MATEMATIKA V EKONOMII – PŘEDNÁŠKA Č. 11:
Úvod do obyčejných diferenciálních rovnic

- Mějme funkci jedné proměnné $y = f(x)$. **Diferenciální rovnice** je rovnice, která kromě x a y obsahuje i **derivaci** (derivace) funkce y.

- Řád diferenciální rovnice je určen nejvyšší derivací, mocnina u nejvyšší derivace určuje **stupeň diferenciální rovnice**.

- Příklady:

$y' + 5y = x^2$ je diferenciální rovnicí 1. řádu 1. stupně

$(y'')^3 - (y')^5 x^2 - y^8 + 5x = 0$ je diferenciální rovnice 2. řádu 3. stupně.

- **Diferenciální rovnice lze** dále **dělit** například na *obyčejné* a *parciální* (budeme se zabývat jen těmi prvními), a na *lineární* a *nelineární* (budeme se zabývat vesměs jen těmi prvními).

Rozlišujeme **tři druhy řešení** diferenciální rovnice:

-Obecné řešení je funkce $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ vyhovující dané rovnici a obsahující (neurčité) konstanty C_i podobně jako u neurčitého integrálu.

-Partikulární řešení dostaneme z obecného řešení tak, že za konstanty C_i dosadíme nějaké konkrétní hodnoty, které mohou vyplývat například z takzvaných počátečních nebo okrajových podmínek (pro danou hodnotu x je předepsána hodnota funkce y a/nebo hodnota její derivace. Grafickým znázorněním partikulárního řešení je *integrální křivka*.

-Singulární řešení je řešení, které nelze získat z obecného řešení pro žádné hodnoty C_i, často se jedná o „zvláštní" funkce typu $y = 0$, apod.

Příklad 12.2. Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = x$. Určete i partikulární řešení, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 2$.

Příklad 12.3. Určete obecné řešení rovnice $y' = 4x + 2$, a dále partikulární řešení pro $y\ (1) = 2$.

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU SE SEPAROVATELNÝMI PROMĚNNÝMI

Jedná se o rovnice ve tvaru: $P(x)+Q(y)y'=0$ nebo $P(x)\,dx+Q(y)\,dy=0$.

Řeší se **separací** (oddělením) **proměnných**: členy obsahující proměnnou x převedeme na jednu stranu rovnice (obvykle nalevo), členy s y na druhou stranu, a pak obě strany rovnice integrujeme.

Příklad 12.5. Určete obecné řešení rovnice $yy'=x$.

Příklad 12.6. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'+(x-1)y=0$.

LOGISTICKÁ ROVNICE A FUNKCE

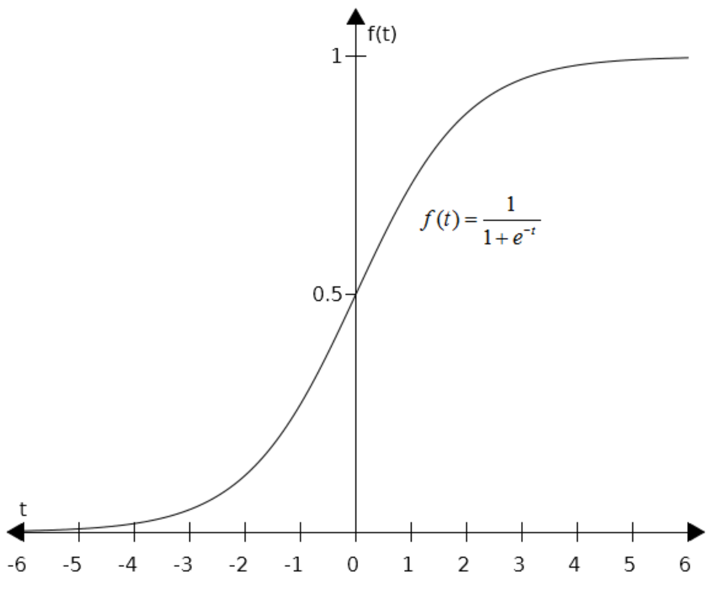
K matematickému modelování fenoménů jako jsou růst populace, šíření informací, technologických inovací, epidemií, růst koncentrací roztoků, a podobně, se využívají *logistické rovnice*, jejichž řešením jsou *logistické funkce*. Logistické rovnice jsou často nelineární diferenciální rovnice. Jednou z nejjednodušších logistických rovnic je následující rovnice (12.2.):

$$\frac{df}{dt} = f \cdot (1 - f) \tag{12.2}$$

V této rovnici je logistická funkce f funkcí času t. Řešení této rovnice pro počáteční podmínku $f(0) = \frac{1}{2}$ je:

$$f(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}} \tag{12.3}$$

Logistická funkce (12.3) má tu vlastnost, že pro kladná t zpočátku velmi rychle (exponenciálně) roste, poté se však její růst zpomaluje, až se začne asymptoticky blížit k 1, viz Obr. 12.1. Tento konečný stav odpovídá stavu „nasycení“ (informace už dorazila ke všem, populace se stabilizovala, roztok je nasycený).



Obr. 12.1. Logistická funkce

VÝVOJ CENY V ČASE

Nechť cena nějakého výrobku nebo komodity je y. Pak první derivace y' vyjadřuje změnu této ceny v čase a y'' vyjadřuje tempo této změny. V zjednodušeném modelu budeme předpokládat, že budoucí vývoj (změna) ceny y' závisí na y, y' i y'', a dá se popsat rovnicí:

$$y' = cy + by' + ay'' \tag{12.4}$$

V rovnici (12.4) jsou a, b a c konstanty. Rovnici (12.3.) upravíme:

$$ay'' + (b-1)\,y' + cy = 0 \tag{12.5}$$

Rovnice ve tvaru (12.5) je lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Řešením tohoto typu rovnic je věnována Kapitola 12.7 a 12.8. Pokud například zvolíme $a = 1$, $b = 2$ a $c = -2$, dostaneme:

$$y'' + y' - 2y = 0 \tag{12.6}$$

Řešením této rovnice je funkce $y = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$, $t \geq 0$. Konstanty C_1 a C_2 lze určit z počátečních podmínek: ceny funkce y v čase $t = 0$, a změny ceny y' v čase $t = 0$.

Zabývejme se nyní *dynamikou vývoje tržní ceny* P za předpokladu, že poptávka i nabídka jsou lineární funkce (viz Kapitola 1.8) a v čase $t = 0$ se tržní cena P nerovná rovnovážné ceně P_E. Jaký vývoj ceny P můžeme očekávat?

Máme tedy následující funkce nabídky a poptávky:

$Q_D = a - bP$, $Q_S = c + dP$, $a, b, c, d > 0$.

Dále z Kapitoly 1.8 víme, že rovnovážná cena je $P_E = \dfrac{a-c}{b+d}$.

Nechť v čase $t = 0$ je převis poptávky nad nabídkou, a ten je přímo úměrný změně P.

Za zmíněných předpokladů můžeme sestavit matematický model (diferenciální rovnici) vývoje tržní ceny P v závislosti na čase t:

$$\frac{dP(t)}{dt} = k(Q_D - Q_S), \tag{12.7}$$

kde k je vhodná konstanta. Do diferenciální rovnice (12.7) dosadíme za funkce D a S:

$$\frac{dP(t)}{t} = k[a - bP - c - dP]$$

Upravíme:

$$\frac{dP(t)}{t} = -(kb + kd)P + (ka - kc)$$

A nakonec provedeme substituci závorek:

$$\frac{dP(t)}{dt} = -AP + B, \text{ resp. } \frac{dP(t)}{dt} + AP = B, \tag{12.8}$$

kde $(kb + kd) = A, (ka - kc) = B$.

Rovnice (12.8) je obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu s nenulovou pravou stranou.

Při jejím řešení nejprve řešíme příslušnou homogenní rovnici pomocí separace proměnných:

$$\frac{dP(t)}{dt} + AP = 0,$$

Odkud dostaneme obecné řešení $P(t) = Ce^{-At}$.

Nyní ještě potřebujeme najít buď partikulární integrál řešící rovnici s nenulovou pravou stranou, nebo můžeme provést variaci konstanty (viz Kapitola 12.6). Rychlejší je v tomto případě uhádnout partikulární integrál: $P_{partik} = \frac{B}{A}$, o čemž je snadné se přesvědčit dosazením do (12.8). Úplné řešení dané rovnice (12.8) je tedy:

$$P(t) = Ce^{-At} + \frac{B}{A} \tag{12.9}$$

Ale $\frac{B}{A}$ ve vztahu (12.9) není nic jiného než rovnovážná cena!

Je totiž: $\frac{B}{A} = \frac{k(a-c)}{k(b+d)} = \frac{(a-c)}{(b+d)} = P_E$.

Vztah (12.9), který popisuje dynamiku vývoje tržní ceny, lze proto vyjádřiv ve tvaru:

$$P(t) = P_E + Ce^{-At} \tag{12.10}$$

Názorná interpretace výsledku (12.10) je následující: druhý člen na pravé straně vyjadřuje odchylku tržní ceny P v čase t od rovnovážné ceny. Tento člen se ale exponenciálně zmenšuje s rostoucím časem, a proto se tržní cena P bude postupně blížit k rovnovážné ceně P_E. Rychlost, s jakou se budou obě ceny přibližovat, je pak závislá na hodnotě konstant použitých v modelu a na počátečním rozdílu obou cen.

Další užití diferenciálních rovnic v ekonomii zahrnuje mimo jiné Solowův model růstu (nelineární diferenciální rovnice), vývoj měnového kurzu v závislosti na poptávce po měně, modely typu predátor-kořist, apod.

MATEMATIKA V EKONOMII – verze M - 2013

Jméno a příjmení : ………………………………………… BODY……...

Osobní číslo:………………………….., PREZENČNÍ x KOMBINOVANÉ

1. a) $\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx$ ......

b) $\int \cos x\sqrt{\sin x+5}dx$ **10b**

2. Vypočtěte **obsah** obrazce omezeného křivkami: $y = x^2, y = \sqrt{x}$.
Grafické znázornění:
Řešte zde:

Obsah = ... **6b**

3. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+1+5}{n+8}$: krit:……...
Závěr:…......... **5b**

4. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{2^n}$: L=……...
Závěr:…......... **5b**

5. Cenová elasticita nabídky se vypočte podle vztahu $E(P) = \frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}$.
Určete elasticitu nabídky pro funkci $Q = 0,5P^2 + 10$ a cenu $P = 4$. **5b**

6. Najděte extrémy funkce $f(x,y) = 2xy + y^2 + 6x - 1$. **6b**

7. Vypočtěte: $\int_2^4 \left(\frac{1}{x^3} \right) dx$ **5b**

8. Vypočtěte: $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ **5b**

9. Napište první tři členy Taylorovy řady funkce $y = \frac{1}{x+1}$ v bodě a = 1.**5b**

10. Určete součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n$ **5b**

11. Určete přebytek výrobce v podmínkách dokonalé konkurence, jestliže $P = D(Q) = \frac{40}{Q}$ a $P = S(Q) = Q - 3$. **7b**

12. Derivujte funkci: $y = (\sin x)^x$ **6b**