	23				

Příklad 2

- Byla zkoumána kvalita hroznového vína (vyjádřená na stupnici od 1 do 10) v závislosti na dvou faktorech: průměrné době slunečního svitu za den a frekvenci zavlažování. Pro každou kombinaci obou faktorů existuje jedno pozorování, viz tabulka níže. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ rozhodněte o statistické významnosti obou faktorů.

Frekvence/svit	4h	5h	6h	7h	8h
denní	3	4	6	8	8
dvoudenní	5	6	6	8	9
2 krát za týden	4	7	7	7	8
1 za týden	2	3	4	4	6

Příklad 2: řešení v Excelu

Anova: dva faktory bez opakování						
Faktor	Počet	Součet	Průměr	Rozptyl		
Řádek 1	5	29	5.8	5.2		
Řádek 2	5	34	6.8	2.7		
Řádek 3	5	33	6.6	2.3		
Řádek 4	5	19	3.8	2.2		
Sloupec 1	4	14	3.5	1.666667		
Sloupec 2	4	20	5	3.333333		
Sloupec 3	4	23	5.75	1.583333		
Sloupec 4	4	27	6.75	3.583333		
Sloupec 5	4	31	7.75	1.583333		
ANOVA						
Zdroj variability	SS	Rozdíl	MS	F	Hodnota P	F krit
Řádky	28.15	3	9.383333	15.85915	0.000178	3.490295
Sloupce	42.5	4	10.625	17.95775	5.28E-05	3.259167
Chyba	7.1	12	0.591667			
Celkem	77.75	19				

TROJNÉ TŘÍDĚNÍ (LATINSKÉ ČTVERCE)

- Do analýzy rozptylu patří také speciální případ trojného třídění, tzv. latinské čtverce.
- Latinské čtverce patří mezi klasické metody plánování experimentů (analýza rozptylu rovněž spadá do plánování experimentů).
- Historicky pochází tento pojem z 18. století, kdy L. Euler (1707 – 1783) předložil petrohradské akademii úlohu o 36 důstojnících:
 - Sestavte 36 důstojníků 6 různých hodností ze 6 různých pluků do čtverce tak, aby v každé řadě a v každém sloupci byli důstojníci všech hodností a všech pluků.

Zobecnění problému

- Úkolem je sestavit n^2 objektů do čtverce tak, aby v každé vodorovné řadě i v každé svislé řadě tohoto čtverce byly vždy objekty všech kategorií vlastnosti A a zároveň všech kategorií vlastnosti B (např. v první řadě stojí podporučík z pluku 6, poručík z pluku 5, ..., plukovník z pluku 1).
- Takovéto schéma objektů se nazývá latinský čtverec řádu n .
- Známý výsledek, který pochází od samotného Eulera, říká, že pro každé přirozené číslo n existuje alespoň jeden latinský čtverec řádu n v uvedeném slova smyslu.

Tři faktory

- Představme si, že sledujeme vliv tří faktorů na znak Y .
- Vzhledem k tomu, že jde o tři faktory, dosti obtížně se nám podaří reprezentovat takový experiment dvojrozměrnou tabulkou.
- My: pro každou kombinaci úrovní sledovaných tří faktorů budeme realizovat jediné pozorování a takový experiment budeme reprezentovat dvojrozměrnou tabulkou, jejíž záhlaví bude obsahovat různé úrovně dvou faktorů a vnitřek tabulky bude obsahovat záznam úrovní třetího faktoru.
- Tyto úrovně třetího faktoru budou přitom vepsány do tabulky tak, aby vznikl latinský čtverec.

Příklad tabulky

- Uvažujeme-li faktory A, B, C a hovoříme o latinském čtverci řádu $n = 3$, můžeme náš experiment zapsat například v podobě tabulky :

a	b	c
b	c	a
c	a	b

- Jedna strana tohoto čtverce představuje tři úrovně faktoru A .
- Druhá strana tabulky - sloupce reprezentují tři úrovně faktoru B .
- Vnitřek tabulky obsahuje tři úrovně třetího faktoru C .
- Návrh takového experimentu čteme tak, že když je faktor A na první úrovni, faktor B je na první a faktor C je rovněž na první úrovni (to je prvek $[1,1]$ tabulky), pak právě pro takovou kombinaci tří faktorů realizujeme jedno pozorování.
- Výhoda: pracujeme s devíti údaji místo 27, přitom je tento návrh zvolen tak, aby výsledná analýza dávala věrohodné výsledky.

Součty čtverců

- Celkový rozklad variability, z něhož se vychází při testování vlivu jednotlivých faktorů, má tvar $S = S_A + S_B + S_C + S_R$.

$$S_A = n \sum_{i=1}^n (\bar{y}_{i..} - \bar{y})^2$$

$$S_B = n \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{.j.} - \bar{y})^2$$

$$S_C = n \sum_{k=1}^n (\bar{y}_{..k} - \bar{y})^2$$

$$S = \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y})^2$$

Test

- U analýzy rozptylu trojné třídění provádíme tři testy. Každý z nich se týká vlivu jednoho ze tří faktorů.
- Testovaná hypotéza H_0 : **daný faktor není významný**.
Alternativní hypotéza H_1 : negace H_0 .
- Testová kritéria pro testování vlivu faktorů A, B, C :

Zdroj variability	Součet čtverců	Stupně volnosti	Odhad rozptylu	F testové kritérium
Faktor A	S_A	$df_A = n - 1$	$MS_A = S_A / df_A$	$F_A = MS_A / MS_R$
Faktor B	S_B	$df_B = n - 1$	$MS_B = S_B / df_B$	$F_B = MS_B / MS_R$
Faktor C	S_C	$df_C = n - 1$	$MS_C = S_C / df_C$	$F_C = MS_C / MS_R$
Rezidua	S_R	$df_R = (n - 1)(n - 2)$	$MS_R = S_R / df_R$	
Celek	S	$df_T = n^2 - 1$		

Test: výsledek

Je-li $F_A \geq F_{n-1, (n-1)(n-2)}(\alpha)$, zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti α a tvrdíme, že faktor A je vlivný. Při opačné nerovnosti vlivný není.

Je-li $F_B \geq F_{n-1, (n-1)(n-2)}(\alpha)$, zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti α a tvrdíme, že faktor B je vlivný. Při opačné nerovnosti vlivný není.

Je-li $F_C \geq F_{n-1, (n-1)(n-2)}(\alpha)$, zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti α a tvrdíme, že faktor C je vlivný. Při opačné nerovnosti vlivný není.

Příklad

- Uvažujme případ, kdy sledujeme množství emisí výfukových plynů Y v závislosti na těchto třech faktorech:
 - Faktor 1 = *typ přísady do benzínu (A, B, C, D)*,
 - Faktor 2 = *řidič vozidla (I, II, III, IV)*,
 - Faktor 3 = *použité vozidlo (1, 2, 3, 4)*.
- Výsledky experimentu:

<i>Řidič\vozidlo:</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>I</i>	<i>A : 21</i>	<i>B : 26</i>	<i>D : 20</i>	<i>C : 25</i>
<i>II</i>	<i>D : 23</i>	<i>C : 26</i>	<i>A : 20</i>	<i>B : 27</i>
<i>III</i>	<i>B : 15</i>	<i>D : 13</i>	<i>C : 16</i>	<i>A : 16</i>
<i>IV</i>	<i>C : 17</i>	<i>A : 15</i>	<i>B : 20</i>	<i>D : 20</i>

Příklad: příprava

- Testujeme potenciální vliv jednotlivých faktorů na Y na pětiprocentní hladině významnosti.

i	$\bar{y}_{i..}$
1=A	18
2=B	22
3=C	21
4=D	19

j	$\bar{y}_{.j.}$
1=I	23
2=II	24
3=III	15
4=IV	18

k	$\bar{y}_{...k}$
1	19
2	20
3	19
4	22

Příklad: Součty čtverců

$$S_1 = n \sum_{i=1}^n (\bar{y}_{i..} - \bar{y})^2 = 40.$$

$$S_2 = n \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{.j.} - \bar{y})^2 = 216.$$

$$S_3 = n \sum_{k=1}^n (\bar{y}_{..k} - \bar{y})^2 = 24.$$

$$S = \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y})^2 = 296.$$

$$S_R = S - S_A - S_B - S_C = 16.$$

Příklad: Test

- H_0 : daný faktor není významný.
- H_1 : negace H_0
- Testová kritéria

Faktor 1:

$$T = \frac{(40/3)}{(16/6)} = 5.$$

Faktor 2:

$$T = \frac{(216/3)}{(16/6)} = 27.$$

Faktor 3:

$$T = \frac{(24/3)}{(16/6)} = 3.$$

- Kritická hodnota je ve všech třech případech stejná: $K = \text{FINV}(0,05,3,6) = 4,757$.
- Závěr testů: faktory 1 a 2 jsou statisticky významné, pokud jde o jejich vliv na znak Y , třetí faktor, tj. typ použitého vozidla, neovlivňuje znak Y .

Děkuji za pozornost.