



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



Název projektu	Rozvoj vzdělávání na Slezské univerzitě v Opavě
Registrační číslo projektu	CZ.02.2.69/0.0./0.0/16_015/0002400

Sbírka úloh Matematika v ekonomii

Distanční studijní text

Jiří Mazurek

Karviná 2021



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Obor: Matematika, ekonomie

Klíčová slova: Diferenciální počet, funkce, integrální počet, mikroekonomie, optimalizace.

Anotace: Sbíрка úloh z matematiky v ekonomii je opora určená studentům prezenční i kombinované formy navazujícího magisterského studia na Obchodně podnikatelské fakultě v Karviné pro stejnojmenný jednosemestrální předmět, který svým obsahem navazuje na předmět Kvantitativní metody vyučovaný v prvním ročníku. Cílem Sbířky je poskytnout studentům úlohy a příklady k prohloubení znalostí především v oblasti matematické analýzy, a demonstrovat její užití v různých oblastech ekonomie. Opora zahrnuje reálné funkce jedné a více proměnných, průběh funkce, nekonečné řady, diferenciální a integrální počet, a diferenciální rovnice. Aplikace matematické analýzy v oblasti ekonomie zahrnuje hledání extrémů (maxima a minima) ekonomických funkcí, jako jsou náklady, příjmy, zisk, užitek, produkce, apod., analýzu vlastností těchto funkcí a jejich vzájemných vztahů, a také matematické modelování ekonomických situací.

Autor: **Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D.**

Obsah

ÚVODEM.....	7
RYCHLÝ NÁHLED STUDIJNÍ OPORY.....	8
1 PRŮBĚH FUNKCE.....	9
1.1. Základní pojmy a vztahy.....	9
1.2. Úlohy.....	10
2 ÚVOD DO DIFERENCIÁLNÍHO POČTU JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ.....	16
2.1 Základní pojmy a vztahy.....	16
2.2 Úlohy.....	21
3 PRŮBĚH FUNKCE.....	26
3.1. Základní pojmy a vztahy.....	26
3.2 Úlohy.....	27
4 REÁLNÁ FUNKCE DVOU REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH.....	32
4.1. Základní pojmy a vztahy.....	32
4.2 Úlohy.....	34
5 LOKÁLNÍ A VÁZANÉ EXTRÉMY FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH.....	37
5.1. Základní pojmy a vztahy.....	37
5.2 Úlohy.....	38
6 NEURČITÝ INTEGRÁL.....	40
6.1. Základní pojmy a vztahy.....	40
6.2 Úlohy.....	43
7 URČITÝ INTEGRÁL.....	45
7.1. Základní pojmy a vztahy.....	45
7.2 Úlohy.....	46
8 ČÍSELNÉ ŘADY.....	48
8.1. Základní pojmy a vztahy.....	48
8.2 Úlohy.....	49
9 FUNKČNÍ ŘADY.....	51
9.1. Základní pojmy a vztahy.....	51
9.2 Úlohy.....	52
10 ÚVOD DO OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC.....	54
10.1. Základní pojmy a vztahy.....	54

Průběh funkce

10.2 Úlohy.....	55
ZÁVĚR.....	57
LITERATURA	58

ÚVODEM

Sbírka úloh z Matematiky v ekonomii je doplňkovou studijní oporou pro stejnojmenný předmět vyučovaný na Slezské univerzitě, Obchodně podnikatelské fakultě v prvním ročníku magisterského studia, který navazuje na předmět *Kvantitativní metody* vyučovaný v prvním ročníku bakalářského studia.

Sbírka úloh z Matematiky v Ekonomii poskytuje studentům téměř tři stovky úloh rozdílné obtížnosti k procvičení. Jejím obsahem jsou funkce jedné reálné proměnné, úvod do diferenciálního počtu jedné reálné proměnné, průběh funkce, reálná funkce dvou reálných proměnných, lokální a vázané extrémy funkce dvou proměnných, neurčitý a určitý integrál, a nekonečné číselné a funkční řady, s aplikacemi v ekonomii.

Ke všem úlohám jsou uvedeny výsledky a jednotlivé kapitoly jsou řazeny (pro lepší přehlednost) podobně jako v základní studijní opoře *Matematika v ekonomii* [1]. Na začátku každé kapitoly jsou uvedeny nejdůležitější pojmy, vztahy a vzorce, následují jednotlivé úlohy a jejich výsledky.

RYCHLÝ NÁHLED STUDIJNÍ OPORY

Sbírka úloh z Matematiky v ekonomii je rozdělena do deseti kapitol. Každá kapitola obsahuje na začátku nové pojmy, vzorce a vztahy potřebné k řešení úloh, následují tematicky řazené úlohy a jejich řešení včetně obrázků a grafů.

Stručná osnova studijní opory:

- Funkce jedné reálné proměnné
- Úvod do diferenciálního počtu jedné reálné proměnné
- Průběh funkce
- Reálná funkce dvou reálných proměnných
- Lokální a vázané extrémů funkce dvou proměnných
- Neurčitý integrál
- Určitý integrál
- Nekonečné číselné řady
- Nekonečné funkční řady
- Úvod do diferenciálních rovnic

1 PRŮBĚH FUNKCE

RYCHLÝ PŘEHLED



Obsahem této kapitoly jsou funkce jedné reálné proměnné, definiční obor funkce, obor hodnot, graf funkce, základní funkce.

CÍLE KAPITOLY



- Definovat pojem funkce jedné reálné proměnné.
- Zavést a vysvětlit nejdůležitější vlastnosti funkcí.
- Přestavit grafy základních funkcí.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY



Funkce, definiční obor funkce, obor hodnot funkce, graf funkce.

1.1. ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY

Funkci značíme písmenem $f(g, h, \dots)$, definiční obor funkce jako $D(f)$ nebo D_f a obor hodnot $H(f)$ nebo H_f . Funkční předpis se značí $y = f(x)$, například $y = x^2 + 1$. Proměnná x se nazývá *nezávislá proměnná (argument)*, proměnná y je *závislá proměnná*.

Definiční obor funkce $D(f)$: je množina všech x , pro něž má smysl funkční předpis $y = f(x)$. Smysl určování definičního oboru spočívá ve vymezení hodnot x , pro které je (respektive není) předpis $y = f(x)$ definován. V ekonomii platí, že většina veličin může nabývat pouze kladných hodnot, neboť například záporná poptávka, nabídka, cena nebo produkce postrádají ekonomický smysl.

Grafem funkce $y = f(x)$ nazýváme množinu všech bodů o souřadnicích $[x, f(x)]$, kde $x \in D(f)$. Grafem lineární funkce je přímka, kvadratické funkce parabola, nepřímé úměrnosti hyperbola, atd.

Polynomem (mnohočlenem) řádu n nazýváme výraz $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Je-li $n = 0$, je polynom roven konstantě a_0 ; je-li $n = 1$, je polynom lineární: $a_0 + a_1x$; pro $n = 2$ je

polynom kvadratický: $a_0 + a_1x + a_2x^2$, atd. *Nulovým bodem (kořenem)* polynomu je takové číslo x_0 , pro které platí $P_n(x) = 0$.



SAMOSTATNÝ ÚKOL

Zopakujte si grafy základních funkcí: lineární, kvadratické, mocninné, sinus a kosinus.

1.2. Úlohy

1.1 Určete definiční obor funkce:

a) $y = \sqrt{4x+8}$

b) $y = \sqrt{5-x}$

c) $y = \sqrt{x^2-9}$

d) $y = \log(2x-3)$

e) $y = \log(16-x^2)$

f) $y = \frac{3x+1}{x^2-4}$

g) $y = \sqrt{x^2-x-6}$

h) $y = \sqrt{4+2x} + \frac{1}{x+3}$

i) $y = \log(x^2+x)$

j) $y = \frac{6-x}{x^3-x^2}$

1.2. Nakreslete graf funkce:

a) $y = 2x+1$

b) $y = x-3$

c) $y = -x+4$

d) $y = x^2+1$

e) $y = x^2-4$

f) $y = 2^x$

g) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

h) $y = x^3$

i) $y = -x^2$

j) $y = -x^2+1$

1.3. Určete nulové body polynomu:

a) x^2+6x+8

b) x^3-2x^2-3x

c) $x^4 - 4x^2$

d) $x^4 - x^3$

e) $x^3 - x$

1.4. Načrtněte funkci poptávky a nabídky, a určete graficky i výpočtem bod rovnováhy:

a) $Q_D = 40 - 5P; Q_S = 8 + 3P$

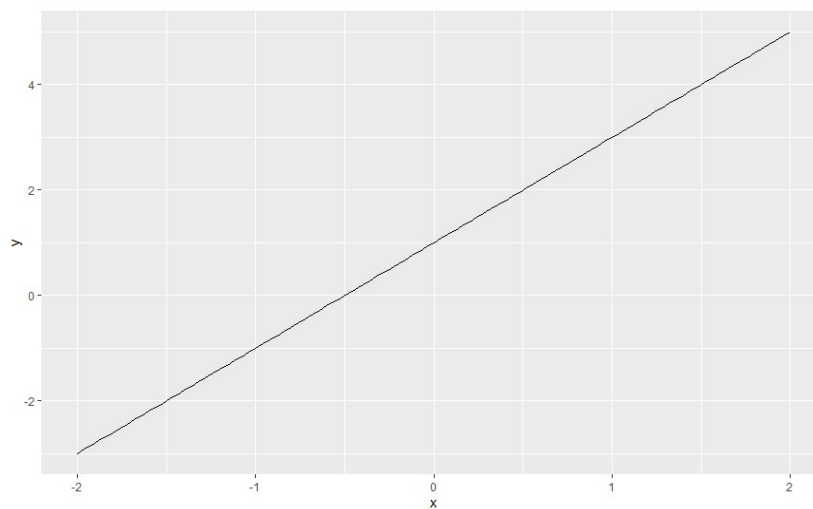
b) $Q_D = 100 - 2P; Q_S = 40 + P$

c) $Q_D = 250 - 8P; Q_S = 30 + 2P$

VÝSLEDKY

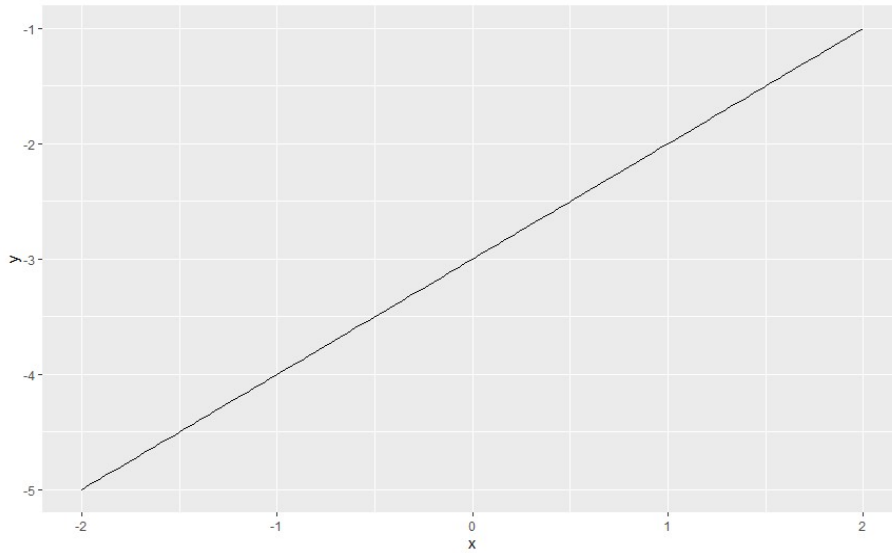


1.1. a) $\langle -2, \infty \rangle$, b) $\langle -\infty, 5 \rangle$, c) $\langle -\infty, 3 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$, d) $(3/2, \infty)$, e) $(-4, 4)$, f) $R - \{-2, +2\}$,
 g) $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$, h) $\langle -2, \infty \rangle$, i) $\langle -\infty, -1 \rangle \cup (0, \infty)$, j) $R - \{-1, +1\}$.

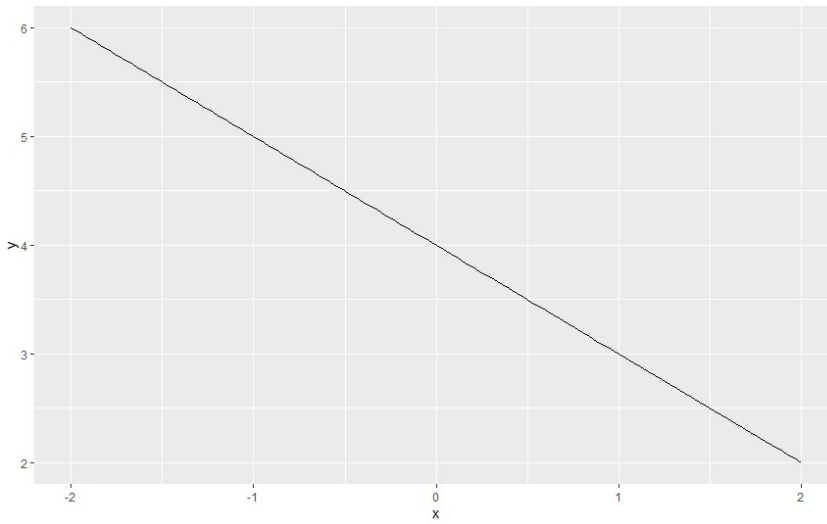


1.2. a)

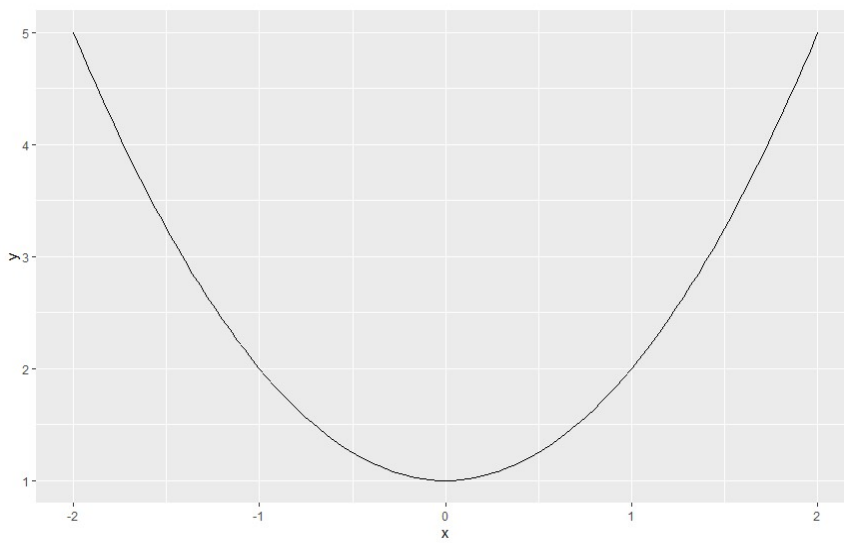
Průběh funkce



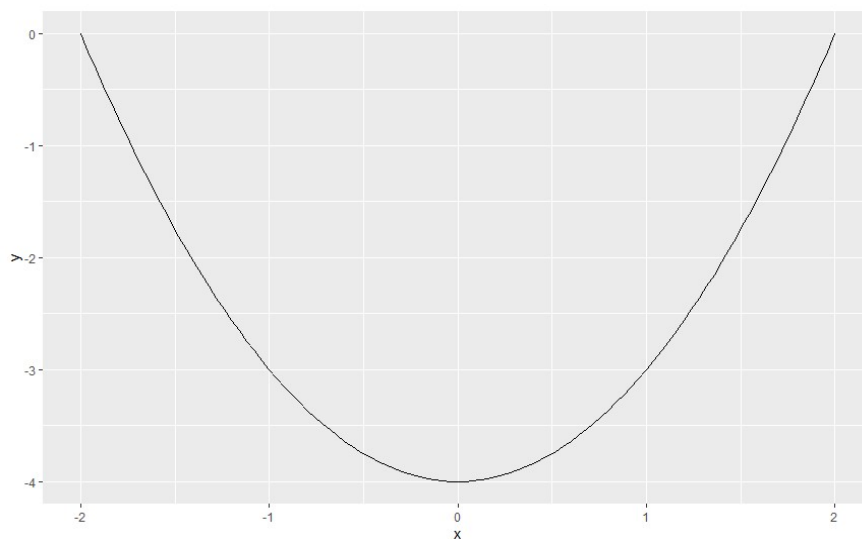
b)



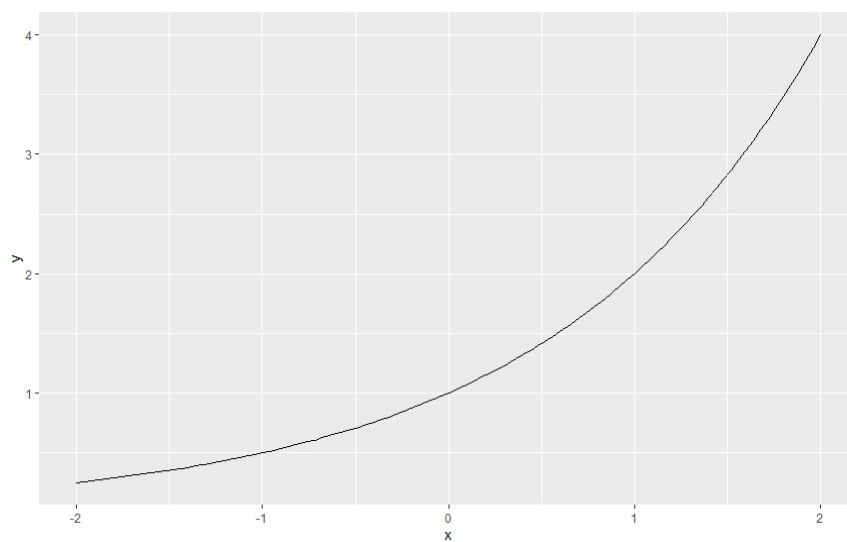
c)



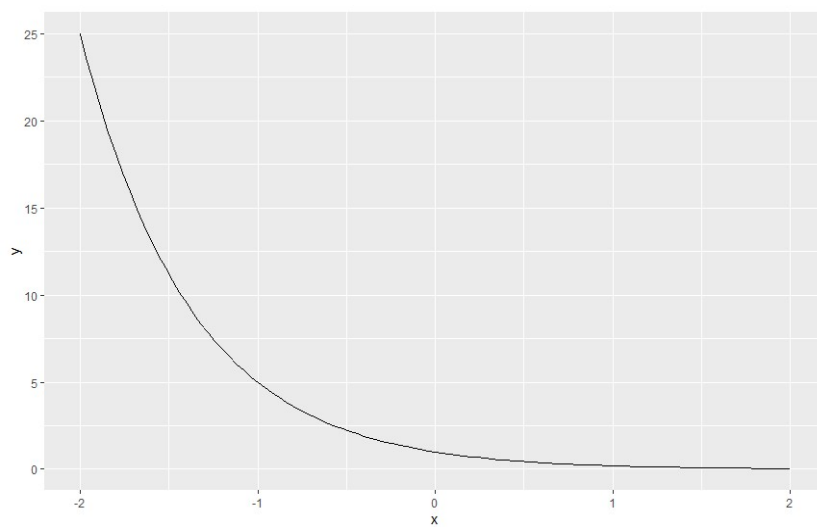
d)



e)

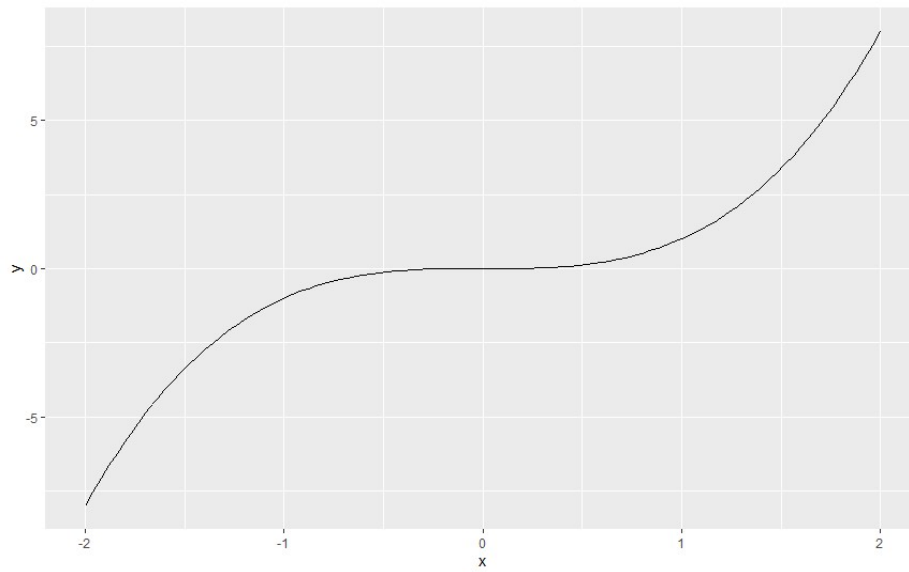


f)

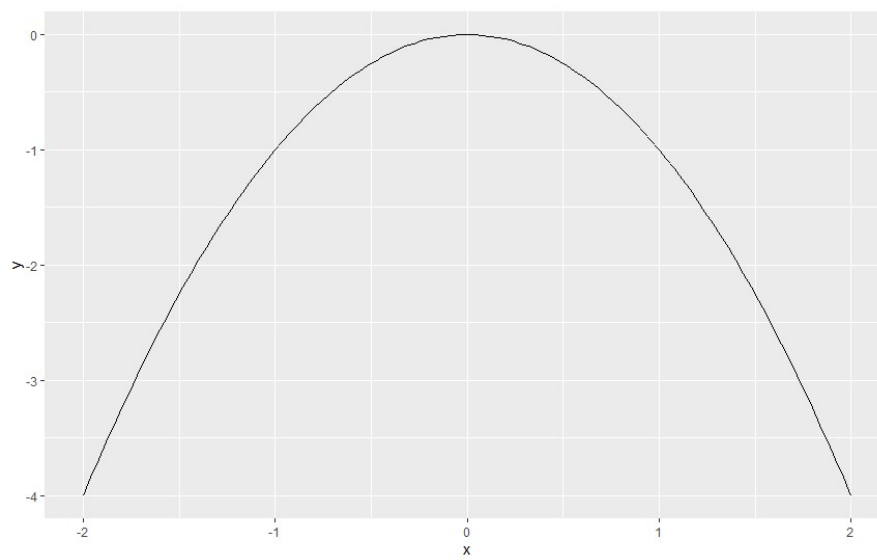


g)

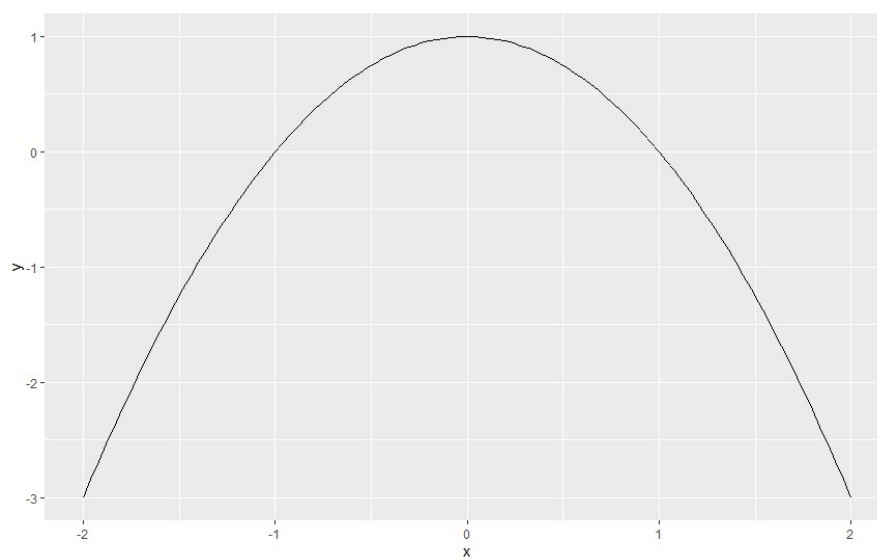
Průběh funkce



h)



i)



j)

1.3. a) $\{-4, -2\}$, b) $\{-1, 0, 3\}$, c) $\{-2, 0, 2\}$, d) $\{0, 1\}$, e) $\{0, 1\}$.

1.4. a) $P = 4$, $Q = 20$; b) $P = 20$, $Q = 60$, c) $P = 22$, $Q = 74$.

2 ÚVOD DO DIFERENCIÁLNÍHO POČTU JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ



RYCHLÝ NÁHLED

Obsahem této kapitoly je derivace funkce a její aplikace v ekonomii.



CÍLE KAPITOLY

- Definovat pojem derivace funkce.
 - Demonstrovat užití vztahů pro derivování základních funkcí.
 - Ukázat ekonomické aplikace derivace.
-



KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Funkce, derivace funkce, rostoucí funkce, klesající funkce, maximum funkce, minimum funkce.

2.1 ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY

Derivací funkce $f(x)$ rozumíme limitu:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y'$$

Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají derivaci na intervalu $J \subseteq R$. K výpočtu derivací součtu, rozdílu, součinu a podílu těchto funkcí používáme následující pravidla:

- $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$
- $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
- $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$\text{iv) } \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0$$

$$\text{v) } [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Pravidlo iii) se nazývá Pravidlo pro derivaci součinu funkcí, pravidlo iv) slouží k výpočtu derivace podílu funkcí, a konečně pravidlo v) je pravidlo pro derivaci složené funkce. K derivování elementárních funkcí používáme vzorce uvedené v Tabulce 2.1.

Některé funkce není možné derivovat pomocí pravidel uvedených v Tabulce 2.1. Typickým příkladem jsou funkce ve tvaru $y = f(x)^{g(x)}$, tedy funkce, v nichž se proměnná x nachází jak v základu mocniny, tak v exponentu. V takovém případě využijeme tzv. *logaritmickou derivaci*: funkci y nejprve logaritmujeme: $y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = \ln f(x)^{g(x)}$

$\Rightarrow \ln y = g(x) \ln f(x)$, a pak derivujeme:

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}$$

U některých funkcí nelze y vyjádřit jako funkci x . V takovém případě hovoříme o *implicitní funkci*. Derivace implicitní funkce je dána takto:

$$y'(C) = \frac{\frac{\partial f(C)}{\partial x}}{\frac{\partial f(C)}{\partial y}}$$

Složité funkce, které mají derivace až do n -tého řádu, můžeme přibližně nahradit (aproximovat) *Taylorovou řadou* (Taylorovým polynomem) stupně n v okolí zvoleného bodu a . Vyjádření funkce pomocí polynomu (mnohočlenu) je jednodušší a usnadňuje výpočty. V ekonomii se tento postup často používá například ke zjednodušení nelineárních funkcí na funkce lineární.

Taylorův polynom funkce $f(x)$ v bodě a je definován takto:

$$T_n(f, a, x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x),$$

kde $R_n(x)$ se nazývá *zbytek řady*.

Pokud zvolíme $a = 0$, dostaneme *Maclaurinovu řadu*:

$$T_n(f, 0, x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

Maclaurinův rozvoj vybraných funkcí je uveden v Tabulce 2.2 i s příslušným oborem konvergence odpovídající funkční řady.

Úvod do diferenciálního počtu jedné reálné proměnné

Diferenciálem funkce $y = f(x)$ nazýváme funkci $df(x) = f'(x) dx$. Diferenciál funkce závisí na x a dx , a vyjadřuje přibližně přírůstek funkce df při změně argumentu x o dx v bodě x . (Toto přibližné vyjádření je tím přesnější, čím menší je dx).

Elasticita funkce (pomocí první derivace) je definována následovně:

$$E(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x \Delta y}{y \Delta x} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} y'$$

Cenovou elasticitu poptávky, krátce elasticita poptávky (*price elasticity of demand*) definujeme takto:

$$E(P) = - \frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP}$$



K ZAPAMATOVÁNÍ

Podle hodnoty elasticity poptávky při dané ceně P rozlišujeme poptávku:

- elastickou, je-li $E(P) > 1$,
- jednotkově elastickou, je-li $E(P) = 1$,
- neelastickou, je-li $E(P) < 1$.

Cenová elasticita nabídky, krátce elasticita nabídky (*price elasticity of supply*) se definuje podobně jako cenová elasticita poptávky:

$$E(P) = \frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP},$$

kde $Q = S(P)$ je funkce nabídky. Protože funkce nabídky je rostoucí a P a Q jsou kladné, neobjevuje se ve vztahu znaménko mínus.

Mezní produkt práce (*marginal product of labour*) MP_L je derivace funkce produkce podle práce:

$$MP_L = \frac{dQ}{dL} = Q'(L)$$

Celkový příjem TR (*total revenue*) je součinem množství Q a ceny za jednotku množství P :

$$TR = Q \cdot P$$

Průměrný příjem *AR* (*average revenue*) je podíl celkového příjmu a množství:

$$AR = \frac{TR(Q)}{Q}$$

Mezní příjem *MR* (*marginal revenue*) je definován jako derivace celkového příjmu:

$$MR = \frac{dTR(Q)}{dQ}$$

Celkové náklady *TC* (*total cost*) jsou všechny náklady nutné pro realizaci *Q* jednotek. Celkové náklady lze rozložit na celkové variabilní náklady *TVC* (*total variable cost*) a fixní náklady *FC* (*fixed cost*):

$$TC(Q) = TVC(Q) + FC$$

Mezní náklady *MC* (*marginal cost*) jsou derivací celkových nákladů:

$$MC = \frac{dTC}{dQ}$$

Tabulka 2.1. Přehled derivací elementárních funkcí.

$f(x)$	$f'(x)$
konstanta	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Úvod do diferenciálního počtu jedné reálné proměnné

$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Tabulka 2.2. Mocninné rozvoje vybraných funkcí.

Funkce	Maclaurinův rozvoj	Obor konvergence
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$(-\infty, \infty)$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$(-\infty, \infty)$
e^x	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$(-\infty, \infty)$
$\ln(x+1)$	$x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots$	$(-1, 1)$

2.2 ÚLOHY

2.1. Derivujte elementární funkce:

a) $y = x^4 + 5x^3$

b) $y = 10x^8 + 1,$

c) $y = 2x^3 + 6x - 11$

d) $y = \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2},$

e) $y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}$

f) $y = 12 \ln x + 6 \log x,$

g) $y = 3 \sin x - 2 \cos x + \operatorname{tg} x$

h) $y = 10e^x + 5^x .$

2.2. Derivujte následující funkce:

a) $y = (2x + 1) \cdot e^x$

b) $y = x^4 \cdot \ln x ,$

c) $y = \cos x \cdot \ln x$

d) $y = \frac{\ln x}{x + 1},$

e) $y = \frac{x + 5}{x^2 + 1}$

f) $y = \frac{\cos x}{\sin x},$

g) $y = \ln(x^3 + 5x)$

h) $y = (x^2 + 6)^3,$

i) $y = \sin(4x + 5)$

j) $y = e^{x^2+4},$

k) $y = \frac{\ln x}{x^2}$

l) $y = \sqrt{4x + 6} .$

2.3. Určete derivace vyšších řádů:

a) $y = x^5$

b) $y = x^4 + 3x^2 - 6x + 12 ,$

c) $y = \ln x$

d) $y = \sin x ,$

e) $y = \sqrt{x} .$

2.4. Derivujte:

a) $y = x^{x+1}$

b) $y = x^{\ln x},$

c) $y = x^{\cos x}$

d) $y = (\sin x)^x .$

2.5. Derivujte:

Úvod do diferenciálního počtu jedné reálné proměnné

a) $5xy + \ln y + 4 = 0$

b) $x^2y + x \sin y - x = 0,$

c) $\ln(xy) + x^2 + y^2 = 0$

d) $\sin(x + y) + x^2y^2 - 12 = 0,$

e) $x^4 + 2xy + 16 = 0.$

2.6. Určete Maclaurinovu řadu funkce f :

a) $y = \sqrt{x+1}$

b) $y = 2^x$

c) $y = \cos x$

d) $y = \ln(x+1)$

e) $y = e^{2x}$

f) $y = e^x + x^2$

2.7. Určete Taylorovu řadu dané funkce f v daném bodě a :

a) $y = \sqrt{x}, a = 1$

b) $y = e^x, a = 1$

c) $y = \ln x, a = 1$

d) $y = \frac{1}{x}, a = 2.$

2.8. Určete elasticitu funkce:

a) $y = x^2$

b) $y = x^3,$

c) $y = 3x^2 - 4x$ v bodě $x = 2$

d) $y = x^3 + 5, x = 1$

e) $y = \ln x, x = 3$

f) $y = x^2 + 5x + 2, x = 1$

2.9. Určete cenovou elasticitu poptávky:

a) $Q(P) = 60 - 5P$

b) $Q(P) = 110 - 22P$

c) $Q(P) = 42 - 2P$

d) $Q(P) = 60 - 3P$

e) $Q(P) = 20 - P^2$

f) $Q(P) = 100 - 18P$

2.10. Určete cenovou elasticitu poptávky v daném bodě P :

a) $Q(P) = 60 - 5P, P = 5$

b) $Q(P) = 140 - 15P, P = 2,$

c) $Q(P) = 42 - 2P, P = 3$

d) $Q(P) = 60 - 3P, P = 5,$

e) $Q(P) = 40 - 2P^2, P = 3$

f) $Q(P) = 82 - 6P, P = 10.$

2.11. Určete mezní produkt práce (načrtněte křivku MP_L):

a) $Q(L) = L^2 + 3L + 5$

b) $Q(L) = 5L^3 + 16L$

c) $Q(L) = 20L^2 - L^3$

2.12. Určete mezní produkt práce pro danou hodnotu L:

a) $Q(L) = L^2 + 3L + 5, L = 2$

b) $Q(L) = 5L^3 + 16L, L = 10$

c) $Q(L) = 20L^2 - L^3, L = 1$

2.13. Vypočtěte mezní náklady $MC(Q)$, jsou-li dány celkové náklady:

a) $TC(Q) = Q^3 + 16Q + 250$

b) $TC(Q) = 4Q^2 + \frac{100}{Q},$

2.14. Najděte maximum zisku pro funkci celkového příjmu $TC(Q) = -Q^2 + 14Q + 250$.

2.15. Vypočtěte diferenciál funkce:

a) $y = x^2, x = 2, dx = 0,1.$

b) $y = x^3 + x, x = 1, dx = 0,2.$

c) $y = 6 \ln x, x = 2, dx = 0,1.$

d) $y = x^2 + 8x - 4, x = 3, dx = 0,1.$

VÝSLEDKY



2.1. a) $4x^3 + 15x^2$, b) $80x^7$, c) $6x + 6$, d) $-\frac{4}{x^2} - \frac{6}{x^3}$, e) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, f) $\frac{12}{x} + \frac{6}{x \ln 10}$,

g) $3\cos x + 2\sin x + 1/\cos^2 x$, h) $10e^x + 5^x \ln 5$.

2.2. a) $(2x + 3)e^x$, b) $4x^3 \ln x + x^3$, c) $(\ln x)^2 + \frac{\cos x}{x}$, d) $\frac{(x+1)\frac{1}{x} - \ln x}{(x+1)^2}$, e)

$\frac{-x^2 - 10x + 1}{(x^2 + 1)^2}$, f) $-\frac{1}{(\sin x)^2}$, g) $\frac{3x^2 + 5}{x^3 + 5x}$, h) $6x(x^2 + 6)^2$, i) $4 \cos(4x + 5)$, j) $2xe^{x^2+4}$,

k) $\frac{x - 2x \ln x}{x^4}$, l) $\frac{2}{\sqrt{4x + 6}}$.

2.3. a) $y' = 5x^4; y'' = 20x^3; y''' = 60x^2$, b) $y' = 4x^3 + 6x - 6; y'' = 12x^2 + 6; y''' = 24x$,

c) $y' = \frac{1}{x}; y'' = -\frac{1}{x^2}; y''' = \frac{2}{x^3}$, d) $y' = \cos x; y'' = -\sin x; y''' = -\cos x$,

Úvod do diferenciálního počtu jedné reálné proměnné

e) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}; y''' = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$.

2.4. a) $x^{x+1}(\ln x + \frac{x+1}{x})$, b) $x^{\ln x}(\frac{2}{x} \ln x)$, c) $x^{\cos x}(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x})$,

d) $(\sin x)^x(\ln x + x \cot gx)$.

2.5. a) $-\frac{5y}{5x + \frac{1}{y}}$, b) $-\frac{2xy + \sin y - 1}{x^2 + x \cos x}$, c) $-\frac{\frac{1}{x} + 2x}{\frac{1}{y} + 2y}$, d) $-\frac{\cos(x+y) + 2xy^2}{\cos(x+y) + 2x^2y}$,

e) $-\frac{4x^3 + 2y}{2x}$.

2.6. a) $\sqrt{x+1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$, b) $2^x = 1 + \ln 2 \cdot x + \frac{(\ln 2)^2}{2}x^2 + \frac{(\ln 2)^3}{6}x^3 + \dots$,

c) $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots$, d) $\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \dots$,

e) $e^x + x^2 = 1 + x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$

2.7. a) $T(\sqrt{x}, a=1) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + \dots$,

b) $T(e^x, a=1) = 1 + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3 + \dots$, c)

$T(\ln x, a=1) = +(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \dots$, d)

$T(1/x, a=2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \dots$

2.8. a) 2, b) 3, c) 4, d) $\frac{1}{2}$, e) $1/\ln 3$, f) $7/8$.

2.9. a) $\frac{5P}{60-5P}$, b) $\frac{22P}{110-22P}$, c) $\frac{2P}{42-2P}$, d) $\frac{3P}{60-3P}$, e) $\frac{4P^2}{40-2P^2}, \frac{18P}{100-18P}$.

2.10. a) 0,714, b) 0,273, c) $1/6$, d) $1/3$, e) 1,636, f) 2,727.

2.11. a) $2L + 3$, b) $15L^2 + 16$, c) $40L - 3L^2$.

2.12. a) 7, b) 1516, c) 37.

2.13. a) $3Q^2 + 16Q$, b) $8Q - 100/Q^2$

2.14. $Q = 7$.

2.15. a) 0,4, b) 0,8, c) 0,05, d) 1,4.

3 PRŮBĚH FUNKCE



RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Kapitola je věnována určování vlastností funkce – průběhu funkce, který mimo jiné zahrnuje nalezení definičního oboru funkce, lokálních extrémů nebo intervalů monotónnosti, a také načrtnutí grafu funkce.



CÍLE KAPITOLY

Cílem kapitoly je naučit se určovat průběh funkce pomocí předdefinované desetibodové osnovy.



ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

3 hodiny



KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Průběh funkce, lokální extrémů, intervaly monotónnosti, graf.



SHRNUTÍ KAPITOLY

3.1. ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY

Určit *průběh funkce* znamená určit její vlastnosti. Při určování průběhu funkce obvykle postupujeme podle následující osnovy:

1. $D(f)$, sudost, lichost, periodičnost.
2. Limity (jednostranné) v bodech nespojitosti a v nevlastních bodech.
3. Průsečíky s osami x a y , znaménka funkčních hodnot.
4. První derivace, její nulové body.
5. Lokální extrémů a intervaly monotónnosti.
6. Druhá derivace a její nulové body.
7. Inflexní body, konkávnost, konvexnost.
8. Asymptoty.
9. Omezenost funkce, $H(f)$.
10. Graf funkce.

3.2 ÚLOHY

3.1. Určete lokální extrémů funkce:

a) $y = x^2 - 6x + 5$

b) $y = 2x^2 + 18x + 35$

c) $y = 2x^3 - x^2$

d) $y = e^x$

e) $y = \frac{1}{x}$

f) $y = \ln x - x$

g) $y = x \cdot e^x$

h) $y = x \cdot \ln x$

i) $y = \frac{x}{\ln x}$

j) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

k) $y = 3^x$

3.2. Určete konvexnost a konkávnost funkce:

a) $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 3$

b) $y = \frac{1}{x}$

c) $y = x^4 - 16x^2$

d) $y = e^x$

e) $y = x^2 - 6x + 3$

f) $y = \ln x$

3.3 Určete průběh funkce a nakreslete graf:

a) $y = x^2 e^x$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 8$

c) $y = 12x - x^3$

d) $y = x \ln x$

e) $y = x^4 - 4x^3$



VÝSLEDKY

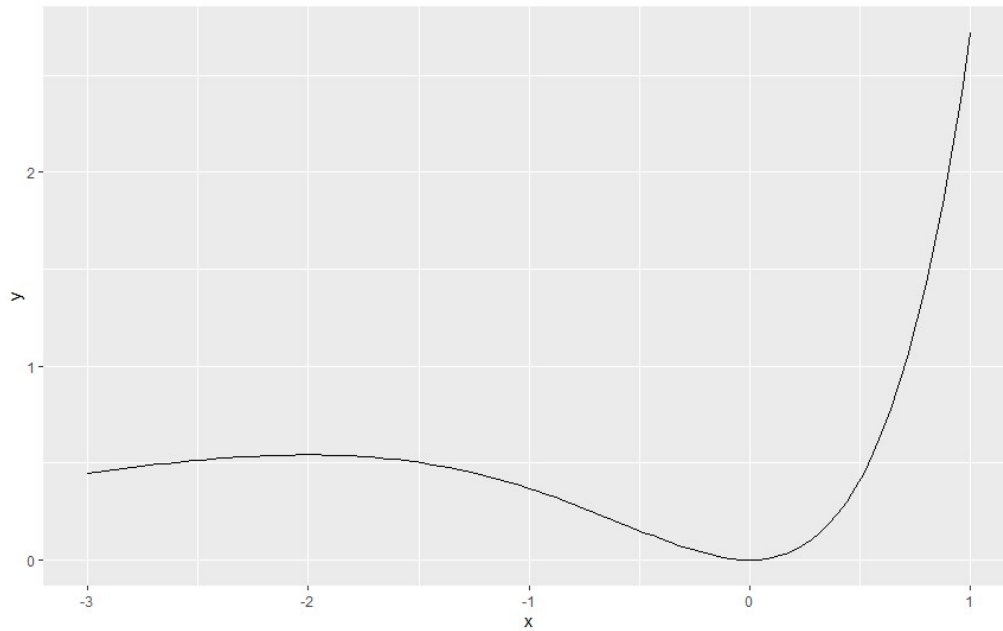
3.1. a) $x = 3$, MAX; b) $x = -4,5$, MIN; c) $x = 0$, MAX, $x = 1/3$, MIN; d) nejsou, e) nejsou, f) $x = 1$, MAX; g) $x = -1$, MIN; h) $x = 1/e$, MIN; i) $x = e$, MIN, j) $x = 0$ MIN, k) nejsou.

3.2. a) funkce je pro $x \in (-\infty, 2/3)$ konkávní a pro $x \in (2/3, \infty)$ konvexní, b) funkce je pro $x \in (-\infty, 0)$ konkávní a pro $x \in (0, \infty)$ konvexní, c) funkce je na intervalu

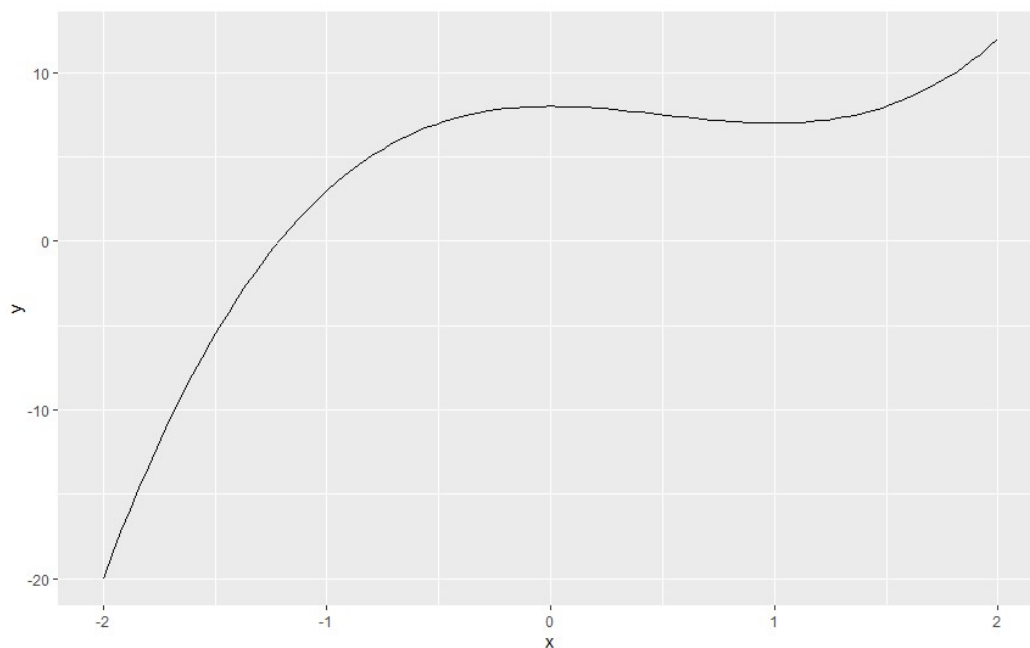
$x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{8}{3}})$ konvexní, na intervalu $x \in (-\sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}})$ konkávní a na intervalu $x \in (\sqrt{\frac{8}{3}}, \infty)$

konvexní, d) funkce je konvexní na celém definičním oboru, e) funkce je konvexní na celém definičním oboru, f) funkce je konkávní na celém definičním oboru.

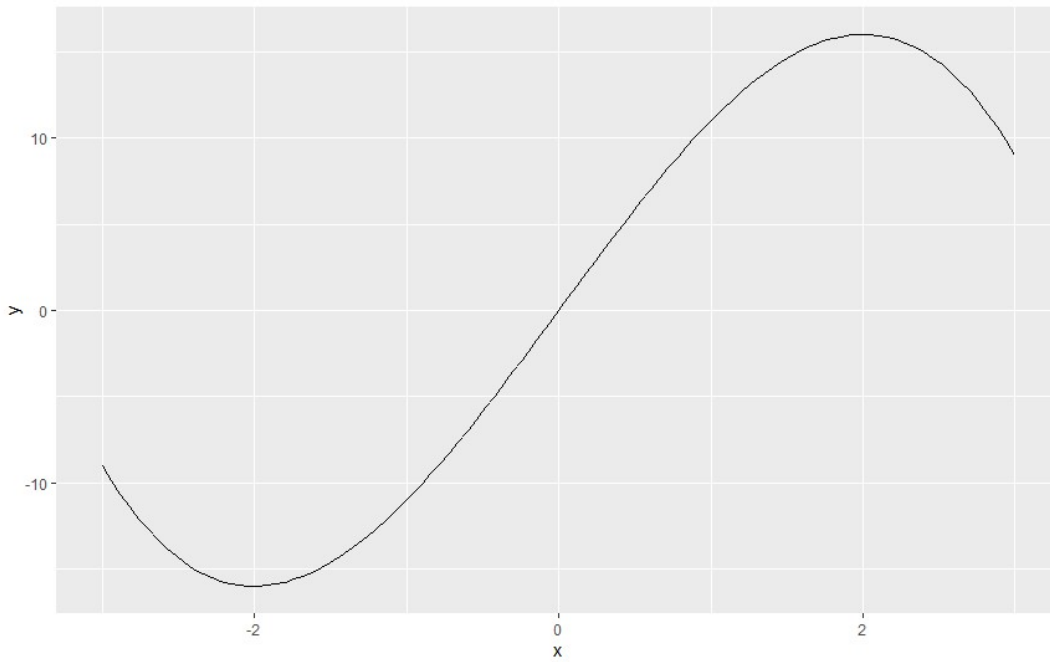
3.3. a) $D(f) = \mathbb{R}$, ani sudá, ani lichá, ani periodická, průsečíky s osami: $[0,0]$, $H(f) = \mathbb{R}^+$, maximum: $[-2, 4/e^2]$, minimum: $[0,0]$, $x \in (-\infty, -2)$: rostoucí, $x \in (-2, 0)$: klesající, $x \in (0, \infty)$: rostoucí, inflexní body: $[-2, \sqrt{2}]$, $[-2, -\sqrt{2}]$, $x \in (-\infty, -2 - \sqrt{2})$: konvexní, $x \in (-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2})$: konkávní, $x \in (-2 + \sqrt{2}, \infty)$: konvexní, asymptoty: osa x .



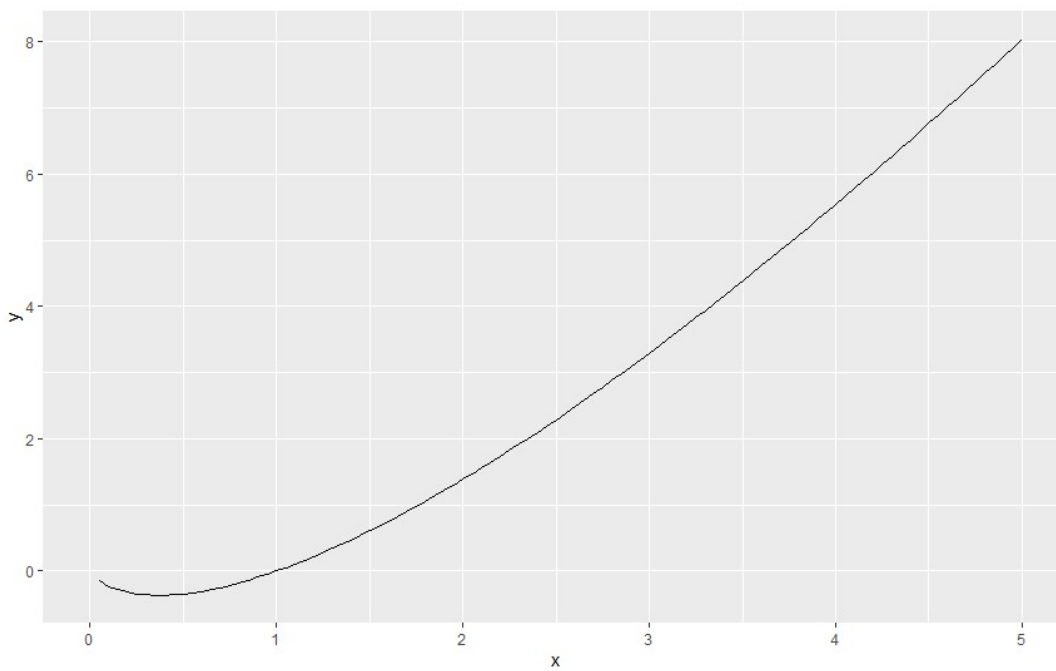
b) $D(f) = \mathbb{R}$, ani sudá, ani lichá, ani periodická, průsečíky s osami: $[0,8]$ (průsečíky s osou x vypočítat neumíme), $H(f) = \mathbb{R}$, maximum: $[0,8]$, minimum: $[1,7]$, $x \in (-\infty, 0)$: rostoucí, $x \in (0,1)$: klesající, $x \in (1, \infty)$: rostoucí, inflexní bod: $x = 1/2$, $x \in (-\infty, 1/2)$: konkávní, $x \in (1/2, \infty)$: konvexní, asymptoty: nejsou.



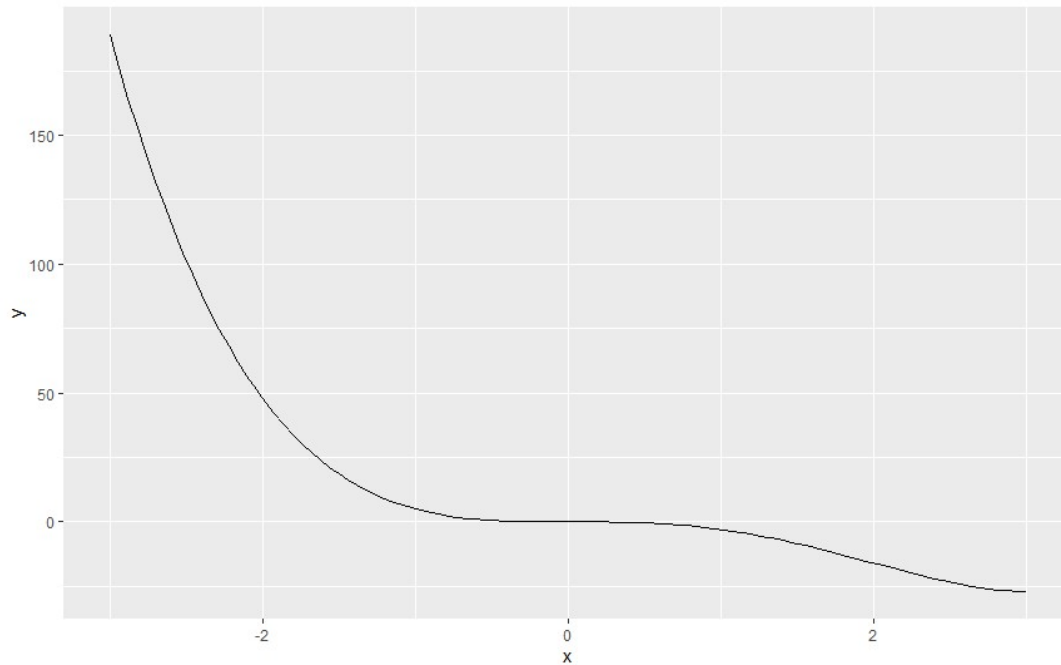
c) $D(f) = \mathbb{R}$, ani sudá, ani lichá, ani periodická, průsečíky s osami: $[0,0]$, $[-\sqrt{12}, 0]$, $[\sqrt{12}, 0]$, $x = -2$: MIN, $x = 2$: MAX, $x \in (-\infty, -2)$: klesající, $x \in (-2, 2)$: rostoucí, $x \in (2, \infty)$: rostoucí, $x = 0$: inflexní bod, $x \in (-\infty, 0)$: konvexní, $x \in (0, \infty)$: konkávní, asymptoty nejsou, $H(f) = \mathbb{R}$.



d) $D(f) = (0, \infty)$, ani sudá, ani lichá, ani periodická, průsečíky s osami: $[1, 0]$, $x = 1/e$:
 MIN, $x \in (0, 1/e)$: klesající, $x \in (1/e, \infty)$: rostoucí, funkce je na celém definičním oboru
 konvexní, nemá asymptoty, $D(f) = (-1/e, \infty)$.



e) $D(f) = \mathbb{R}$, ani sudá, ani lichá, ani periodická, průsečíky s osami: $[0,0]$ a $[4,0]$, $x = 3$:
MIN, $x \in (-\infty, 3)$: klesající, $x \in (3, \infty)$: rostoucí, inflexní body: $x = 0$ a $x = 2$, $x \in (-\infty, 0)$:
konvexní, $x \in (0, 2)$: konkávní, $x \in (2, \infty)$: konvexní, asymptoty nejsou, $H(f) = (-27, \infty)$.



4 REÁLNÁ FUNKCE DVOU REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH



RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Kapitola je věnována úvodu do reálných funkcí dvou reálných proměnných. Zaměřuje se především na určení definičního oboru, výpočtu první a druhé parciální derivace, výpočtu totálního diferenciálu, a aplikace v ekonomii na příkladu Cobb-Douglasovy funkce.



CÍLE KAPITOLY

Zavést funkci dvou reálných proměnných.

Naučit se graficky určovat definiční obor funkce dvou reálných proměnných.

Zavést první a druhé parciální derivace funkce.

Zavést totální diferenciál.

Využít parciální derivace v aplikaci na Cobb-Douglasovu produkční funkci.



KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Funkce dvou reálných proměnných, derivace funkce, Cobb-Douglasova produkční funkce.

4.1. ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY

Definičním oborem funkce $f(x, y)$ proměnných x a y rozumíme všechny uspořádané dvojice $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, pro které má daná funkce smysl. Definiční obor obvykle znázorňujeme graficky v pravoúhlé soustavě souřadnic jako (vyšrafovanou) část roviny.

Pro parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x respektive y užíváme následující značení:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, f'_x(x, y), f'_x, \text{ respektive } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, f'_y(x, y), f'_y$$

Při výpočtu parciální derivace podle x postupujeme tak, že y považujeme za konstantu (pouze ji opisujeme) a funkci $f(x, y)$ derivujeme podle x . Při výpočtu parciální derivace podle y postupujeme přesně opačně.

Druhé parciální derivace značíme takto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

U smíšené derivace nezáleží na pořadí derivování, platí tedy: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Totálním diferenciálem (prvního řádu) funkce dvou proměnných $f(x, y)$ v bodě $C = [c_1, c_2, c_3]$ nazýváme výraz:

$$df(C) = \frac{\partial f}{\partial x}(C)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(C)dy$$

Stejně jako u funkce jedné proměnné vyjadřuje totální diferenciál dvou proměnných (přibližně) přírůstek funkce $f(x, y)$ spojený s malým přírůstkem proměnné x (první člen na pravé straně přechozího vztahu) a malým přírůstkem proměnné y (druhý člen na pravé straně).

Cobb-Douglasova¹ produkční funkce udává závislost produkce Q na práci L a kapitálu K :

$$Q = AK^a L^b$$

K ZAPAMATOVÁNÍ



Podle hodnoty $a + b$ říkáme o produkční funkci, že má:

- konstantní výnosy z rozsahu, je-li $a + b = 1$
- rostoucí výnosy z rozsahu, je-li $a + b > 1$
- klesající výnosy z rozsahu, je-li $a + b < 1$.

¹ Charles Cobb (1875-1949), americký ekonom, Poul Douglas (1892-1976), americký ekonom.

Pokud je $a + b = 1$, lze vztah pro produkci Q upravit následovně:

$$Q = AK^a L^{1-a}$$

Mezní produkt práce (marginal product of labour) MP_L je derivace funkce produkce podle práce:

$$MP_L = \frac{dQ}{dL} = Q'(L)$$

Podobně jako mezní produkt práce se zavádí mezní produkt kapitálu:

$$MP_K = \frac{dQ}{dK} = Q'(K)$$

4.2 ÚLOHY

4.1. Určete definiční obor funkcí dvou proměnných:

a) $f(x, y) = \sqrt{x + y - 1}$

b) $f(x, y) = \sqrt{x - 4} + y$

c) $f(x, y) = \sqrt{y + 3}$

d) $f(x, y) = \ln(y - x)$

e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 16}$

f) $f(x, y) = \ln(y - x^2)$

g) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 9)$

h) $f(x, y) = \sqrt{x + y} - \sqrt{x + 1}$

4.2. Vypočtěte parciální derivace funkce.

a) $f(x, y) = x^2 + 3y^2$

b) $f(x, y) = 4x^2 - 2y^2 + 5x - 2y + 8$

c) $f(x, y) = x^3 + 2xy^2$

d) $f(x, y) = x \ln y$

e) $f(x, y) = x^2 + ye^x + 5y$

f) $f(x, y) = \ln(xy)$

g) $f(x, y) = x \sin(xy) + e^y$

4.3. Vypočtěte všechny druhé parciální derivace funkcí.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

b) $f(x, y) = 2x^3 - 8y + x$

c) $f(x, y) = 6x^2 + ye^x + 5y$

d) $f(x, y) = 10x^2 y^2$

4.4. Vyjádřete totální diferenciál funkce:

a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

b) $f(x, y) = 4x^2 y^2$

c) $f(x, y) = \ln x + \ln y$

d) $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + 5x + 6$

e) $f(x, y) = x^4 - 5y^2$

4.5. Určete přírůstek funkce pomocí totálního diferenciálu:

a) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, $C[1,1]$, $dx = 0,1$; $dy = 0,2$.

b) $f(x, y) = 2x + 6y^3 + 5$, $C[1,2]$, $dx = 0,1$; $dy = 0,1$.

c) $f(x, y) = xy^2 + 3x + 1$, $C[2,2]$, $dx = 0,1$; $dy = 0,3$.

4.6. Určete přírůstek produkční funkce:

a) $Q(K, L) = 6K^{0.5}L^{0.5}$, $C[4,9]$, $dK = 0,2$; $dL = 0,1$.

b) $Q(K, L) = 14K^{0.5}L^{0.5}$, $C[1,4]$, $dK = 0,2$; $dL = 0,3$.

c) $Q(K, L) = 100K^{0.3}L^{0.7}$, $C[1,1]$, $dK = 0,4$; $dL = 0,2$.

4.7. Vypočítejte mezní produkt práce MP_L a kapitálu MP_K :

a) $Q(K, L) = 18K^{0.6}L^{0.4}$

b) $Q(K, L) = 60K^{0.8}L^{0.2}$

c) $Q(K, L) = 50K^{0.5}L^{0.5}$

4.8. Vypočítejte (přibližně) mezní produkt práce a kapitálu v daném bodě:

a) $Q(K, L) = 18K^{0.6}L^{0.4}$, $K = 1$, $L = 9$.

b) $Q(K, L) = 60K^{0.8}L^{0.2}$, $K = 5$, $L = 7$.

c) $Q(K, L) = 50K^{0.5}L^{0.5}$, $K = 10$, $L = 15$.



VÝSLEDKY



4.2. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 6y$, b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 8x + 5$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -4y - 2$, c) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy$,

d) $\frac{\partial f}{\partial x} = \ln y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y}$, e) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + ye^x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^x + 5$, f) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}$, g)

$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(xy) + xy \cos(xy)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos(xy) + e^y$

4.3. a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8y^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 16xy$, c)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12 + ye^x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^x$, d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 20y^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 20x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 40xy$.

4.4. a) $df = 2xdx + 4ydy$, b) $df = 8xy^2dx + 8x^2ydy$, c) $df = \frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy$, d)

$df = (2x + 2y^2 + 5)dx + 4xydy$, e) $df = 4x^3dx + -10ydy$

4.5. a) $df = 1,8$; b) $df = 7,4$; c) $df = 2,3$.

4.6. a) 1,1,

4.7. a) $MP_L = 7,2K^{0,6}L^{-0,6}$, $MP_K = 10,8K^{-0,4}L^{0,4}$, b) $MP_L = 12K^{0,8}L^{-0,8}$, b)

$MP_K = 48K^{-0,2}L^{0,2}$, c) $MP_L = 25K^{0,5}L^{-0,5}$, $MP_K = 25K^{-0,5}L^{0,5}$.

4.8. a) $MP_L = 1,93$, $MP_K = 26$, b) $MP_L = 9,17$, $MP_K = 51,34$, c) $MP_L = 20,41$, $MP_K = 30,62$.

5 LOKÁLNÍ A VÁZANÉ EXTRÉMY FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY



Kapitola se věnuje problematice nalezení lokálních a globálních extrémů, tedy maxima a minima funkce dvou reálných proměnných.

CÍLE KAPITOLY



Demonstrovat nalezení extrémů funkce dvou reálných proměnných

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY



Funkce dvou proměnných, lokální extrém, globální extrém, vázaný extrém.

5.1. ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY

Podobně jako u funkce jedné reálné proměnné je *nutnou podmínkou* lokálního (a samozřejmě i globálního) maxima či minima nulová první derivace: $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$.

Tato podmínka však není postačující, neboť v daném bodě může být i inflexní (sedlový) bod.

Bod, v němž má funkce všechny první derivace nulové, se nazývá *stacionární bod* nebo též *bod podezřelý z extrému*, a bude značen C (z anglického *critical point*). Jak už bylo řečeno, je v tomto bodě maximum, minimum nebo inflexní bod. O tom, která alternativa nastává, rozhodneme na základě druhých parciálních derivací, z nichž sestavíme Hesseovu² matici a její determinant zvaný *hessián*:

² Ludwig Otto Hesse (1811-1874), německý matematik.

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Do hessiánu dosadíme souřadnice bodu C a označíme: $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C)$ a $D_2 = H_f(C)$. D_2 je determinant Hesseovy matice.



K ZAPAMATOVÁNÍ

Pro určení extrému pak platí následující pravidlo:

- $D_2 > 0$: v bodě C je EXTRÉM, a to (lokální ostré) MINIMUM, pokud je $D_1 > 0$; a (lokální ostré) MAXIMUM, pokud je $D_1 < 0$.
- $D_2 < 0$: v bodě C je sedlo (inflexní bod).
- $D_2 = 0$: v daném bodě může (ale nemusí) být extrém, o extrému se musí rozhodnout jiným způsobem, například pomocí totálního diferenciálu druhého či vyššího řádu.

Vázané extrémy označují situaci, kdy kromě funkce $f(x, y)$ je ještě zadána *vazba* (omezuující podmínka pro x a y) ve tvaru $g(x, y) = 0$. Hledáme extrémy funkce $f(x, y)$, které jsou vázány (leží na ní) křivkou $g(x, y) = 0$. Postupujeme dosazovací metodou nebo Lagrangovou metodou neurčitých multiplikátorů.

5.2 ÚLOHY

5.1 Najděte extrémy funkce dvou proměnných:

- a) $f(x, y) = 2x^2 - 10y^2 + 4x$
- b) $f(x, y) = 3x^2 + 10y^2 - 12x - 40y + 5$
- c) $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 10x + 50y + 200$
- d) $f(x, y) = 2x^2 + xy - 9y + 5$
- e) $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + y^2 + 2y + 5$

f) $f(x, y) = x^3 - 12x + 4y^2$

5.2. Najděte vázané extrémů funkce:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) : x + y - 1 = 0$

b) $f(x, y) = 10x^2 + y^2$, $g(x, y) : y = x - 2$

c) $f(x, y) = 4xy + 5$, $g(x, y) : y = x - 1$

d) $f(x, y) = ye^x + 4$, $g(x, y) : y = x + 3$

5.3. Maximalizujte příjem $TR(x, y) = -5x^2 + 40x - 4y^2 + 160y + 200$.

5.4. Minimalizujte náklady: $TC(x, y) = 10x^2 - 120x + 40y^2 - 1200y + 2000$

5.5. Maximalizujte příjem $TR(x, y) = -x^2 + 20x - y^2 + 22y + 1600$ za podmínky $x + y = 5$



VÝSLEDKY



5.1. a) C [-1,0] inflexní bod, b) C [2,2] minimum, c) C [5,25] maximum, d) C [9,-36] inflexní bod, e) C [0,-1] inflexní bod a C [1,-1] minimum, f) C [2,0] minimum a C [-2,0] inflexní bod.

5.2. a) [1/2,1/2] minimum, b) [1/11,-21/11] minimum, c) [1/2,1/2] minimum, d) [-4,-1] minimum.

5.3. Bod [4,20] je maximum příjmu.

5.4. Bod [6,15] je minimum nákladů.

5.5. Bod [2,3] je maximum příjmu.



6 NEURČITÝ INTEGRÁL



RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Kapitola je věnována úvodu do neurčitého integrálu, seznámení se základními pojmy a vztahy, a také ekonomickými aplikacemi.



CÍLE KAPITOLY

Zavést neurčitý integrál.

Seznámit se se základními vztahy a způsoby integrace

Demonstrovat užití neurčitého integrálu v ekonomii.



KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Neurčitý integrál, primitivní funkce.

6.1. ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY

Funkce $F(x)$ se nazývá *primitivní funkcí* k funkci $f(x)$ na otevřeném intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$ právě tehdy, když $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in J$. Primitivní funkce existuje ke každé spojitě funkci na J . Množina všech primitivních funkcí k dané funkci $f(x)$ se označuje jako *neurčitý integrál* k funkci $f(x)$, a značí se takto:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

kde \int je integrační znak,

x integrační proměnná,

$f(x)$ integrovaná funkce neboli integrand,

$F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$,

C integrační konstanta.

Neurčitý integrál je lineární operátor, což znamená, že splňuje následující dvě podmínky:

$$i) \int kf(x)dx = k \int f(x)dx,$$

$$ii) \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Integrály základních funkcí jsou uvedeny v Tabulce 6.1.

Integraci součinu funkcí provádíme metodou *per partes* (latinsky „po částech“).

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

Racionální funkce rozkládáme na parciální zlomky.

Při integraci složitějších funkcí používáme substituce.

K ZAPAMATOVÁNÍ



Substituci provádíme typicky v těchto případech:

- Je-li v integrálu složená funkce (v závorce), pak nahrazujeme vnitřní funkci (tedy onu závorku),
- Je-li v integrálu odmocnina, pak nahrazujeme celou odmocninu nebo výraz pod odmocninou,
- Jsou-li v integrálu různé goniometrické funkce, pak provedeme substituci tak, abychom dostali buď jednu goniometrickou funkci, nebo racionální funkci bez goniometrických funkcí.

Funkce *celkových nákladů* $TC(x)$ a funkce *mezních nákladů* $MC(x)$, kde x je počet výrobků, spolu souvisejí vztahem:

$$TC(x) = \int MC(x)dx + C$$

Předchozí vztah říká, že celkové náklady jsou součtem mezních nákladů. Integrační konstanta C se určí z jedné známé hodnoty $TC(x)$ pro dané x .

Celkové příjmy $TR(x)$ a *mezní příjmy* $MR(x)$:

$$TR(x) = \int MR(x)dx + C$$

Tabulka 6.1. Základní integrály.

řádek	$f(x)$	$\int f(x)dx$
1	0	C
2	1	$x + C$
3	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
4	e^x	$e^x + C$
5	$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
6	$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a} \ln ax+b + C$
7	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
8	$\sin x$	$-\cos x + C$
9	$\cos x$	$\sin x + C$
10	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
11	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{cotg} x + C$
12	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
13	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
14	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsin} x + C$
15	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arccos} x + C$
16	$\frac{1}{\sqrt{1\pm x^2}}$	$\ln x+\sqrt{1\pm x^2} + C$

6.2 ÚLOHY

6.1. Vypočtěte:

a) $\int x^4 dx$

b) $\int (x^2 + x^3) dx$

c) $\int 10x^5 dx$

d) $\int (x^2 + 6x - 4) dx$

e) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

f) $\int \left(\frac{6}{x} + \frac{4}{x^3}\right) dx$

g) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$

h) $\int (5e^x + 3^x) dx$

i) $\int (3\sin x + 2\cos x) dx$

6.2 Vypočtěte (metoda per partes):

a) $\int x \sin x dx$

b) $\int x^2 e^x dx$

c) $\int x^4 \ln x dx$

d) $\int (x^2 + 6x) \sin x dx$

e) $\int (2x + 4) \cos x dx$

6.3. Vypočtěte (použijte substituci):

a) $\int \sin(4x + 5) dx$

b) $\int (2x + 8)^3 dx$

c) $\int \sqrt{2x - 8} dx$

d) $\int 2x \sqrt{x^2 + 1} dx$

e) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

f) $\int \frac{1}{e^x} dx$

g) $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$

h) $\int \sin x \cdot \cos^5 x dx$

i) $\int e^{3x-5} dx$

j) $\int (3x + 1)^4 dx$

6.4. Vypočtěte (použijte rozklad na parciální zlomky):

a) $\int \frac{8x}{x^2 + 2x - 3} dx$

b) $\int \frac{8x - 3}{x^2 - 3x} dx$

c) $\int \frac{4x^2 + x - 2}{x^3 - x^2} dx$

d) $\int \frac{4x + 9}{x^2 + x - 12} dx$

e) $\int \frac{7x + 27}{x^2 + 6x + 5} dx$

**VÝSLEDKY**

6.1. a) $\frac{x^5}{5} + C$, b) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + C$, c) $\frac{5x^6}{3} + C$, d) $\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 4x + C$, e) $\ln|x| - \frac{1}{x} + C$, f)

6 $\ln|x| - \frac{2}{x^2} + C$, g) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C$, h) $5e^x + \frac{3^x}{\ln 3} + C$, i) $-3\cos x + 2\sin x + C$

6.2. a) $-x \cos x + \sin x + C$, b) $x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$, c) $\frac{x^5}{5} \ln|x| - \frac{x^5}{25} + C$, d)

$-\cos x(x^2 + 6x) - (2x + 6)\sin x - 2\cos x + C$

6.3. a) $-\frac{\cos(4x + 5)}{4} + C$, b) $\frac{(2x + 8)^4}{8} + C$, c) $\frac{2\sqrt{(2x - 8)^3}}{3} + C$, d) $\frac{2\sqrt{(x^2 + 1)^3}}{3} + C$, e)

$\frac{(\ln x)^3}{3} + C$, f) $\ln|e^x| + C$, g) $\frac{\sin^3 x}{3} + C$, h) $-\frac{\cos^6 x}{6} + C$, i) $\frac{e^{3x-5}}{3} + C$, j) $\frac{(3x+1)^5}{15} + C$.

6.4. a) $6\ln|x+3| + 2\ln|x-1| + C$, b) $\ln|x| + 7\ln|x-3| + C$, c) $\ln|x| - \frac{2}{x} + 3\ln|x-1| + C$, d)

$\ln|x+4| + 3\ln|x-3| + C$, e) $2\ln|x+5| + 5\ln|x+1| + C$.

7 URČITÝ INTEGRÁL

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY



Kapitola je věnována určitému (Newtonovu) integrálu spojitě funkce. Obsahuje základní pojmy a vztahy, pravidla pro integraci a ekonomické aplikace určitého integrálu.

CÍLE KAPITOLY



Zavést určitý (Newtonův) integrál.

Představit pravidla pro výpočet určitého integrálu.

Demonstrovat užití určitého integrálu v ekonomii.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY



Určitý integrál, pravidla integrování, ekonomické aplikace.

7.1. ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY

Výpočet určitého integrálu provádíme pomocí Newtonova-Leibnizova vzorce:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Proměnné a a b ve vztahu výše se nazývají horní a dolní integrační meze.

Obsah plochy mezi křivkami $f(x)$ a $h(x)$, kde $h(x)$ je horní křivka a $f(x)$ dolní křivka, a kde a a b jsou průsečíky obou křivek, počítáme podle vztahu:

$$S = \int_a^b (h(x) - f(x))dx$$

Celkový příjem TR za období $(t_1; t_2)$, jestliže funkce $f(t)$ vyjadřuje *intenzitu toku příjmu* (velikost renty) v čase t , se vypočte jako:

$$TR = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

Přebytek spotřebitele CS (customer surplus):

$$CS = \int_0^{Q_E} D(Q) dQ - Q_E P_E$$

Přebytek výrobce PS (producer surplus):

$$PS = Q_E P_E - \int_0^{Q_E} S(Q) dQ$$

7.2 ÚLOHY

7.1. Vypočtěte:

a) $\int_0^2 x^2 dx$

b) $\int_1^3 x^2 dx$

c) $\int_0^3 x^3 dx$

d) $\int_0^2 x^4 dx$

e) $\int_0^1 (x^2 + 2x) dx$

f) $\int_1^3 (x^2 - 2x + 4) dx$

g) $\int_1^5 \frac{1}{x} dx$

h) $\int_1^2 \frac{2}{x^2} dx$

i) $\int_0^1 e^x dx$

j) $\int_0^\pi \sin dx$

7.2. Určete obsah ploch nad (pod) křivkou na daném intervalu:

a) $y = x^2$ a $x \in (1, 4)$.

b) $y = x^2$ a $x \in (-1, 1)$.

c) $y = x^3$ a $x \in (0, 2)$.

d) $y = x^3$ a $x \in (-1, 2)$.

e) $y = x^2 + 1$ a $x \in (0, 1)$.

7.3. Určete obsah plochy sevřené křivkami:

a) $y = x^2$ a $y = x$.

b) $y = x^2$ a $y = 2x$.

c) $y = x^2$ a $y = 3x$.

d) $y = x^3$ a $y = x$.

e) $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$.

7.4. Určete přebytek spotřebitele a výrobce v podmínkách dokonalé konkurence:

a) $D(Q) = 20 - Q$, $S(Q) = 40 + 3Q$,

b) $D(Q) = 84 - 3Q$, $S(Q) = 20 + Q$

c) $D(Q) = 100 - 5Q$, $S(Q) = 200 + 5Q$

d) $D(Q) = 50 - 2Q$, $S(Q) = 43 + Q$

7.5. Určete celkový příjem, je-li intenzita toku příjmu $f(t) = 2t^2 + 50$, $t_1 = 0$, $t_2 = 10$.

VÝSLEDKY



7.1. a) $8/3$, b) $26/3$, c) $81/4$, d) $32/5$, e) $4/3$, f) $26/3$, g) $\ln 5$, h) 1, i) 2,718, j) 2.

7.2. a) 21, b) $2/3$, c) 4, d) $17/4$, e) $4/3$.

7.3. a) $1/6$, b) $4/3$, c) $9/2$, d) 1, e) $1/3$.

7.4. a)

7.5. 1167.

8 ČÍSELNÉ ŘADY



RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Kapitola se věnuje nekonečným číselným řadám, problematice jejich konvergence a určení součtu řad, které jsou konvergentní.



CÍLE KAPITOLY

Zavést pojem nekonečná číselná řada.

Zavést konvergenci a divergenci řad.

Demonstrovat ekonomické aplikace číselných řad.



KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Číselná řada, konvergence, divergence, součet řady.

8.1. ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY

Číselnou řadou nazýváme součet (reálných) čísel $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$.

Je-li počet sčítanců konečný, mluvíme o *konečné číselné řadě*, je-li počet sčítanců nekonečný ($n \rightarrow \infty$), jedná se o *nekonečnou řadu*:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

V dalším výkladu se budeme až na výjimky zabývat nekonečnými číselnými řadami (krátce jen „řadami“).

Veličina $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ se nazývá *n-tý částečný součet řady*. Je to součet prvních n členů řady. *Součet řady* s je pak limitou posloupnosti částečných součtů s_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

Jestliže má daná řada konečný součet, nazývá se *konvergentní*. V opačném případě, to jest když je součet nekonečný anebo vůbec neexistuje, je řada *divergentní*.

Součet *nekonečné geometrické řady*:

$$s = \frac{a_1}{1 - q}, \quad |q| < 1.$$

8.2 ÚLOHY

8.1. Určete součet geometrické řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n$

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n$

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$

8.2. Určitý film vydělal za první týden promítání v kinech 50 milionů dolarů. Producent filmu odhaduje, že každý následující týden budou tržby filmu klesat o a) 40 %, b) 30 %, c) 50 %. Odhadněte celkové tržby filmu.

8.3. Rozhodněte o konvergenci (divergenci) nekonečných řad:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n^3}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\ln n}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$

**VÝSLEDKY**

8.1. a) 2, b) 2/3, c) 1/3, d) divergentní, e) 1/4, f) $\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$, g) divergentní, h) 7/4, i) 5/2.

8.2. a) 125 mil., b) 167 mil., d) 100 mil.

8.3. a) divergentní, b) divergentní, c) konvergentní, d) konvergentní, e) divergentní, f) konvergentní, g) divergentní, h) divergentní, i) divergentní.

9 FUNKČNÍ ŘADY

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY



Kapitola je věnována nekonečným funkčním řadám, které představují zobecnění nekonečných číselných řad, a problematice jejich konvergence.

CÍLE KAPITOLY



Zavést pojem nekonečné funkční řady.

Zavést pojem konvergence funkční řady a různých typů konvergence.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY



Funkční řada, konvergence, obor konvergence, interval konvergence, absolutní konvergence.

9.1. ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY

Nechť $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... je posloupnost funkcí. *Nekonečná funkční řada* je symbol:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

Součet funkční řady je funkce $s(x)$, kterou získáme (stejně jako u nekonečných číselných řad) jako limitu posloupnosti částečných součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x)$$

Řada je *konvergentní*, jestliže funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$ konverguje k funkci $s(x)$ na jisté množině M .

Pokud k $s(x)$ konverguje i řada absolutních hodnot $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, hovoříme o *absolutní konvergenci*.

Množina všech $x \in M$, pro které řada konverguje (konverguje absolutně), se nazývá *obor konvergence (obor absolutní konvergence)*, a v dalším textu bude značen jako *OK (OAK)*.

Mocninná řada má tvar: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$. Interval konvergence mocninné řady $IK = (a - \rho, a + \rho)$, kde a je takzvaný střed řady a ρ je poloměr konvergence, se určí pomocí následujících limit:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \text{ nebo } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

Geometrická řada má tento tvar: $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)^n$.

Označíme-li $f(x) = q$, pak řada konverguje pro $q < 1$, a součet geometrické řady:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{f(x)}{1-f(x)}.$$

9.2 ÚLOHY

9.1. Určete *IK*, *OK* a *OAK* u následujících řad, u geometrických řad určete i jejich součet.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-5)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} e^n(x-1)^n$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n(x-2)^n$

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^n}$$

$$j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$$

$$k) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{5^n}$$

VÝSLEDKY



9.1. a) geometrická (i mocninná) řada, $IK = OK = (-3, -1)$, $s = -\frac{x+2}{x+1}$, b) geometrická (i mocninná) řada, $IK = OK = (4, 6)$, $s = \frac{x-5}{-x+6}$, c) mocninná řada, $IK = (-4, -2)$, $OK = \langle -4, -2 \rangle$, d) mocninná řada, $IK = OK = (0, 2)$, e) mocninná řada, $IK = OK = (1 - 1/e, 1 + 1/e)$, f) mocninná řada, $IK = (3, 5)$, $OK = \langle 3, 5 \rangle$, g) geometrická, $OK = (-\infty, 0)$, $s = \frac{1}{1 - e^x}$, h) mocninná řada, $OK = \emptyset$, i) geometrická i mocninná, $IK = OK = (-6, -2)$, $s = -\frac{x+4}{x+2}$, j) geometrická i mocninná, $IK = OK = (-5, 5)$, $s = \frac{x}{5-x}$, k) mocninná i geometrická, $OK = OAK = (-5, 5)$, $s = \frac{-x}{x+5}$.

10 ÚVOD DO OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC



RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Kapitola je věnována úvodu do diferenciálních rovnic a základním metodám řešení diferenciálních rovnic.



CÍLE KAPITOLY

Zavést pojem obyčejná diferenciální rovnice

Zavést pojem obecné a partikulární řešení.

Demonstrovat základní metody řešení diferenciálních rovnic.



KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Diferenciální rovnice, obecné řešení, partikulární řešení.

10.1. ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY

Mějme funkci jedné proměnné $y = f(x)$. Diferenciální rovnice je rovnice, která kromě x a y obsahuje i derivaci (derivace) funkce y . *Řád diferenciální rovnice* je určen nejvyšší derivací, mocnina u nejvyšší derivace určuje *stupeň diferenciální rovnice*.

Rozlišujeme tři druhy řešení diferenciální rovnice:

- *Obecné řešení* je funkce $y(x, C_i)$ vyhovující dané rovnici a obsahující (neurčité) konstanty C_i podobně jako u neurčitého integrálu.
- *Partikulární řešení* obdržíme z obecného řešení tak, že konstanty C_i nahradíme reálným číslem, případně mohou tyto konstanty vyplývat například z takzvaných počátečních nebo okrajových podmínek.
- *Singulární řešení* je řešení, které nelze získat z obecného řešení pro žádné hodnoty C_i ,

Diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými má obecně tento tvar:

$$P(x) + Q(y)y = 0 \text{ nebo } P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu má následující tvar:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Řešíme ji metodou separace proměnných a variace konstanty.

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty má tento tvar:

$$y'' + ay' + c = p(x).$$

Řešení hledáme ve tvaru $y = Ce^{ax}$, více viz [1].

10.2 ÚLOHY

10.1. Určete obecné a partikulární řešení diferenciální rovnice.

a) $y' = 2x + 5, y(0) = 1$

b) $y' = 1 - x^2, y(1) = 3$

c) $y' = \frac{2}{x} + 1, y(1) = 2$

d) $y' = x^3 - 3x^2, y(0) = 2$

e) $y' = x^2 + 5x + 3, y(2) = 2$

10.2. Určete obecné řešení diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými.

a) $y'y = 4x$

b) $x^2 dx - 2y dy = 0$

c) $y' = \frac{x^3}{y}$

d) $y'y^2 = x + 1$

e) $\frac{y'}{y} = x^2 + 1$

10.3. Určete obecné řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu s nenulovou pravou stranou.

a) $y' + xy = 2x$

b) $y' - (2x - 1)y = 1 - 2x$

c) $y' - 3x^2 y = x^2$

10.4. Určete obecné řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty.

a) $y'' + y' - 6y = 0$

b) $y'' + 7y' + 12y = 0$

c) $y'' + 2y' - 3y = 0$

d) $y'' - 4y' + 4y = 0$

e) $y'' + 3y' - 10y = 0$

**VÝSLEDKY**10.1. a) obecné řešení: $y = x^2 + 5c + C$, partikulární řešení: $y = x^2 + 5c + 1$, b) obecné ře-šení: $y = x - \frac{x^3}{3} + C$, partikulární řešení: $y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{7}{3}$, c) obecné řešení: $y = 2 \ln|x| + x + C$, partikulární řešení: $y = 2 \ln|x| + x + 1$, d) obecné řešení: $y = \frac{x^4}{4} - x^3 + C$, partikulární řešení: $y = \frac{x^4}{4} - x^3 + 4$, e)) obecné řešení: $y = \frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + 3x + C$, partikulární řešení: $y = \frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + 3x + \frac{10}{3}$.10.2. a) $y^2 = 2x^2 + C$, b) $\frac{x^3}{3} = y^2 + C$, c) $\frac{y^2}{2} = \frac{x^4}{4} + C$, d) $\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + x + C$, e) $y = e^{\frac{x^3}{3} + x + C}$ 10.3. a) $y = (2e^{\frac{x^2}{2}} + C)e^{-\frac{x^2}{2}}$, b) $y = (e^{x-x^2} + C)e^{x^2-x}$, c) $y = (-\frac{e^{-x^3}}{3} + C)e^{x^3}$ 10.4. a) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$, b) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-4x}$, c) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^x$, d) $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$, e) $y = C_1e^{-5x} + C_2e^{2x}$.

ZÁVĚR

Studijní opora Sbíрка úloh – Matematika v Ekonomii je určena studentům prvního ročníku navazujícího studia na Obchodně podnikatelské fakultě Slezské univerzity. Jejím cílem je poskytnout studentům dodatečné množství úloh k osvojení a porozumění diferenciálnímu a integrálnímu počtu. Autor věří, že společně s dříve vydanou publikací Matematika v ekonomii tak studenti získají dostatečné množství učebního materiálu k úspěšnému absolvování tohoto předmětu.

LITERATURA

[1] MAZUREK, J. 2012. *Matematika v ekonomii*. SU OPF Karviná.

Název: **Matematika v ekonomii**

Autor: **Jména autorů každé na nový řádek včetně titulů**

Vydavatel: Slezská univerzita v Opavě
Obchodně podnikatelská fakulta v Karviné

Určeno: studentům SU OPF Karviná

Počet stran: 59

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou.