

# MATEMATIKA V EKONOMII – PŘEDNÁŠKA Č. 8: Určitý integrál a jeho aplikace

## URČITÝ INTEGRÁL

### NEWTONŮV URČITÝ INTEGRÁL

---

**Definice 8.1.:** Necht' funkce  $f(x)$  je spojitá na otevřeném intervalu  $J$ . Newtonovým určitým integrálem funkce  $f(x)$  od  $a$  do  $b$  (na intervalu  $(a,b) \subset J$ ) nazýváme symbol  $\int_a^b f(x)dx$ , kde  $a$  je horní integrační mez a  $b$  je dolní integrační mez.

---

- **Výpočet** určitého integrálu provádíme pomocí **Newtonova-Leibnizova vzorce**:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (8.2)$$

- Zatímco neurčitý integrál je *funkce* (přesněji množina funkcí lišících se o konstantu  $C$ ), **je určitý integrál číslo**, které vypočteme ze vztahu (8.2). Význam integrační mezí spočívá v tom, že nám říkají „odkud kam integrujeme“.

- **Základní vlastnosti** určitého integrálu:

i)  $\int_a^a f(x)dx = 0$

ii)  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

iii)  $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$

iv)  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

v)  $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ ,  $b \in (a,c)$

- **Užití určitého integrálu** je velmi široké, zvláště v přírodních a vědách a technických oborech. Určitý integrál se používá nejčastěji k výpočtu:

- obsahu plochy ohraničené danými křivkami
- délky křivky
- objemu rotačního tělesa

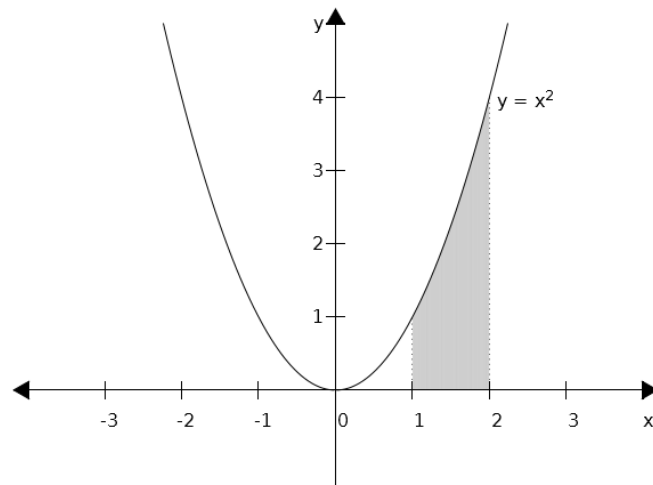
- povrchu rotačního tělesa
- při řešení diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami

**V ekonomii** můžeme určitý integrál využít k výpočtu:

- celkových veličin z mezních (marginálních) veličin, například celkového příjmu z mezního příjmu,
- celkové veličiny, je-li dán její tok či intenzita.
- k výpočtu přebytku spotřebitele a výrobce v podmínkách dokonalé konkurence

---

**Příklad 8.1.** Vypočtete:  $\int_1^2 x^2 dx$ .



Obr. 8.2. Obsah plochy pod křivkou  $y = x^2$ .

---

**Příklad 8.2.** Vypočtete:  $\int_0^3 x^2 dx$ .

---

**Příklad 8.3.** Vypočtěte:  $\int_{-2}^0 x^3 dx$ .

---

**Příklad 8.4.** Vypočtěte:  $\int_{-1}^2 (3x^2 - 4x + 1) dx$ .

---

**Příklad 8.5.** Vypočtěte:  $\int_0^1 e^x dx$ .

---

**Příklad 8.6.** Vypočtěte:  $\int_0^{\pi} \sin x dx$ .

---

**Příklad 8.8.** Vypočtěte:  $\int_1^e \frac{1}{x} dx$ .

---

**Varovný příklad 8.9.** Vypočtete:  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ .

### METODA PER PARTES V URČITÉM INTEGRÁLU

Metodu per partes jsme zavedli v Kapitole 6. Pro určitý integrál při užití této integrační metody platí:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx \quad (8.3)$$

---

**Příklad 8.10.** Vypočtete:  $\int_1^2 x e^x dx$ .

---

**Příklad 8.11.** Vypočtete:  $\int_1^e x^2 \ln x dx$ .

### SUBSTITUCE V URČITÉM INTEGRÁLU

- Při substituci v určitém integrálu nahrazujeme nejen **integrovanou funkci**, ale také **integrační meze**!

---

***Věta 8.1.** Necht' funkce  $f(x)$  je spojitá v intervalu  $\langle a, b \rangle$ , necht'  $\varphi(t)$  a  $\varphi'(t)$  jsou spojitě funkce v intervalu  $\langle \alpha, \beta \rangle$ , přičemž necht'  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ , necht'  $\varphi'(t)$  je ryze monotónní v  $\langle \alpha, \beta \rangle$ . Potom:*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt \quad (8.4)$$

---

Užití Věty 8.1, respektive vztahu (8.4) si předvedeme na několika řešených úlohách.

---

**Příklad 8.13.** Vypočtete:  $\int_0^3 (2x+1)^3 dx$ .

---

**Příklad 8.14.** Vypočtete:  $\int_0^1 x\sqrt{x^2+2} dx$ .

---

**Příklad 8.15.** Vypočtete:  $\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x dx$

### APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU

Určitý integrál má mnoho aplikací především v technických a přírodovědných oborech. Lze jej využít například k výpočtu:

- obsahu plochy omezené danými křivkami
- objemu rotačního tělesa
- plochy rotačního tělesa
- délky křivky (rektifikaci)
- Řešení diferenciálních rovnic s danými okrajovými nebo počátečními podmínkami



## OBSAH PLOCHY VYMEZENÝ DANOU KŘIVKOU

### A OSOU X NA DANÉM INTERVALU

Nejjednodušším užitím určitého integrálu je výpočet obsahu plochy pod (nad) danou křivkou, tedy mezi danou křivkou a osou  $x$  (viz Obr. 9.1.).

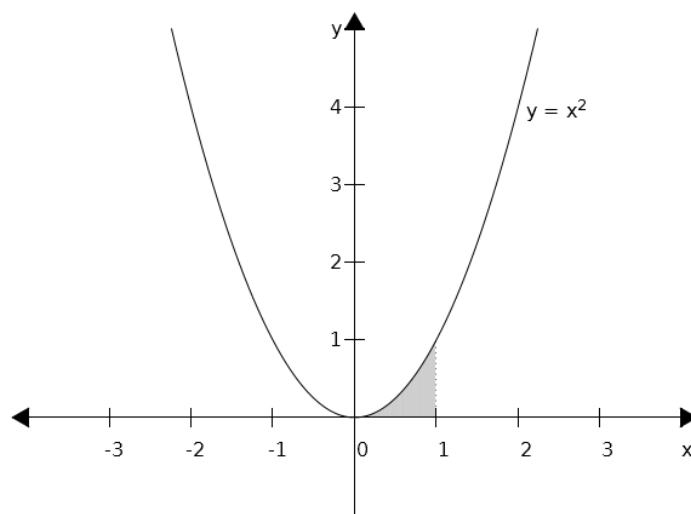
---

**Věta 9.1.** Necht'  $y = f(x)$  je (všude) nezáporná funkce na intervalu  $(a, b)$ . Potom obsah plochy  $S$  vymezený křivkami  $y = f(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  a  $y = 0$  vypočteme užitím Newton-Leibnizovy formule:

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (9.1)$$

---

**Příklad 9.1.** Vypočtěte obsah plochy pod křivkou  $y = x^2$  na intervalu  $(0, 1)$ .



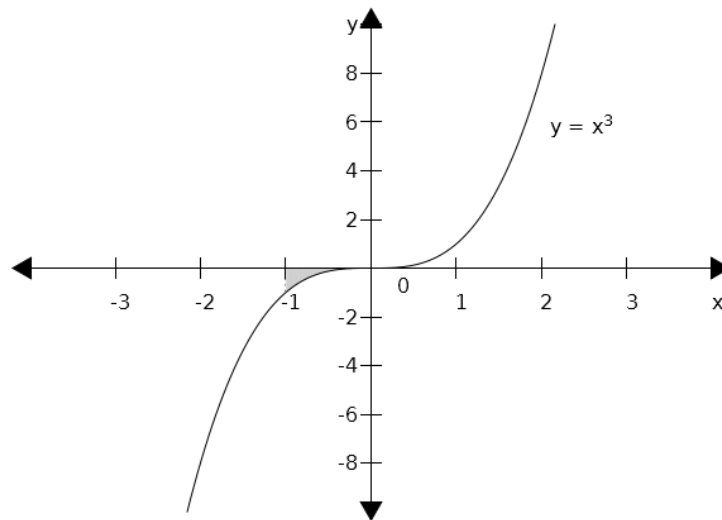
Obr. 9.1.

Pokud je funkce  $y = f(x)$  na daném intervalu  $(a, b)$  záporná, dostaneme užitím vztahu (9.1) obsah plochy rovněž záporný, což je z geometrického hlediska nesmysl. V tomto případě tedy musíme vzít místo funkce  $y = f(x)$  její absolutní hodnotu, čímž je zaručen kladný výsledek:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx = |F(b) - F(a)| \quad (9.2)$$

---

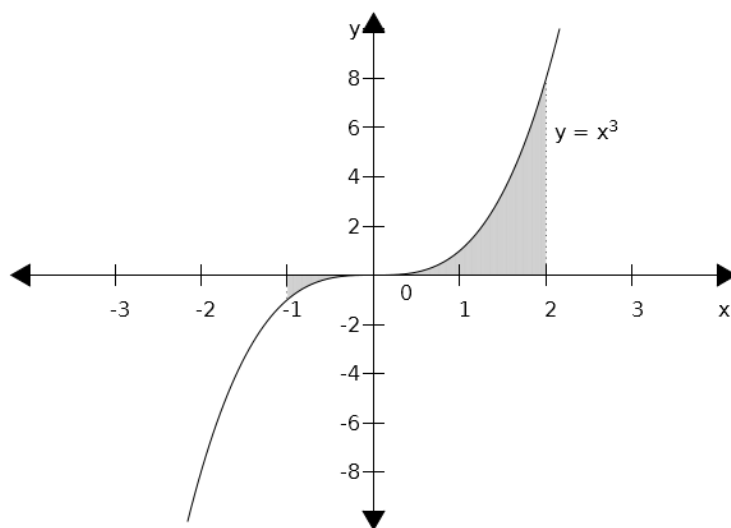
**Příklad 9.2.** Vypočtěte obsah plochy pod křivkou  $y = x^3$  na intervalu  $(-1,0)$ .



Obr. 9.2.

Pokud je funkce  $y = f(x)$  na intervalu  $(a,b)$  kladná i záporná, rozdělíme interval  $(a,b)$  na několik dílčích na sebe navazujících intervalů tak, aby v každém takovém intervalu byla daná funkce buď jen kladná nebo jen záporná. Vypočteme obsahy ploch pod (nad) danými úseky funkce a vše nakonec sečteme.

**Příklad 9.3.** Vypočtěte obsah plochy vymezené křivkou  $y = x^3$ , osou  $x$ , a přímkami  $x = -1$  a  $x = 2$  (viz Obrázek 9.3).



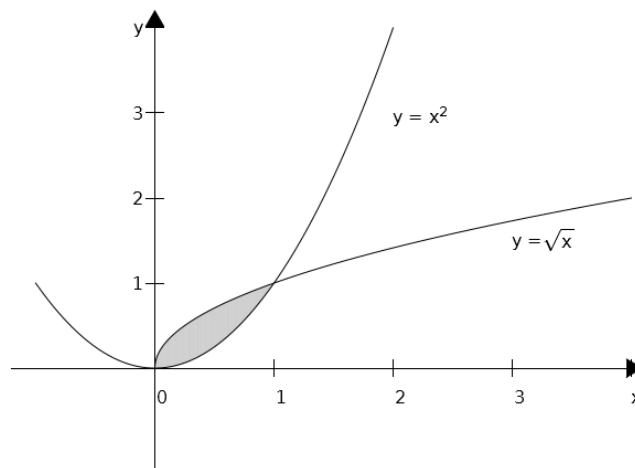
Obr. 9.3.

### Obsah plochy sevřené dvěma a více křivkami

Obsah plochy mezi křivkami  $f(x)$  a  $h(x)$ , kde  $h(x)$  je horní křivka a  $f(x)$  dolní křivka, a kde  $a$  a  $b$  jsou průsečíky obou křivek, počítáme podle vztahu:

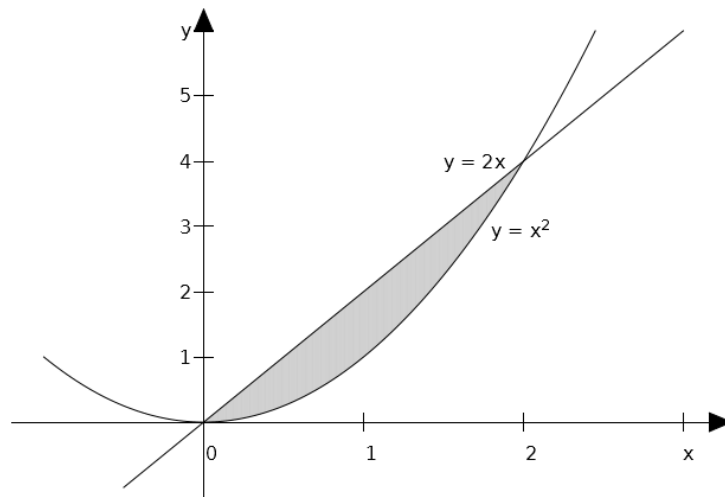
$$S = \int_a^b (h(x) - f(x)) dx \quad (9.3)$$

**Příklad 9.4.** Vypočtěte obsah plochy sevřené křivkami  $y = x^2$  a  $y = \sqrt{x}$  (viz Obr. 9.4).



Obr. 9.4.

**Příklad 9.5.** Vypočtěte obsah plochy sevřené křivkami  $y = x^2$  a  $y = 2x$  (viz Obr. 9.5.).



Obr. 9.5.

### OBJEM ROTAČNÍHO TĚLESA

Objem  $V$  rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky  $y = f(x)$  kolem osy  $x$  na intervalu  $(a,b)$  počítáme ze vztahu:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Podobně lze vypočítat objem rotačního tělesa, pokud rotujeme křivku kolem osy  $y$ , pak jen zaměníme  $x$  za  $y$ .

---

**Příklad 9.7.** Vypočtete objem tělesa (jde o *rotační paraboloid*), které vznikne rotací křivky  $y = \sqrt{x}$  kolem osy  $x$  na intervalu  $(a,b) = (0,3)$ .

---

**Příklad 9.8.** Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací křivky  $y = x^2$  kolem osy  $x$  na intervalu  $(1,2)$ .

### CELKOVÝ PŘÍJEM JAKO URČITÝ INTEGRÁL INTENZITY TOKU PŘÍJMU

Celkový příjem může být v některých situacích dán jako součet toku příjmu za nějaké období. To je typické pro příjmy telefonních operátorů, obchodních řetězců, apod., kde lze tok příjmů považovat za *spojitý* (tyto společnosti inkasují

od zákazníků každou sekundu), nebo *diskrétní*, což je případ nejednodušších rent, dividend, apod. V obou případech lze intenzitu toku modelovat pomocí spojitéch funkcí (které lze derivovat a integrovat).

*Celkový příjem TR* za období  $(t_1; t_2)$ , jestliže funkce  $f(t)$  vyjadřuje *intenzitu toku příjmu* (velikost renty) v čase  $t$ , se vypočte jako:

$$TR = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \quad (9.4)$$

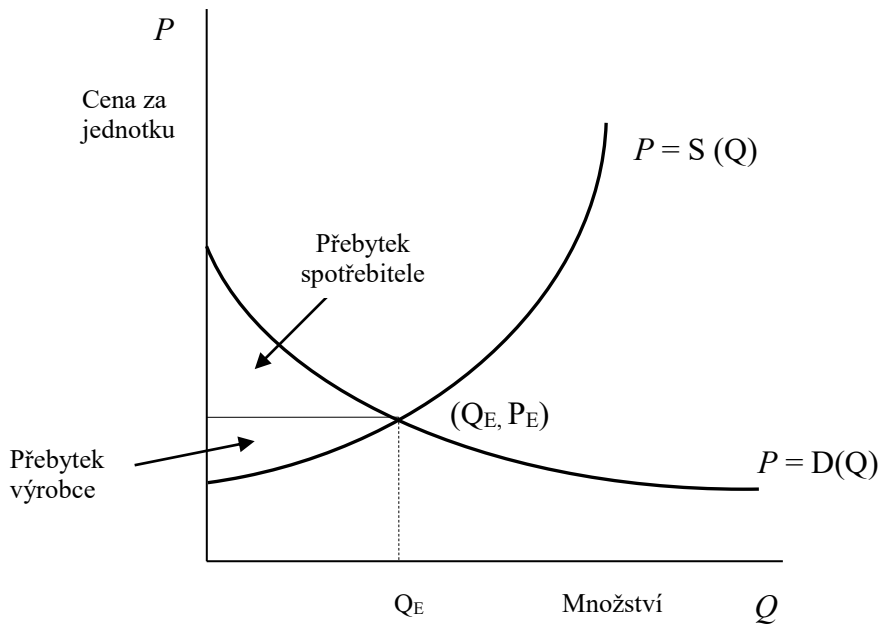
---

**Příklad.** Okamžitý tok peněz do určité finanční instituce je vyjádřen funkcí

$f(t) = 2t^3 - \frac{1}{t}$  Kč. Určete celkový tok za období od  $t = 1$  do  $t = 10$ .

### PŘEBYTEK SPOTŘEBITELE A VÝROBCE V PODMÍNKÁCH DOKONALÉ KONKURENCE

Víme, že průsečík  $P_E$  je průsečíkem křivky nabídky a poptávky, a je nazývaný rovnovážná cena. Někdy jsou spotřebitelé ochotni zaplatit cenu, která je vyšší než rovnovážná cena  $P_E$  za každou jednotku produkce. V tomto případě spotřebitelé získávají tím, že jsou schopni koupit produkt za nižší cenu  $P_E$ .



Obr. 9.6. Zdroj: Godulová et. al. (2000).

*Přebytek spotřebitele CS (customer surplus)* je dán plochou oblasti nad horizontálou  $P = P_E$  a pod křivkou poptávky, viz Obr. 9.6. Plocha této oblasti se vypočte jako plocha pod křivkou poptávky na intervalu  $(0, Q_E)$  minus plocha obdélníka s šířkou  $Q_E$  a výškou  $P_E$ . Přebytek spotřebitele *CS* je tedy:

$$CS = \int_0^{Q_E} D(Q)dQ - Q_E P_E \quad (9.5)$$

Producent, který je ochoten nabízet produkt za cenu pod  $P_E$ , bude realizovat zisk z prodeje produktu za cenu  $P_E$ . *Přebytek výrobce PS (producer surplus)* je dán plochou oblasti pod horizontální křivkou  $P = P_E$  a nad křivkou nabídky, viz Obr. 9.6. Graficky je *PS* určeno jako plocha obdélníka o šířce  $Q_E$  a výšce  $P_E$  minus plocha oblasti pod křivkou nabídky na intervalu  $(0, Q_E)$ . Přebytek výrobce (*PS*) je tedy:

$$PS = Q_E P_E - \int_0^{Q_E} S(Q)dQ \quad (9.6)$$



---

**Příklad 9.12.** Vypočítejte přebytek spotřebitele a přebytek výrobce v podmínkách dokonalé konkurence za předpokladu, že funkce nabídky  $S(Q) = 4 + Q$  a funkce poptávky  $D(Q) = \frac{54}{Q+1}$ .