MATEMATIKA V EKONOMII – PŘEDNÁŠKA Č. 5:
(Lokální a vázané extrémy funkce dvou proměnných, úvod do integrálního počtu)

V této přednášce se budeme zabývat hledáním extrémů funkce $f(x,y)$ dvou proměnných x a y.

- **Lokální extrémy funkce:** Má-li funkce dvou proměnných $f(x,y)$ v jistém bodě (x,y) maximum nebo minimum, a existují obě parciální derivace, pak platí: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$.

Tato podmínka však není postačující, neboť v daném bodě může být i inflexní (sedlový) bod.

- **Existenci** maxima (minima) funkce při splnění určitých podmínek zaručuje následující věta:

***Věta 5.1 (Weierstrassova)**. Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na uzavřené a omezené oblasti $M \subset R^2$. Pak funkce $f(x,y)$ nabývá na oblasti M (globálního) maxima i minima.*

Poznámka: Funkce může mít extrémy i v bodech, v nichž některá první parciální derivace neexistuje. Takové body se musí vyšetřit zvlášť a v dalším výkladu se jimi nebudeme zabývat.

- Bod, v němž má funkce všechny první derivace nulové, se nazývá **stacionární bod** nebo též **bod podezřelý z extrému**, a bude značen *C*.

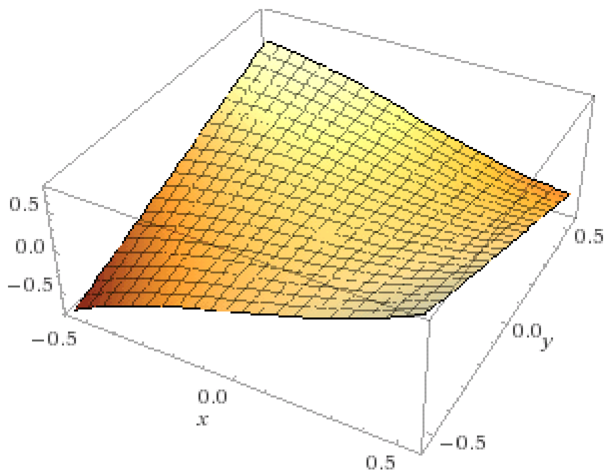
- O tom, která alternativa nastává, rozhodneme na základě druhých parciálních derivací, z nichž sestavíme **Hesseovu** matici a její determinant zvaný **hessián**:

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

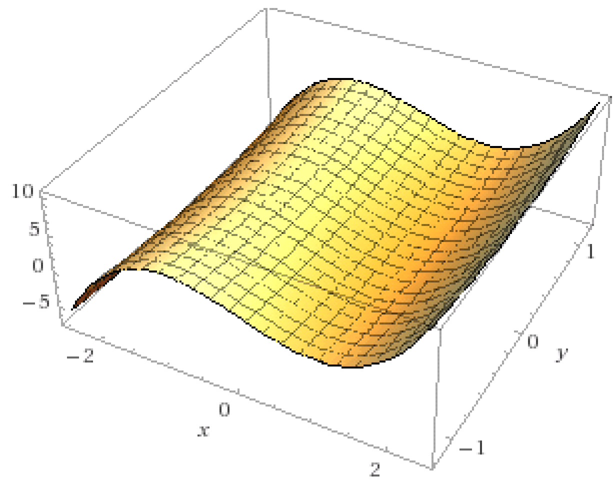
Do hessiánu dosadíme souřadnice bodu C a označíme: $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C)$ a $D_2 = H_f(C)$. D_2 je determinant Hesseovy matice. Pro určení extrému pak platí následující pravidlo:

- $D_2 > 0$: v bodě C je **EXTRÉM**, a to (lokální ostré) **MINIMUM**, pokud je $D_1 > 0$; a (lokální ostré) **MAXIMUM**, pokud je $D_1 < 0$.
- $D_2 < 0$: v bodě C je sedlo (inflexní bod).
- $D_2 = 0$: v daném bodě může (ale nemusí) být extrém, o extrému se musí rozhodnout jiným způsobem, například pomocí totálního diferenciálu druhého či vyššího řádu.

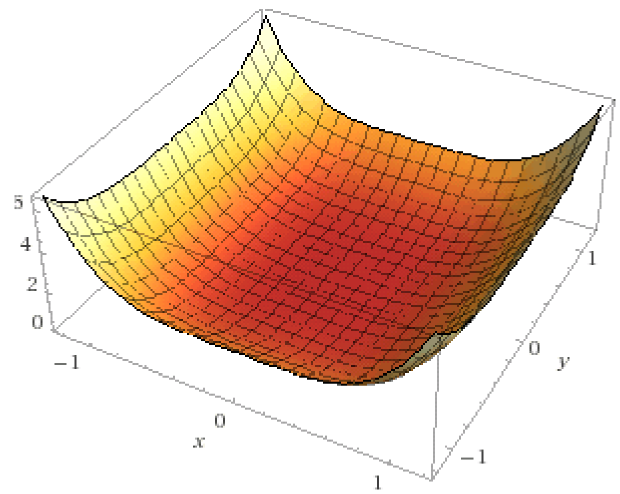
Příklad 5.1. Určete lokální extrémy funkce: $f(x, y) = x^3 - 2xy$



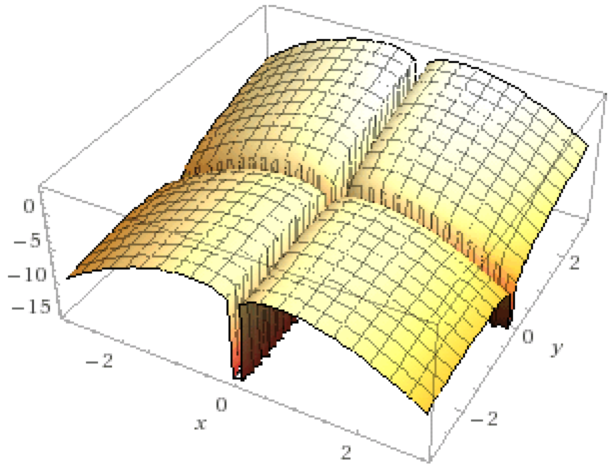
Příklad. Určete lokální extrémy funkce: $f(x,y) = x^3 - 3x + y^2 + 1$



Příklad 5.3. Určete lokální extrémy funkce: $f(x,y)=2x^4+y^4$.



Příklad 5.4. Určete lokální extrémy funkce: $f(x,y)=\ln(xy)-x^2+y$.



- Vázané extrémy: kromě funkce $f(x, y)$ je ještě zadána **vazba** (omezující podmínka pro x a y) ve tvaru $g(x, y) = 0$. Hledáme extrémy funkce $f(x, y)$, které jsou vázány (leží na ní) křivkou $g(x, y) = 0$.

Budeme používat dvě metody:

a) **Dosazovací metoda**: z vazby $g(x, y) = 0$ vyjádříme x nebo y a dosadíme do $f(x, y)$, čímž získáme funkci jedné proměnné, a extrémy tedy hledáme podobně jako u funkce jedné proměnné. Tuto metodu použijeme v případě, že z rovnice vazby lze osamostatnit x nebo y.

b) **Lagrangeova metoda neurčitých koeficientů**: sestavíme Lagrangeovu funkci $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, kde λ je Lagrangeův multiplikátor. Poté vypočteme parciální derivace L a položíme je rovny 0. Jako třetí rovnici pro tři neznámé x, y, λ použijeme rovnici vazby. Vyřešíme soustavu a výsledné „podezřelé“ body C dosadíme do hessiánu, pomocí kterého rozhodneme, zda se jedná o maximum, minimum nebo inflexní bod.

Pro určení extrému platí následující pravidlo:

- $D_2 > 0$: v bodě C je **EXTRÉM**, a to (lokální ostré) **MINIMUM**, pokud je navíc $D_1 > 0$; a (lokální ostré) **MAXIMUM**, pokud je $D_1 < 0$.
- $D_2 \leq 0$: o extrému se musí rozhodnout jiným způsobem.

U Lagrangeovy metody můžeme o charakteru kritického bodu C rozhodnout i bez hessiánu, pokud jsou splněny podmínky Věty 5.1, tedy pokud je funkce definovaná na omezené a uzavřené oblasti: spočteme hodnotu všech kritických bodů, a bod s největší (nejmenší) hodnotou bude vázaným maximem (minimem) dané funkce. Omezenou a uzavřenou oblastí může být například kružnice, elipsa, úsečka, apod.

Příklad 5.6. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y): x - y + 1 = 0$.

Příklad 5.7. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = x + y + 3$, $g(x,y): x^2 + y^2 - 2 = 0$.

MAXIMALIZACE PŘÍJMU

Příklad 5.9. Firma vyrábí dva druhy zboží, jejich množství označme Q_1 a Q_2. Příjem firmy je dán funkcí $TR(Q_1, Q_2) = 50Q_1 + 20Q_2 - 2Q_1^2 - 5Q_2^2$. Najděte maximum příjmu.

MINIMALIZACE NÁKLADŮ

Příklad 5.13. Jsou dány celkové náklady: $TC(x, y) = 100 - 32x - 30y + x^4 + 3y^2$. Najděte minimum nákladů.

Pojem neurčitého integrálu, základní vlastnosti

- Funkce $F(x)$ se nazývá **primitivní funkcí** k funkci $f(x)$ na otevřeném intervalu $J \subseteq R$ právě tehdy, když $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in J$. Primitivní funkce existuje ke každé spojité funkci na J.

- Množina všech primitivních funkcí k dané funkci se nazývá **neurčitý integrál, a značí se takto:**

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

kde $\int$ je integrační znak,

x integrační proměnná,
$f(x)$ integrovaná funkce neboli integrand,
$F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$,
C integrační konstanta.

Neurčitý integrál je lineární operátor, což znamená, že splňuje následující dvě podmínky:

i) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$,
ii) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Tabulka 6.1. Základní integrály.

řádek	$f(x)$	$\int f(x)dx$
1	0	C
2	1	x + C
3	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ + C
4	e^x	e^x + C
5	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$ + C
6	$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$

7	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
8	sin$x$	–cos$x$ + C
9	cos$x$	sin$x$ + C
10	$\frac{1}{\cos^2 x}$	tg$x$ + C
11	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	cotg$x$ + C
12	$\frac{1}{1+x^2}$	arctg$x$ + C
13	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
14	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arcsin$x$ + C
15	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arccos$x$ + C
16	$\frac{1}{\sqrt{1\pm x^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{1\pm x^2}\right\rvert + C$

Příklad 6.2. Integrujte:

a) $\int x^2 dx$.

b) $\int \left(x^3+2x^2+6x+1\right)dx$.

c) $\int \sqrt[3]{x}dx$.

d) $\int \frac{1}{x^3}dx$.

e) $\int \left(5\sin x-2\cos x+3^x\right)dx$.

INTEGRACE SOUČINU FUNKCÍ (METODA PER PARTES)

Smyslem této metody je rozložit jeden složitější integrál na dva jednodušší členy (odtud název metody: **per partes** je latinsky „po částech“). Vzorec, který používáme při integraci per partes:

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

Příklad 6.7. Vypočtěte: $\int x \cdot e^x dx$.

Příklad 6.8. Vypočtěte: $\int x \cdot \ln x dx$.

Příklad 6.10. Vypočtěte: $\int arctgx dx$.