MATEMATIKA – seminář č. 9 – Určitý integrál a jeho aplikace

PER PARTES

Pro určitý integrál platí: $\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx$

1. Vypočtěte:

a) $\int_1^2 xe^x dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ c) $\int_1^e x^2 \ln x dx$ d) $\int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x\, dx$

Výsledky:

a) e^2 , b) $\frac{\pi}{2}-1$, c) $\frac{2e^3}{9}-\frac{1}{9}$, d) $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

SUBSTITUCE

Musíme nahrazovat nejen integrovanou funkci, ale také integrační meze!

2. Vypočtěte:

a) $\int_0^2 (3x-1)^4 dx$ b) $\int_0^2 \sqrt{4x+1}dx$ c) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx$ d) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x} dx$

Výsledky:

a) 3126/15 , b) 13/3 , c) 1/3, d) ln2.

OBSAH PLOCHY POD (NAD) DANOU KŘIVKOU

3. Vypočtěte obsah plochy pod (nad) danou křivkou na daném intervalu:

a) $y = x^2; x \in (1,3)$ b) $y = x^3; x \in (-2,2)$ c) $y = \frac{4}{x^2}; x \in (1,4)$

d) $y = \sqrt{x+1}; x \in (-1,3)$ e) $y = xe^{-2x}; x \in (0,1)$

Výsledky: a) 26/3, b) 8, c) 3, d) 16/3, e) $\frac{1}{4}-\frac{3}{4e^2}$.

OBSAH PLOCHY SEVŘENÉ KŘIVKAMI

Obsah plochy mezi křivkami $f(x)$ a $h(x)$, kde $h(x)$ je horní křivka a $f(x)$ dolní křivka, a kde a a b jsou průsečíky obou křivek, počítáme podle vztahu: $S = \int_a^b \left(h(x) - f(x)\right)dx$

4. Vypočtěte obsah plochy sevřené křivkami:

a) $y = 4x, y = x^2$ b) $y = x^2 - 4x, y = x$ c) $y = x, y = -x^2 + 2$.

Výsledky: a) 32/3 , b) 125/6 , c) 9/2

OBJEM ROTAČNÍHO TĚLESA

Objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky $y = f(x)$ kolem osy x na intervalu (a,b) počítáme ze vztahu: $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$. (Podobně lze vypočítat objem rotačního tělesa, pokud rotujeme křivku kolem osy y, pak jen zaměníme x za y).

5. Vypočtěte objem tělesa:
a) které vznikne rotací křivky $y = \sqrt{x}$ kolem osy x na intervalu (0,1).
b) které vznikne rotací křivky $y = \frac{2}{x}$ kolem osy x na intervalu (1,4).

Výsledky: a) V = π/2 , b) V = 3π.

NEVLASTNÍ INTEGRÁL

Integrály funkcí, které buď nejsou na daném intervalu omezené, nebo jsou omezené, ale integrační obor není omezený.

6. Vypočtěte:

a) $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}dx$ b) $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

Výsledky: a) 1/2 , b) diverguje , c) 2

EKONOMICKÉ APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU (viz přednáška č. 8)

a) Funkce **celkových nákladů** $TC(x)$ a funkce **marginálních nákladů** $MC(x)$, kde x je počet výrobků, spolu souvisejí takto: $TC(x) = \int MC(x) + C$ (celkové náklady jsou součtem marginálních nákladů). Integrační konstanta C se určí z jedné známé hodnoty $TC(x)$ pro dané x. Stejný vztah platí také pro **celkové příjmy** TR(x) a **marginální příjmy** $MR(x)$.

b) Celkový příjem *TR* za období (t_1,t_2), jestliže funkce $f(t)$ vyjadřuje **intenzitu toku příjmu** (velikost renty) v čase t: $TR = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$.

7. Určete celkový příjem od 1 do 15 let, je-li hodnota renty v čase t (t jsou roky) dána funkcí $f(t) = \frac{120000}{t+5}$ Kč.

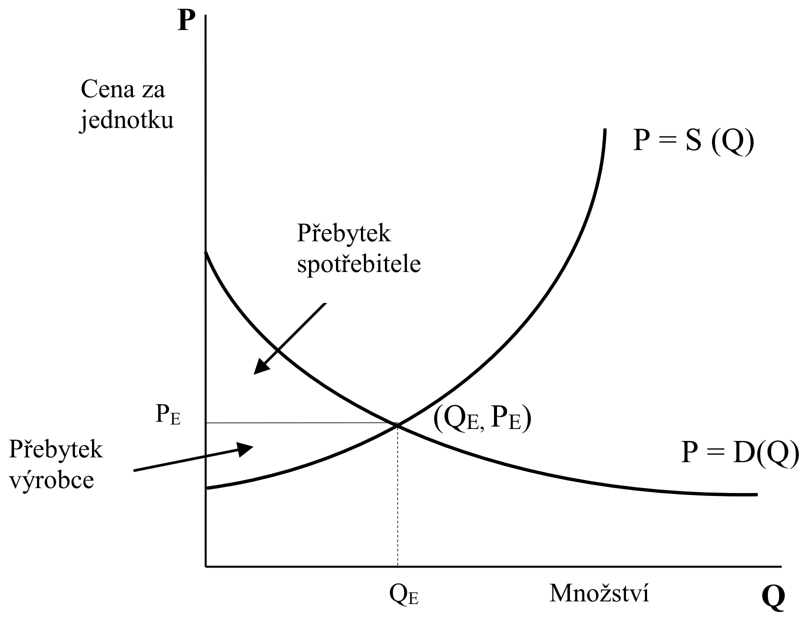
Výsledky: 144 475 Kč

8. Vypočtěte celkový příjem vlastníka pozemku v čase $t = 0$ až 20 let, je-li hodnota renty dána funkcí $f(t) = 10000e^{-0,1t}$ Kč.

Výsledky: 86 464 Kč

c) Přebytek spotřebitele a přebytek výrobce v podmínkách dokonalé konkurence (viz přednáška č. 9)

Připomeňme si, že průsečík P_E je bodem střetu křivek nabídky a poptávky a je nazývaný rovnovážná cena. Někdy jsou spotřebitelé ochotni zaplatit cenu, která je vyšší než rovnovážná cena P_E za každou jednotku produkce. V tomto případě, spotřebitelé získávají tím, že jsou schopni koupit produkt za cenu P_E.



Spotřebitelský zisk, též nazývaný jako **přebytek spotřebitele (CS),** je představován plochou oblasti nad horizontálou $P=P_E$ a pod křivkou poptávky. Plocha této oblasti je oblast pod křivkou poptávky přes interval $[0, Q_E]$ mínus oblast pravoúhelníku, jehož šíře je Q_E a jeho výška je P_E. Z toho důvodu přebytek spotřebitele můžeme zapsat takto:

$$CS = \int_0^{Q_E} D(Q)dQ - Q_E P_E$$

Producent, který je je ochoten nabízet produkt za cenu pod P_E, bude realizovat zisk z prodeje produktu za cenu P_E. Celkový zisk výrobce, nazývaný také přebytek výrobce (PS), je představován plochou oblasti pod horizontální křivkou $P=P_E$ a nad křivkou nabídky. Vidíte, že obsah této oblasti je plocha pravoúhelníku, šíře Q_E a výšky P_E mínus plocha oblasti pod křivkou nabídky přes interval $[0,Q_E]$. Z toho plyne, že přebytek výrobce

$$PS = Q_E P_E - \int_0^{Q_E} S(Q)dQ$$

9. Vypočtěte přebytek spotřebitele a přebytek výrobce (v podmínkách dokonalé konkurence) za předpokladu, že nabídková funkce S(Q) = Q^2 + 1 a poptávkový funkce D(Q) = 11 – 3Q.

Výsledky: CS = 6, PS = 16/3.