MATEMATIKA V EKONOMII – PŘEDNÁŠKA Č. 6:
Neurčitý integrál, metoda per partes, integrace racionálních funkcí

INTEGRACE RACIONÁLNÍCH FUNKCÍ (METODA PARCIÁLNÍCH ZLOMKŮ)

- Racionální funkcí rozumíme výraz $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P(x) a Q(x) jsou polynomy proměnné x. Budeme předpokládat, že stupeň polynomu $P(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$. K integraci (ryzích) racionálních funkcí ve využívá metoda rozkladu na *parciální zlomky*. Smyslem této metody je rozložit zadanou (a obvykle složitou) racionální funkci na součet „nejjednodušších“ (*parciální* znamená „částečný“) zlomků.

Příklad. Vypočtěte $\int \frac{5x+8}{x^2+2x-8}dx$.

Příklad. Vypočtěte: $\int \frac{5x^2 - 17x + 12}{x^3 - 4x^2 + 4x}\,dx$

Příklad. Integrujte $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$.

Příklad. Integrujte: $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}\,dx$.

INTEGRACE SOUČINU FUNKCÍ (METODA PER PARTES)

- Smyslem této metody je **rozložit** jeden složitější integrál **na dva jednodušší členy** (odtud název metody: *per partes* je latinsky „po částech“).

- Vzorec, který používáme při integraci per partes, si odvodíme z pravidla pro derivaci součinu dvou funkcí, které označíme $u(x)$ a $v(x)$.

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

Nyní osamostatníme vlevo člen uv': $uv' = (uv)' - u'v$, a tuto rovnost integrujeme:

$$\int uv'dx = \int (uv)'dx - \int u'vdx$$

Prostřední člen obsahuje integrál i derivaci, proto se tyto dvě operace vyruší, a dostaneme:

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

- Důležitá je **správná volba** funkcí u a v'. Nesprávná volba funkcí vede k tomu, že složitost úlohy naroste. V takovém případě je zapotřebí zvolit funkce u a v' opačně.

Příklad. Vypočtěte: $\int (x+2) \cdot e^x dx$.

Příklad. Vypočtěte: $\int x^2 \cdot \ln x dx$.

Příklad. Vypočtěte: $\int (2x+5)\sin x dx$.

Příklad 6.10. Vypočtěte: $\int arctgx dx$.

Příklad 6.11. Vypočtěte: $\int \sin x e^x dx$.

CELKOVÉ NÁKLADY A CELKOVÉ PŘÍJMY

- V ekonomii lze (neurčitý) integrál využít k výpočtu **celkových příjmů** nebo **celkových nákladů,** pokud jsou známy (dány) mezní příjmy respektive mezní náklady.

- Funkce **celkových nákladů *TC*(*x*)** a funkce **mezních nákladů *MC*(*x*)**, kde x je počet výrobků, spolu souvisejí vztahem:

$$TC(x) = \int MC(x)dx + C \qquad (6.1)$$

Vztah (6.1) říká, že celkové náklady jsou součtem mezních nákladů. Integrační konstanta C se určí z jedné známé hodnoty $TC(x)$ pro dané x. Stejný vztah platí také pro **celkové příjmy *TR*(*x*)** a **mezní příjmy *MR*(*x*):**

$$TR(x) = \int MR(x)dx + C \qquad (6.2)$$

Příklad 6.12. Určete funkci celkových nákladů, jestliže funkce mezních nákladů $MC(x) = 140e^{0,2x}$ a náklady na produkci 10 výrobků činí 6000 Kč.

Příklad 6.14. Mezní příjmy jsou popsány funkcí $MR = 140 - 6x + 2$, najděte funkci celkového příjmu.

- Složitější neurčité integrály je možné řešit pomocí substituce, kterou se integrály zjednoduší.

- **Substituce** = náhrada původní proměnné nebo výrazu novou proměnnou.

- Budeme se zabývat substitucemi složených funkcí, a dále logaritmických, exponenciálních a goniometrických funkcí.

INTEGRACE SLOŽENÝCH FUNKCÍ

Příklad. Vypočtěte $\int (3x-1)^4 \, dx$.

Příklad 7.2. Vypočtěte: $\int e^{2x+3} dx$.