

MATEMATIKA – seminář č. 12 – FUNKČNÍ ŘADY

FUNKČNÍ ŘADA A JEJÍ SOUČET

Nechť $f_1(x), f_2(x)$, atd. je posloupnost funkcí. *Funkční řada* je symbol:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

Součet funkční řady je funkce $s(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x)$$

Řada je konvergentní, jestliže funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$ konverguje k funkci $s(x)$ na množině M . Pokud k $s(x)$ konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, hovoříme o absolutní konvergenci.

Množina všech $x \in M$, pro které řada konverguje (konverguje absolutně), se nazývá *obor konvergence* (obor absolutní konvergence), a značí se OK a OAK.

MOCNINNÁ ŘADA

Speciální případ funkční řady: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a)^1 + c_2(x-a)^2 + \dots$

Mocninná řada konverguje absolutně na intervalu $(a-\rho, a+\rho)$, kde ρ je *poloměr konvergence* a daný interval je *interval konvergence* (IK). Poloměr konvergence se vypočte pomocí následujících limit:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \text{ nebo } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

V krajních bodech $a + \rho$, $a - \rho$, řada může, ale nemusí konvergovat, a proto se tyto případy řeší zvlášť. Platí, že $IK \subseteq OAK \subseteq OK$.

GEOMETRICKÁ ŘADA

Řada tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} f^n(x)$, $f(x) = q$, řada konverguje pro $|q| < 1$, a součet řady: $s(x) = \frac{a_1}{1-q}$.

KONVERGENCE FUNKČNÍCH ŘAD

Pro absolutní konvergenci můžeme použít podílové kritérium: $L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}$, nebo

odmocninové kritérium: $L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|}$. Platí, že pokud $L(x) < 1$, řada pro dané x absolutně konverguje, pro $L(x) > 1$ diverguje a pro $L(x) = 1$ nelze rozhodnout.

1. Určete obor případně poloměr konvergence funkčních řad, u geometrických řad určete i jejich součet:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$

$$\begin{array}{lll}
 \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{nx}}{n} & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+3)^n}{n2^n} & \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \\
 \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{x}{x+2} \right)^n & \text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n} & \text{j) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}} \\
 \text{k) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n-1)(2n+1)} & \text{l) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2} & \text{m) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln^{n+1}(x+1) \\
 \text{n) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^n & \text{o) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & \text{p) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n
 \end{array}$$

Výsledky: a) $IK=OK=OAK=(-1,1)$, b) $IK=OK=OAK=(0,2)$, c) $OK=OAK=(1/e,e)$, d) $OK=OAK=(-\infty,0)$, e) $OAK=(-\infty,0)$, $OK=(-\infty,0>$, f) $OK=(-5,-1>$, $IK=OAK=(-5,-1)$, g) $IK=OK=OAK=(-1,1)$, h) $OK=OAK=(-1,\infty)$, i) $OAK=(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$, $OK=(-\infty,-1) \cup <1,\infty)$, j) $IK=OAK=(-1,1)$, $OK = <-1,1)$, k) $IK=(-1,1)$, $OK=OAK=<-1,1>$, l) $IK=(-4,-2)$, $OK=OAK=<-4,-2>$, m) $OK=OAK=(1/e-1,e-1)$, n) $OK=OAK=(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$, o) $IK=OK=OAK= \mathbb{R}$, p) $IK=OK=OAK=(-3,3)$.