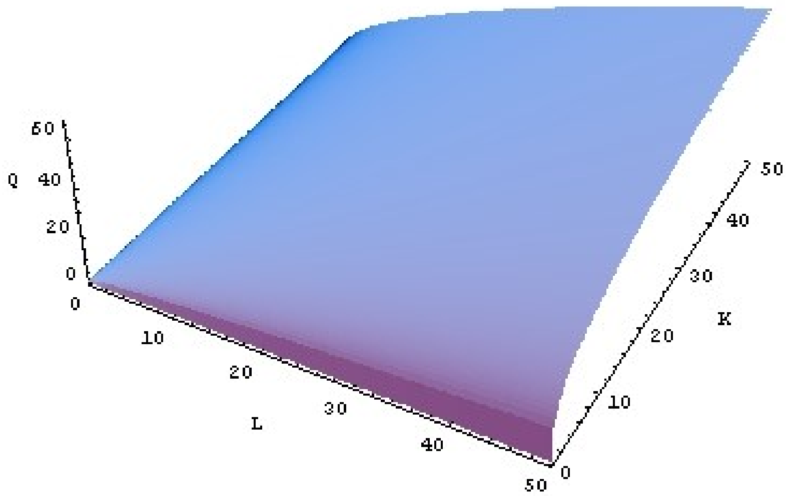
MATEMATIKA V EKONOMII – PŘEDNÁŠKA Č. 4
(Funkce dvou a více proměnných)

- Funkce **dvou proměnných**: $z = f(x, y)$.
- Například **Cobb-Douglasova produkční funkce** $Q(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$.
- **Graf** funkce dvou proměnných si lze představit jako plochu („krajinu“) v trojrozměrném prostoru:



Obr. 4.6. Graf Cobb-Douglasovy funkce. Zdroj: Wikipedia.

-**Definiční obor** funkce dvou proměnných tvoří body [x, y], pro které má daná funkce smysl. Určujeme jej graficky.

Příklad 4.1. Určete definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{x + y - 2}$.

Příklad 4.2. Určete definiční obor funkce $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}$.

Příklad 4.3. Určete definiční obor funkce $f(x,y)=\log\left(x^2-y\right)$.

Příklad 4.5. Určete definiční obor funkce $f(x,y)=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$.

- **Derivace** funkce dvou proměnných: Nechť funkce $f(x,y)$ je funkcí dvou proměnných x a y. Derivaci funkce dvou proměnných podle jedné z nich nazýváme *parciální derivace*. Pro parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle x respektive y užíváme následující značení:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\quad f_x'(x,y),\quad f_x' \text{ , respektive } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y},\quad f_y'(x,y),\quad f_y'$$

Definice parciálních derivací se zavádí obdobně jako derivace funkce jedné proměnné:

$$f_x'(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},$$

$$f_y'(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

Při výpočtu parciální derivace podle x postupujeme tak, že y považujeme za konstantu (pouze ji opisujeme) a funkci $f(x,y)$ derivujeme podle x. Při výpočtu parciální derivace podle y postupujeme přesně opačně.

Příklad 4.6. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x,y) = x^2 y + 2y^3$.

Příklad 4.7. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x,y) = x^2 e^y + \ln(xy)$.

- **Druhé derivace** funkce dvou proměnných:

Druhá derivace podle *x*: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

Druhá derivace podle *y*: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Smíšená derivace: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ respektive $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

U smíšené derivace nezáleží na pořadí derivovaní (věta o záměnnosti pořadí derivování), platí tedy: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Příklad 4.8. Vypočtěte druhé parciální derivace funkce $f(x,y)=2x^3-6xy+5$.

- **Cobb-Douglasova produkční funkce** udává závislost produkce Q na práci L a kapitálu K:

$$Q=AK^aL^b \tag{4.1}$$

Ve vztahu (4.1) jsou A, a, b kladné konstanty. Konstanta A souvisí s technologickým pokrokem: při stejném K a L vyšší A znamená, že je produkce vyšší (ze stejného množství kapitálu a práce se vyprodukuje více díky efektivnějším technologiím). Podle hodnoty $a + b$ říkáme o produkční funkci, že má:

- konstantní výnosy z rozsahu, je-li $a+b=1$
- rostoucí výnosy z rozsahu, je-li $a+b>1$
- klesající výnosy z rozsahu, je-li $a+b<1$.

- Mezní produkt práce a kapitálu

Derivacemi produkční funkce podle práce respektive kapitálu získáme **mezní produkt práce MP_L** respektive **mezní produkt kapitálu MP_K**:

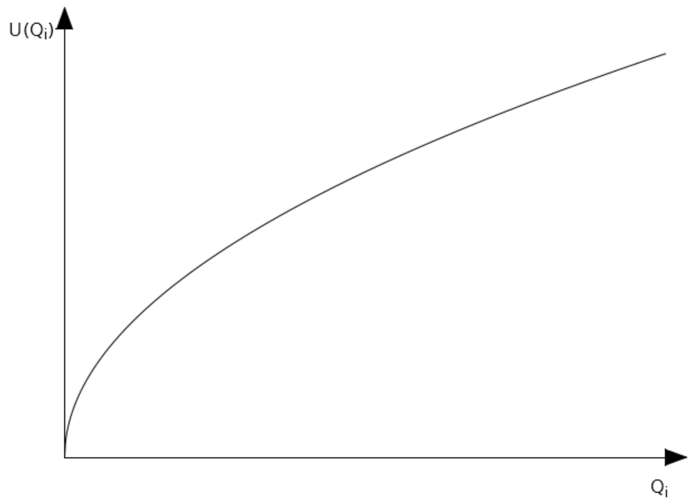
$$MP_L=\frac{\partial Q}{\partial L},$$
$$MP_K=\frac{\partial Q}{\partial K}$$

Příklad 4.9. Je dána Cobb-Douglasova funkce $Q = 80K^{0,3}L^{0,7}$. Určete:
a) mezní produkt práce a kapitálu,
b) mezní produkt práce pro K = 100 a L = 50.

- **Funkce užitku**: Mějme n druhů zboží, jejichž množství buď Q_1, Q_2, …, Q_n. Předpokládejme, že spotřebitel je schopen přiřadit každé skupině zboží jednu hodnotu, která vyjadřuje *užitečnost* (*užitek*) dané skupiny zboží. Zmíněné přiřazení nazýváme *funkce užitečnosti* (*utility fiction*), a zapisujeme:

$$U(Q_1, Q_2, ..., Q_n)$$

V dalším výkladu se omezíme pouze na funkce užitečnosti dvou proměnných.



Obr. 4.8. Obvyklý tvar funkce užitku.

- **Mezní užitečnost (užitek)** je derivace užitku:

$$MU_i = \frac{\partial U(Q_1, Q_2, ..., Q_n)}{\partial Q_i}$$

Příklad 4.10. Je dána funkce užitečnosti pro dva druhy zboží $U(Q_1, Q_2) = Q_1\sqrt{Q_2}$. Zjistěte, zda je spotřebitelem preferován stav $Q_1 = 10$, $Q_2 = 5$ nebo stav s hodnotami $Q_1 = 7$, $Q_2 = 8$.

Příklad 4.11. Vypočtěte mezní užitek MU_1 a MU_2 pro funkci $U = Q_1^{0,5} \cdot Q_2^{0,2}$:

a) obecně,

b) pro $Q_1 = 10$ a $Q_2 = 8$.

Příklad 4.12. Pan Tomáš má k dispozici důchod 200 jednotek (například eur). Může si za ně koupit dva statky, které mají cenu P_1 = 4 a P_2 = 2 jednotky. Funkce užitku U pana Tomáše je dána takto: $U(Q_1, Q_2) = Q_1 \cdot Q_2$, kde Q_1 je množství prvního statku a Q_2 je množství druhého statku. Jaké množství statků má pan Tomáš koupit tak, aby maximalizoval svůj užitek a přitom utratil veškerý důchod?

- **Tečná rovina** a **normála**: Nechť má funkce $z = f(x, y)$ v bodě $C[x_0, y_0, z_0]$ obě parciální derivace. Pak rovnice tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $C[x_0, y_0, z_0]$ má tvar:

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(C) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(C) \cdot (y - y_0)$$

Normálový vektor (vektor kolmý k tečné rovině):

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(C), \frac{\partial f}{\partial y}(C), -1 \right)$$

A **normála** (v parametrickém tvaru):

$$x = x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(C) \cdot t$$

$$y = y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(C) \cdot t \quad , \; t \in R$$

$$z = z_0 - t$$

Příklad 4.13. Je dána funkce $f(x, y) = x^3 + xy^2$.
a) Najděte rovnici tečné roviny ke grafu této funkce v bodě C [2,1,?].
b) Určete normálu k této rovině v daném bodě.

- **Totální diferenciál** funkce dvou proměnných: Totálním diferenciálem (prvního řádu) funkce dvou proměnných $f(x, y)$ v bodě $C = [c_1, c_2, c_3]$ nazýváme výraz:

$$df(C) = \frac{\partial f}{\partial x}(C)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(C)dy,$$

pokud obě parciální derivace v bodě C existují.
Stejně jako u funkce jedné proměnné vyjadřuje totální diferenciál dvou proměnných (přibližně) přírůstek funkce $f(x, y)$ spojený s malým přírůstkem proměnné x (první člen na pravé straně) a proměnné y (druhý člen na pravé straně).

Příklad 4.14. Je dána funkce $f(x,y)=3x^2+5xy+y$, bod C [1,1,9] a dx = 0,1, dy = 0,2. Určete:

a) totální diferenciál funkce,

b) přírůstek funkce v bodě C pro dané hodnoty dx a dy.

Totálním diferenciálem druhého řádu nazýváme výraz:

$$d^2 f(C,dx,dy)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C)d^2x+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(C)dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C)d^2y$$

Totální diferenciál druhého řádu vyjadřuje (přibližně) „přírůstek přírůstku“ funkce. Lze jej využít k hledání maxima a minima funkce dvou (a více) proměnných, viz Kapitola 5.