Extrémy funkcí - postup pro výpočet lokálních extrémů speciálně pro $z = f(x, y)$

1) Vypočteme stacionární bod(y) C ze soustavy rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.$$

2) Vypočteme druhé parciální derivace funkce, zjistíme hodnoty druhých parciálních derivací v bodě C a vypočteme následující determinant

$$D(C)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(C) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(C) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C) \end{vmatrix}.$$

Je-li $\boldsymbol{D(C) > 0}$, pak f v bodě C má lokální extrém. O jaký druh extrému se jedná poznáme podle hodnoty $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C)$:

a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C) > 0 \quad \Rightarrow$ v bodě C je ostré lokální minimum,

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C) < 0 \quad \Rightarrow$ v bodě C je ostré lokální maximum.

Je-li $\boldsymbol{D(C) < 0}$, pak f nemá v bodě C lokální extrém. V tom bodě funkce má sedlo (je to sedlový bod).

Je-li $\boldsymbol{D(C) = 0}$, neumíme rozhodnout, zda nastává v bodě C extrém. Také může být v bodě C extrém neostrý, pro jehož určení pomůže studium znamének $d^2 f(C)$ nebo $\Delta f(C)$ v okolí bodu C.

Příklad 1. Najděme lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 3$.

Řešení. Najdeme stacionární body funkce. Nejprve vypočteme první parciální derivace :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-4,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4y.$$

Řešíme soustavu rovnic $2x-4=0,\ \ 4y=0.$

Řešením soustavy dostáváme stacionární bod $C=[2,0]$.

Vypočteme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=4.$$

Určíme hodnotu determinantu $D(C)=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=8$. Protože je determinant kladný, existuje v bodě $C=[2,0]$ lokální extrém. Dále zjistíme hodnotu $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C)=2$. Protože je tato hodnota kladná v bodě $C=[2,0]$ je lokální minimum.

Hodnota minima je $f(C)=f(2,0)=-1$.

Příklad 2. Najděme lokální extrémy funkce $f(x,y)=2xy-3x^2-2y^2+10$.

Řešení. První parciální derivace funkce:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2y-6x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x-4y.$$

Řešíme soustavu rovnic:

$$2y-6x=0,$$

$$2x-4y=0.$$

Řešením soustavy dostáváme stacionární bod $C=[0,0]$.

Druhé parciální derivace funkce: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-6$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=2$.

Dosadíme do determinantu $D(C)=\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=20 \quad \Rightarrow$ funkce má extrém.

Protože $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=-6<0$, má funkce v bodě $C=[0,0]$ ostré lokální maximum.

Hodnota maxima je $f(C)=f(0,0)=10$.

Příklad 3. Určeme lokální extrémy funkce $f(x,y)=x^2+4xy+6y^2-2x+8y-5$.

Řešení. První parciální derivace funkce:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+4y-2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=4x+12y+8.$$

Stacionární bodem funkce je bod $C=[7,-3]$.

Druhé parciální derivace funkce: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=4$.

Determinant $D(C)=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 12 \end{vmatrix}=8 \quad \Rightarrow$ funkce má extrém.

Protože $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(7,-3)=2>0$, ve stacionárním bodě $C=[7,-3]$ je ostrém lokální minimum. Hodnota maxima je $f(C)=f(7,-3)=-24$.