

Průběh funkce – řešený příklad

Průběh funkce

Při určování průběhu funkce obvykle postupujeme podle následující osnova:

1. $D(f)$, sudost, lichost, periodičnost.
2. Limity (jednostranné) v bodech nespojitosti a v nevlastních bodech.
3. Průsečíky s osami x a y , znaménka funkčních hodnot.
4. První derivace, její nulové body.
5. Lokální extrémů a intervaly monotónnosti.
6. Druhá derivace a její nulové body.
7. Inflexní body, konkávnost, konvexnost.
8. Asymptoty.
9. Omezenost funkce, $H(f)$.
10. Graf funkce.

Určete průběh funkce f : a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

1. Protože f je mocninná, je $D(f) = \mathbb{R}$. (Připomínáme, že definiční obor není roven \mathbb{R} jen u funkcí obsahujících neznámou ve jmenovateli, pod odmocninou, v logaritmu, a u funkcí arcsin a arccos. Daná funkce nepatří do žádné zmíněné kategorie).

Ověříme sudost funkce: musí platit rovnost $f(x) = f(-x)$ pro všechna x z definičního oboru, a tedy:

$$x^3 - 6x^2 + 9x = (-x)^3 - 6(-x^2) + 9(-x),$$

což upravíme takto: $x^3 - 6x^2 + 9x = -x^3 - 6x^2 - 9x$.

Vidíme, že pravá strana se nerovná levé (nejsou stejná znaménka), funkce sudá není.

Podobně ověříme lichost funkce: musí platit $f(x) = -f(-x)$ pro všechna x z definičního oboru, což znamená, že všechny členy na levé a pravé straně rovnice musí mít opačné znaménko. Využijeme výsledek z předešlého odstavce:

$$x^3 - 6x^2 + 9x = -x^3 - 6x^2 - 9x.$$

Člen u $6x$ nemá opačné znaménko, proto funkce není lichá.

Periodická funkce f není, periodické jsou pouze goniometrické funkce.

2. Body nespojitosti funkce nemá, proto spočteme limity pouze v nevlastních bodech, tedy v $\pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 6x^2 + 9x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 6x^2 + 9x = -\infty$$

Při výpočtu těchto limit jsem využili faktu, že o výsledku rozhodne největší člen, tedy x^3 , který pro x rostoucí do plus nekonečna roste rovněž do plus nekonečna, zatímco u druhé limity pro x jdoucí do mínus nekonečna je x^3 záporné.

3. Průsečíky grafu funkce s osami x a y určujeme tak, že nejprve položíme $x = 0$, a dopočítáme z předpisu funkce y (tím určíme průsečík s osou y), a pak položíme $y = 0$ a dopočítáme x (průsečík s osou x):

$x = 0$: dosazením vyjde okamžitě $y = 0$. Máme tedy první průsečík $P_1 [0,0]$. Graf funkce prochází počátkem soustavy souřadnic.

$y = 0$: dosazením získáme rovnici třetího stupně $0 = x^3 - 6x^2 + 9x$, kterou musíme vyřešit.

Nejprve vytkneme x a upravíme:

$$0 = x(x^2 - 6x + 9) = x(x - 3)^2$$

Z posledního tvaru rovnice obdržíme kořeny: $x_1 = 0$ a $x_{2,3} = 3$. Našli jsme tedy průsečíky s osou x : $P_2 [0,0]$ a $P_3 [3,0]$. Avšak průsečíky P_1 a P_2 splývají. Máme tedy jen dva různé průsečíky. Jak uvidíme vzápětí, bod $P_3 [3,0]$ nebude průsečíkem, ale pouze dotykovým bodem grafu funkce a osy x .

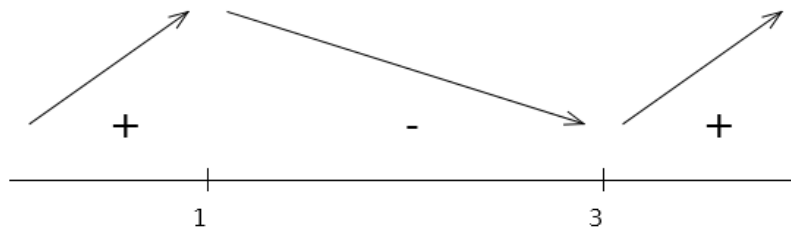
Ještě musíme určit znaménka funkčních hodnot pro zadanou funkci: nulové body $x = 0$ a $x = 3$ nanese na číselnou osu, která se tím rozdělí na tři intervaly. Z každého intervalu vybereme jedno libovolné číslo, pomocí kterého zjistíme znaménko dané funkce: V intervalu $(-\infty, 0)$ vybereme například $x = -10$, dosadíme do předpisu funkce

$y = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x-3)^2$ a vyjde záporná hodnota (-1690) . Nad interval $(-\infty, 0)$ napíšeme znaménko “-“. U intervalů $(0, 3)$ a $(3, \infty)$ zjistíme znaménko “+“. Můžeme tak učinit závěr, že pro kladná x nabývá daná funkce kladných hodnot, pro záporná x je funkce záporná a pro $x = 0$ je rovněž $y = 0$. Proto musí být bod $P_3 [3,0]$ dotykový bod, a ne průsečík.

4. První derivace funkce f : $y' = 3x^2 - 12x + 9$.

Nulové body první derivace, což jsou „body podezřelé z extrému“, najdeme řešením kvadratické rovnice $0 = 3x^2 - 12x + 9$: $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$ (řešíme pomocí diskriminantu nebo rozkladem na součin kořenových činitelů: $0 = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$).

5. Body $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$ nanese na číselnou osu, čímž získáme tři intervaly (bez nulových bodů): $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$ a $(3, \infty)$, viz Obr. 3.4. Nyní rozhodneme o znaménku první derivace v každém intervalu tak, že zvolíme libovolné číslo z daného intervalu a dosadíme ho do 1. derivace. Postupně obdržíme znaménka “+“ “-“ a “+“. Víme, že pokud je první derivace v nějakém intervalu kladná, pak je daná funkce na tomto intervalu rostoucí. Proto nad intervaly se znaménkem “+“ načrtne šipku směrem vzhůru. Obdobně nad intervaly se znaménkem “-“ načrtne šipku směrem dolů, což symbolizuje, že daná funkce na tomto intervalu klesá, viz Obr. 3.4.



Obr. 3.4. Znaménka první derivace.

Z „šipkového“ schématu okamžitě vidíme, že v bodě $x = 1$ má funkce maximum, zatímco v bodě $x = 3$ je minimum. Další extrémy funkce nemá.

Pro monotónnost platí:

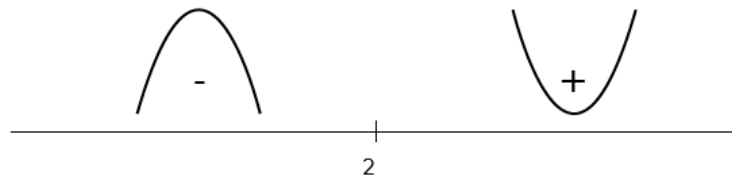
Pro $x \in (1, 3)$ je funkce klesající,

Pro $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ je funkce rostoucí.

6. Druhá derivace: $y' = 6x - 12$, nulový bod druhé derivace: $x = 2$.

7. Nulový bod druhé derivace, tedy $x = 2$, může být inflexním bodem dané funkce, pokud se v něm mění konvexnost na konkávnost nebo obráceně. To ověříme pomocí znaménka druhé derivace: na číselné ose opět vyznačíme nulový bod $x = 2$, čímž dostaneme dva intervaly: $(-\infty, 2)$ a $(2, \infty)$, viz Obr. 3.5. V prvním intervalu zvolíme například $x = 0$, druhá derivace vyjde záporná (-12) . Nad interval napíšeme “-“. U druhého intervalu zvolíme například $x = 10$, druhá derivace vyjde kladná $(+48)$. Nad interval napíšeme “+“. Protože v bodě $x = 2$

se mění znaménko druhé derivace, je tento bod inflexním bodem. V intervalu $(-\infty, 2)$ je funkce konkávní, v intervalu $(2, \infty)$ konvexní (podívejte se na graf této funkce níže!).



Obr. 3.5. Znaménka druhé derivace.

8. Asymptoty:

Svislou asymptotu určíme z definičního oboru: protože $D(f) = \mathbb{R}$, svislá asymptota neexistuje.

Šikmou asymptotu vypočteme ze vztahů (3.1) a (3.2). Protože je daná funkce spojitá, stačí vypočítat limity do plus nekonečna. V našem případě obdržíme:

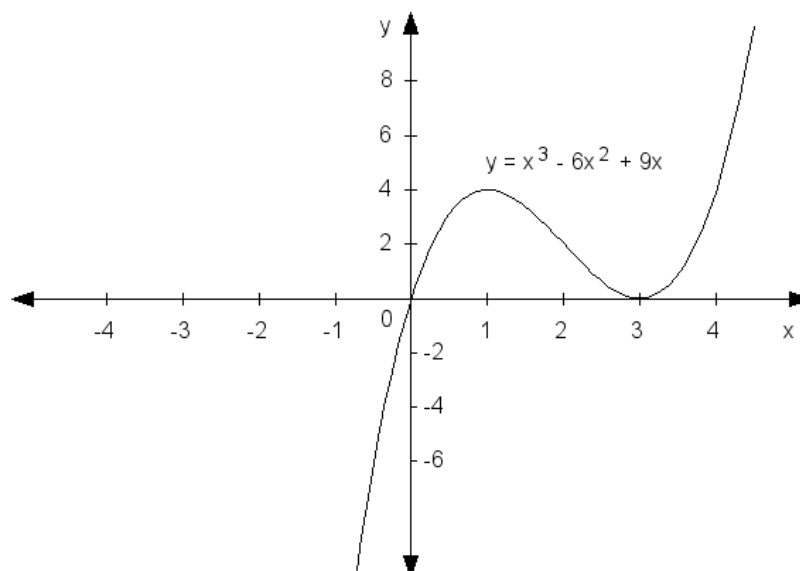
$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 - 6x + 9) = +\infty.$$

Pokud nám vyjde koeficient a nebo b nekonečný, znamená to, že šikmá asymptota neexistuje. Koeficient b už nemusíme počítat.

9. Funkce není omezená, a $H(f) = \mathbb{R}$.

10. Graf viz Obrázek 3.6. ■

Poznámka: graf funkce je lepší kreslit průběžně. Vždy, když o funkci něco zjistíme (například polohu lokálního maxima), je vhodné si tento fakt zakreslit do grafu, neboť tak získáme lepší představu o dané funkci již během určování průběhu funkce.



Obr. 3.6. Graf funkce $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.