

MATEMATIKA V EKONOMII – PŘEDNÁŠKA Č. 7: Substituce v neurčitém integrálu, určitý integrál - úvod

- Složitější neurčité integrály je možné řešit pomocí substituce, kterou se integrály zjednoduší.
- **Substituce** = náhrada původní proměnné nebo výrazu novou proměnnou.
- Budeme se zabývat substitucemi složených funkcí, a dále logaritmických, exponenciálních a goniometrických funkcí.

INTEGRACE SLOŽENÝCH FUNKCÍ

Příklad. Vypočtěte $\int (3x-1)^4 dx$.

Příklad 7.2. Vypočtěte: $\int e^{2x+3} dx$.

Příklad. Vypočtete: $\int 2x \cos(x^2 - 4) dx$.

INTEGRACE LOGARITMICKÝCH A EXPONENCIÁLNÍCH FUNKCÍ

Obsahují-li integrály exponenciální funkci e^x respektive logaritmickou funkci $\ln x$, provádíme náhradu právě těchto funkcí (u logaritmické funkce je zvláště výhodné, pokud integrál obsahuje člen $\frac{\ln^\alpha x}{x}$.)

Příklad 7.4. Vypočtete: $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

Příklad 7.5. Vypočtete: $\int \frac{5}{x \ln^2 x} dx$.

Příklad. Vypočtete: $\int \frac{e^x}{e^x + 5} dx$.

Příklad 7.7. Vypočtěte: $\int \frac{e^x - 2}{e^x + 1} dx$.

INTEGRACE GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

Integrály obsahující goniometrické funkce sinus, kosinus, tangens nebo kotangens lze řešit pomocí následujících substitucí:

- Integrál obsahuje funkce $\sin^\alpha x$ a $\cos^\beta x$, přičemž α je liché a β sudé. V tomto případě uijeme substituci: $\cos x = t$, nahrazujeme tedy sudou funkci. Pokud je situace opačná a α je sudé a β liché, uijeme substituci: $\sin x = t$.
- Integrál obsahuje funkce $\sin^\alpha x$ a $\cos^\beta x$, přičemž α i β jsou sudé. Pak použijeme substituci $\operatorname{tg} x = t$.
- Integrál obsahuje funkce $\sin^\alpha x$ a $\cos^\beta x$, přičemž α i β jsou liché. Nahrazujeme tu funkci, která má vyšší exponent.
- Pokud nelze použít žádnou z předchozích substitucí, je možné využít univerzální substituci $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, viz Tabulka 7.2.

Při úpravách integrandu používáme základní goniometrické vzorce, viz Tabulka 7.1.

Tabulka 7.1. Nejdůležitější goniometrické vztahy

č.	vztah
(1)	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
(2)	$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$
(3)	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
(4)	$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
(5)	$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

Tabulka 7.2. Univerzální goniometrická substituce.

č.	vztah
(1)	$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$
(2)	$\sin x = \frac{2t}{t^2 + 1}$
(3)	$\cos x = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}$
(4)	$dx = \frac{2}{1 + t^2}$

Příklad. Vypočtete: $\int \cos x \cdot \sin^2 x dx$.

Příklad 7.10. Vypočtete: $\int \sin^3 x dx$

Příklad 7.11. Vypočtěte: $\int \frac{dx}{\sin x}$

INTEGRACE IRACIONÁLNÍCH FUNKCÍ

- Iracionální funkce jsou funkce obsahující proměnnou pod odmocninou.
V tomto případě obvykle **nahrazujeme celou odmocninu**.

Příklad 7.12. Vypočtěte: $\int \sqrt{4x+1} dx$.

Příklad 7.13. Vypočtěte: $\int x\sqrt{x^2 - 1} dx$.

Příklad 7.14. Vypočtěte: $\int \sqrt{1 - x^2} dx$.

URČITÝ INTEGRÁL

NEWTONŮV URČITÝ INTEGRÁL

Definice 8.1.: Necht' funkce $f(x)$ je spojitá na otevřeném intervalu J . Newtonovým určitým integrálem funkce $f(x)$ od a do b (na intervalu $(a,b) \subset J$) nazýváme symbol $\int_a^b f(x)dx$, kde a je horní integrační mez a b je dolní integrační mez.

- **Výpočet** určitého integrálu provádíme pomocí **Newtonova-Leibnizova vzorce:**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (8.2)$$

- Zatímco neurčitý integrál je *funkce* (přesněji množina funkcí lišících se o konstantu C), je **určitý integrál číslo**, které vypočteme ze vztahu (8.2). Význam integrační mezí spočívá v tom, že nám říkají „odkud kam integrujeme“.

- **Základní vlastnosti** určitého integrálu:

i) $\int_a^a f(x)dx = 0$

ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

iii) $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$

iv) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

v) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx, \quad b \in (a, c)$

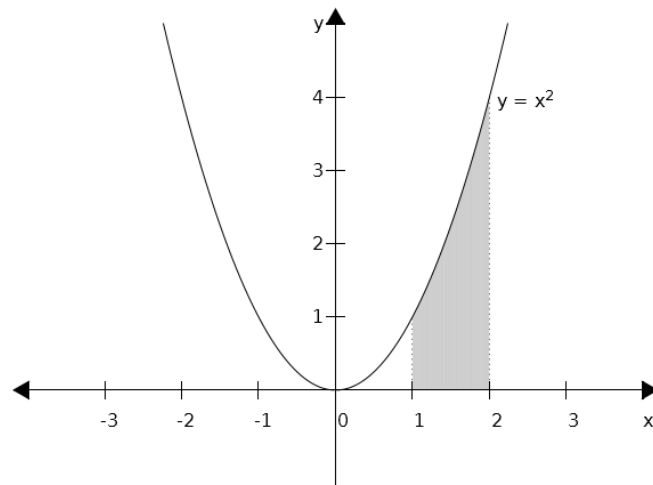
- **Užití určitého integrálu** je velmi široké, zvláště v přírodních a vědách a technických oborech. Určitý integrál se používá nejčastěji k výpočtu:

- obsahu plochy ohraničené danými křivkami
- délky křivky
- objemu rotačního tělesa
- povrchu rotačního tělesa
- při řešení diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami

V ekonomii můžeme určitý integrál využít k výpočtu:

- celkových veličin z mezních (marginálních) veličin, například celkového příjmu z mezního příjmu,
- celkové veličiny, je-li dán její tok či intenzita.
- k výpočtu přebytku spotřebitele a výrobce v podmínkách dokonalé konkurence

Příklad 8.1. Vypočtete: $\int_1^2 x^2 dx$.



Obr. 8.2. Obsah plochy pod křivkou $y = x^2$.

Příklad 8.2. Vypočtete: $\int_0^3 x^2 dx$.

Příklad 8.3. Vypočtěte: $\int_{-2}^0 x^3 dx$.

Příklad 8.4. Vypočtěte: $\int_{-1}^2 (3x^2 - 4x + 1) dx$.

Příklad 8.5. Vypočtěte: $\int_0^1 e^x dx$.

Příklad 8.6. Vypočtete: $\int_0^{\pi} \sin x dx$.

Příklad 8.8. Vypočtete: $\int_1^e \frac{1}{x} dx$.

Varovný příklad 8.9. Vypočtete: $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$.

METODA PER PARTES V URČITÉM INTEGRÁLU

Metodu per partes jsme zavedli v Kapitole 6. Pro určitý integrál při užití této integrační metody platí:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx \quad (8.3)$$

Příklad 8.10. Vypočtete: $\int_1^2 x e^x dx$.

Příklad 8.11. Vypočtete: $\int_1^e x^2 \ln x dx$.

SUBSTITUCE V URČITÉM INTEGRÁLU

- Při substituci v určitém integrálu nahrazujeme nejen **integrovanou funkci**, ale také **integrační meze**!

***Věta 8.1.** Necht' funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$, necht' $\varphi(t)$ a $\varphi'(t)$ jsou spojitě funkce v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, přičemž necht' $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, necht' $\varphi'(t)$ je ryze monotónní v $\langle \alpha, \beta \rangle$. Potom:*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt \quad (8.4)$$

Užití Věty 8.1, respektive vztahu (8.4) si předvedeme na několika řešených úlohách.

Příklad 8.13. Vypočtete: $\int_0^3 (2x+1)^3 dx$.

Příklad 8.14. Vypočtete: $\int_0^1 x\sqrt{x^2+2} dx$.

Příklad 8.15. Vypočtete: $\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x dx$

NEVLASTNÍ INTEGRÁL

V předchozích kapitolách o určitém integrálu jsme předpokládali, že obě integrační meze a a b jsou konečné, a také, že integrovaná funkce je v daném intervalu spojitá a nabývá pouze konečných hodnot.

- Pokud není splněna první podmínka, hovoříme o *nevlastním integrálu vlivem integrační meze*.
- Pokud není splněna druhá podmínka, hovoříme o *nevlastním integrálu vlivem nespojitosti funkce*.

V nevlastním integrálu je tedy buď integrační mez nekonečná, nebo integrovaná funkce nabývá nekonečné hodnoty v bodě nespojitosti.

Připomeňme, že pojmem „vlastní“ se označují konečné hodnoty (reálná čísla), zatímco pojem „nevlastní“ označuje plus nebo minus nekonečno. Odtud tedy pojmenování tohoto typu integrálu.

Hodnota nevlastního integrálu může být konečná, v tom případě říkáme, že *konverguje*. V opačném případě říkáme, že integrál *diverguje*.

Výpočet nevlastního integrálu vlivem horní meze se provádí pomocí následujícího vztahu:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [F(x)]_a^t \quad (8.5)$$

Výpočet nevlastního integrálu vlivem dolní meze se provádí analogicky.

Příklad 8.17. Vypočtěte: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

Příklad 8.18. Vypočtěte: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$.