STATISTIKA

11. PŘEDNÁŠKA

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Téma přednášky:
a) regresní analýza,
b) lineární regrese,
c) metoda nejmenších čtverců,
d) koeficient determinace.

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

Jaké a k čemu jsou metody stanovení závislosti

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

- závislostí 1. **kvantitativního** znaku na 2. **kvantitativním** znaku (nebo více kvantitativních znacích) - **regresní a korelační analýza**

- závislost dvou znaků - **jednoduchá regresní analýza (jednoduchá korelační analýza**)

Jaké a k čemu jsou metody stanovení závislosti

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

- závislost znaku na více znacích - **vícenásobná regresní analýza**

- znalost závislostí umožňuje:
  předvídat chování (prognózovat, predikovat) závislé veličiny

Příklad – Zisk z reklamy

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

nezávislá - *závislá* veličina (proměnná)

Firma č.	Výdaje na reklamu (tis. Kč)	Zisk z prodeje (10 tis. Kč)
1	6	5
2	8	8
3	9	9
4	9	12
5	12	21
6	15	25
7	16	32
8	20	36
9	22	51
10	23	59

Jednoduché regresní modely

$$y = f(x) + \varepsilon$$

závisle proměnná

reziduum

regresní funkce **nezávisle** proměnná

Lineární regresní funkce:

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

Jednoduché regresní modely

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Parabolická regresní funkce :

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

Exponenciální regresní funkce :

$$f(x) = \beta_0 \beta_1^x$$

Logaritmická regresní funkce:

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 \log x$$

Jednoduchá lineární regrese

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

- výběr párových hodnot:
  $(y_1, x_1), (y_2, x_2), (y_3, x_3),\ldots,(y_n, x_n)$

- 2 způsoby získání dat:

(A) hodnoty nezávisle proměnné x_i se předem pevně zvolí a k nim se „změří“ příslušné hodnoty y_i

(B) hodnoty (y_i, x_i) se „změří“ na n náhodně zvolených jednotkách základního souboru

Jednoduchá lineární regrese

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Soubor párových hodnot se geometricky znázorní v rovině **bodových grafem:**

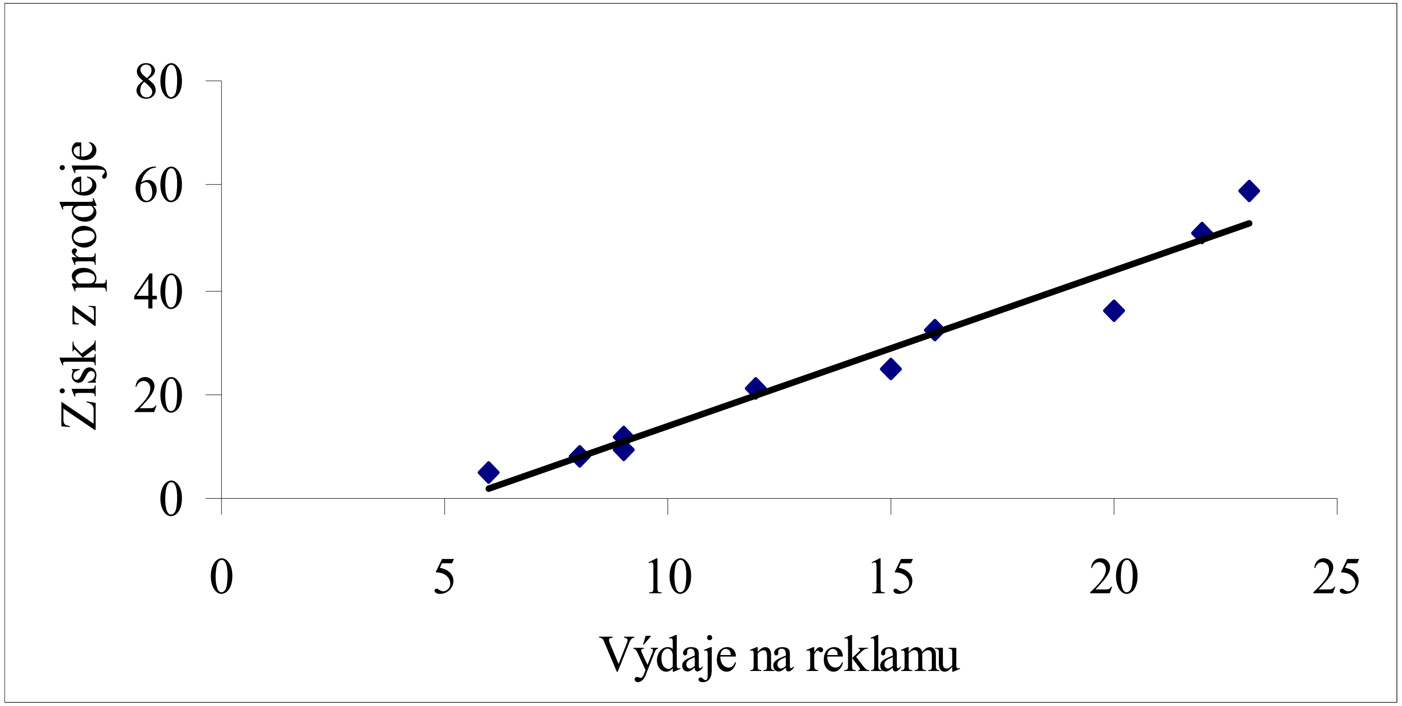
reziduum

JLR model: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad i = 1,2,...,n$

regresní koeficienty a jejich odhady $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}_1$

Příklad: Zisk z reklamy (grafické znázornění)

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA



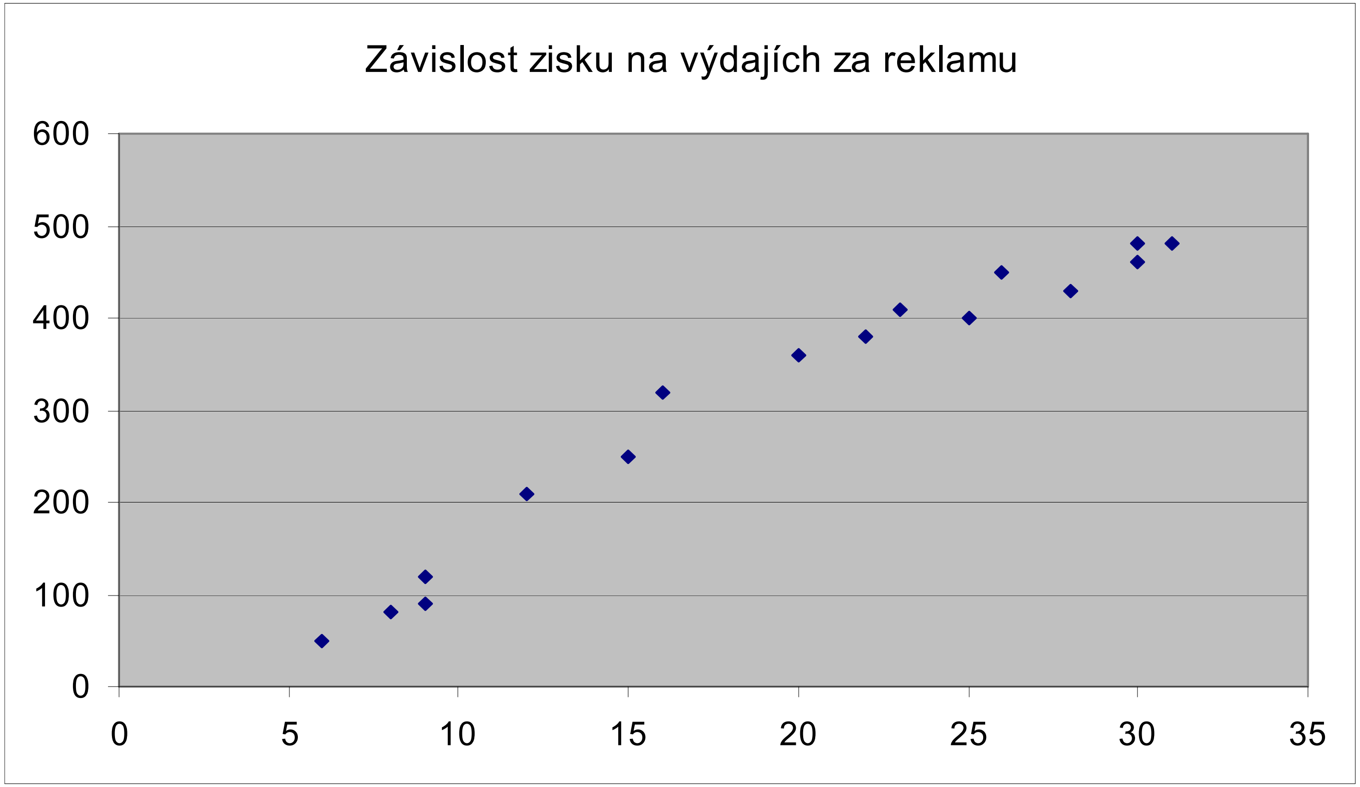
Příklad: Výdaje na reklamu

JRA

č. firmy	Výdaje na reklamu	Výdaje na reklamu	Zisk
1	malé	6	50
2	malé	8	80
3	malé	9	90
4	malé	9	120
5	středně velké	12	210
6	středně velké	15	250
7	středně velké	16	320
8	středně velké	20	360
9	středně velké	22	380
10	středně velké	23	410
11	velké	25	400
12	velké	26	450
13	velké	28	430
14	velké	30	460
15	velké	30	480
16	velké	31	480

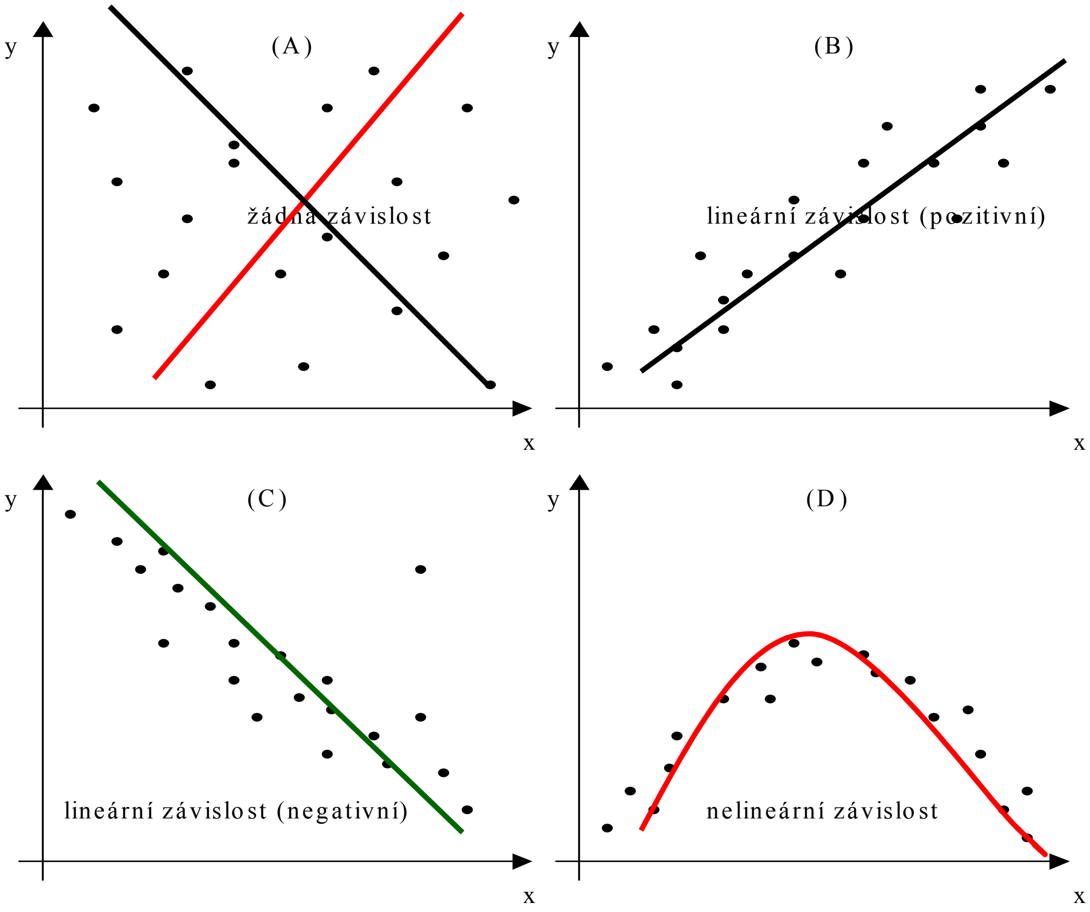
SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Příklad: grafické znázornění



Bodový diagram (Scatter diagram)

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA



Metoda nejmenších čtverců

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Idea MNČ: minimalizovat reziduální součet čtverců:

$$S_R = \sum_{i=1}^{n} (y_i - Y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (b_0 + b_1 x_i))^2$$

Příklad: Zisk z reklamy

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{462{,}1 - 14 \cdot 25{,}8}{230 - 14^2} = \frac{100{,}9}{34} = 2{,}97$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 25{,}8 - 2{,}97 \cdot 14 = -15{,}78$$

Regresní funkce: $\boxed{Y = -15{,}78 + 2{,}97x}$

Příklad: Zisk z reklamy – ruční výpočty

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	Y_i	$(Y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	6	5	36	30	2,04	565,21	432,64
2	8	8	64	64	7,98	318,22	316,84
3	9	9	81	81	10,95	221,15	282,24
4	9	12	81	108	10,95	221,15	190,44
5	12	21	144	252	19,86	35,62	23,04
6	15	25	225	375	28,77	8,61	0,64
7	16	32	256	512	31,74	34,84	38,44
8	20	36	400	720	43,62	315,88	104,04
9	22	51	484	1122	49,56	562,08	635,04
10	23	59	529	1357	52,53	711,60	1102,24
Součet	140	258	2300	4621	258	2994,3	3125,6
Průměr	14	25,8	230	462,1			

Předpoklady lineárního modelu

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

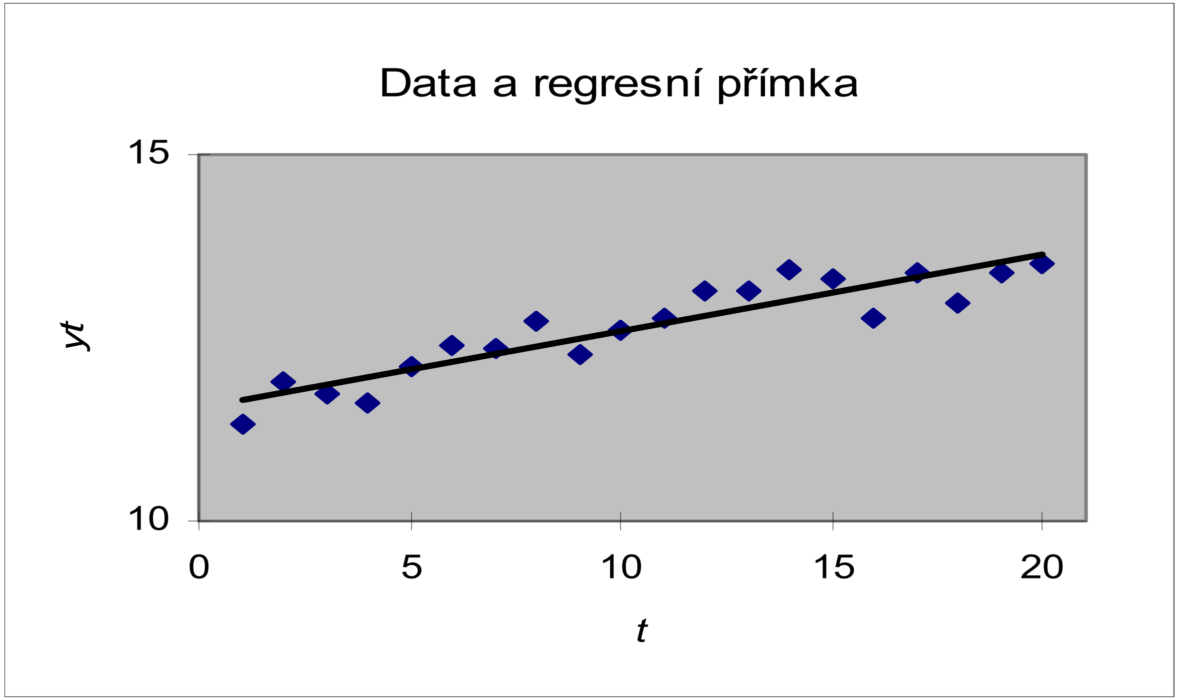
1. Hodnoty vysvětlující proměnné x_i se volí předem, ***nejsou*** to tedy náhodné veličiny.

2. Náhodné složky (rezidua) ε_i mají **normální rozdělení** pravděpodobnosti se střední hodnotou 0 a (neznámým) konstantním rozptylem σ^2 - tzv. **homoskedasticita**

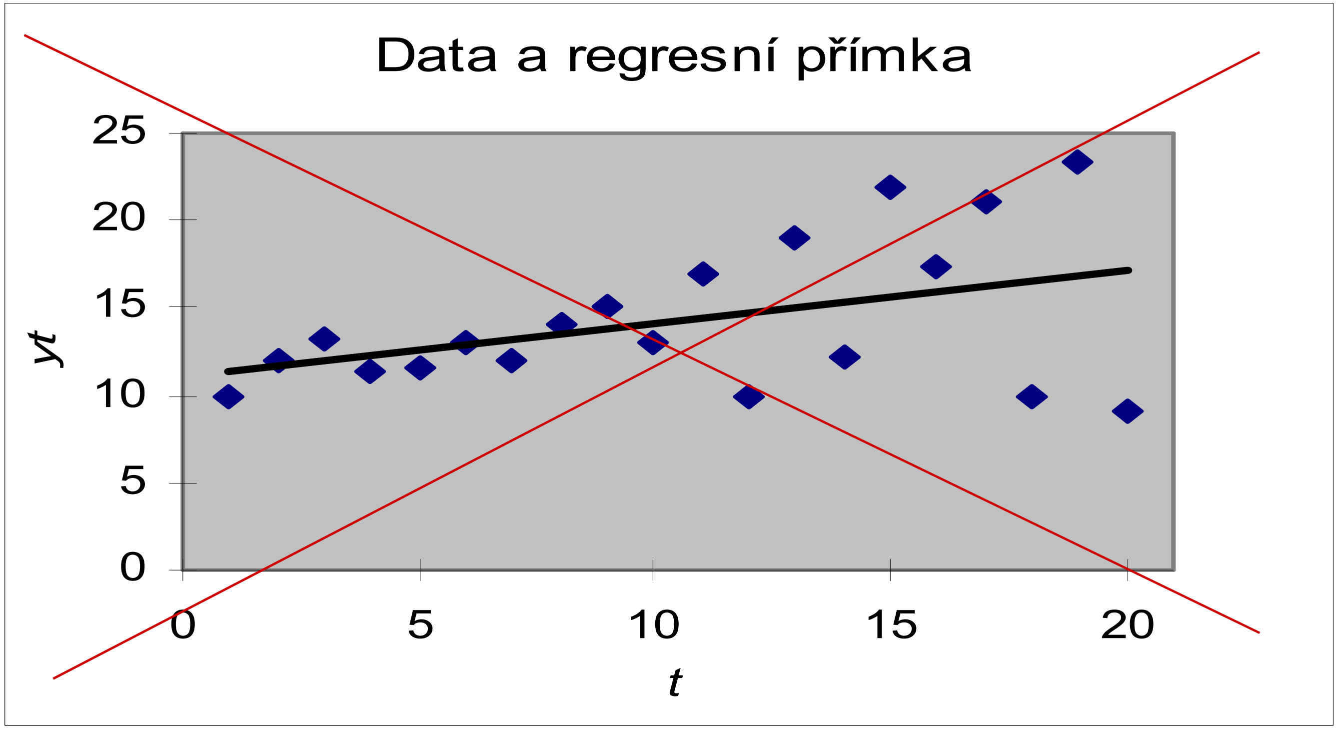
3. Náhodné složky jsou **nekorelované**, tj.
$\rho(\varepsilon_i , \varepsilon_j) = 0$ pro každé $i \neq j$, $i,j = 1,2,\ldots,n$.
(ρ - **korelační koeficient**)

Předpoklady lineárního modelu - jsou splněny

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA



Předpoklady lineárního modelu – nejsou splněny



Koeficient determinace R^2

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Koeficient determinace charakterizuje **přiléhavost dat k regresnímu modelu** (číslo mezi 0 a 1):

$$\boxed{R^2 = \frac{S_T}{S_y} = \frac{S_y - S_R}{S_y} = 1 - \frac{S_R}{S_y}}$$

$$S_y = S_R + S_T$$

- **teoretický součet čtverců**: $S_T = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \bar{y}\right)^2$

- **reziduální součet čtverců** $S_R = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - Y_i\right)^2$

Koeficient determinace R^2 - upravený

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Pro malé soubory: $$R^2_{adj} = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n-1}{n-2}$$

Výpočet koeficientu determinace

Závislost zisku z prodeje na velikosti nákladů na reklamu:

$$R^2 = \frac{S_T}{S_y} = \frac{2994,3}{3125,6} = 0,958 \qquad R^2_{adj} = 0,953$$

Koeficient korelace (odmocnina koeficientu determinace)

$$R = 0,979 \qquad R_{adj} = 0,979$$

Závěr přednášky

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Děkuji Vám za pozornost !!!