

## MATEMATIKA V EKONOMII – seminář č. 6 – Extrémy a vázané extrémy funkce dvou proměnných

### EXTRÉMY FUNKCE

Nutná podmínka lokálního (i globálního) extrému:  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ .

Funkce může mít extrémy jen v bodech, kde jsou všechny první parciální derivace rovny nule (*stacionární body*) nebo některé derivace neexistují. O maximum, minimum nebo inflexním bodu rozhodneme podle 2. parciálních derivací, z nichž sestavíme Hesseovu matici (resp. determinant zvaný *hessián*):

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Do hessiánu dosadíme souřadnice „podezřelého“ bodu C a označíme:  $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C)$ ,  $D_2 = H_f(C)$ . Pro určení extrému platí následující pravidlo:

- $D_2 > 0$ : v bodě C je EXTRÉM, a to (lokální ostré) MINIMUM, pokud je  $D_1 > 0$ ; a (lokální ostré) MAXIMUM, pokud je  $D_1 < 0$ .
- $D_2 < 0$ : v bodě C je sedlo (inflexní bod).
- $D_2 = 0$ : v daném bodě může (ale nemusí) být extrém, o extrému se musí rozhodnout jiným způsobem.

1. Určete lokální extrémy funkce:  $f(x, y) = x^2 - 2xy + y$ .

**Výsledek:** bod C = [1/2, 1/2] je inflexní bod.

2. Určete lokální extrémy funkce:  $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - x + 2y$ .

**Výsledek:** bod C = [4/3, -5/3] je minimum.

3. Najděte lokální extrémy funkce:  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 6x + 8$ .

**Výsledek:** bod C = [3, 0] je minimum.

4. Určete lokální extrémy funkce:  $f(x, y) = x^3 - xy + y$ .

**Výsledek:** bod C = [1, 3] je inflexní bod.

5. Najděte lokální extrémy funkce:  $f(x, y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$ .

**Výsledek:** bod C = [0, 0] je maximum.

6. Určete lokální extrémy funkce:  $f(x, y) = y - \frac{x^3}{3} + \ln(x - y)$ .

**Výsledek:** bod C<sub>1</sub> = [1, 0] je maximum a bod C<sub>2</sub> = [-1, -2] je inflexní bod.

### VÁZANÉ EXTRÉMY

Kromě funkce  $f(x, y)$  je ještě zadána *vazba* (omezující podmínka pro  $x$  a  $y$ ) ve tvaru  $g(x, y) = 0$ . Hledáme extrémy funkce  $f(x, y)$ , které jsou vázány (leží na) křivkou  $g(x, y) = 0$ .

Budeme používat dvě metody:

- a) *Dosazovací metoda*: z vazby  $g(x, y) = 0$  vyjádříme  $x$  nebo  $y$  a dosadíme do  $f(x, y)$ , čímž získáme funkci jedné proměnné, a extrémy tedy hledáme podobně jako u funkce jedné proměnné.
- b) *Lagrangeova metoda*: sestavíme Lagrangeovu funkci  $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ , kde  $\lambda$  je Lagrangeův multiplikátor. Poté vypočteme parciální derivace  $L$  a položíme je rovny 0. Jako třetí rovnici pro tři neznámé  $x, y, \lambda$  použijeme rovnici vazby. Vyřešíme soustavu a výsledné „podezřelé“ body  $C$  dosadíme do hessiánu.

Pro určení extrému platí následující pravidlo:

- $D_2 > 0$ : v bodě  $C$  je EXTRÉM, a to (lokální ostré) MINIMUM, pokud je navíc  $D_1 > 0$ ; a (lokální ostré) MAXIMUM, pokud je  $D_1 < 0$ .
- $D_2 \leq 0$ : o extrému se musí rozhodnout jiným způsobem.

1.) Určete vázané extrémy funkce  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $g(x, y): x + y + 2 = 0$ .

**Výsledek**: bod  $C_1 = [-1, -1]$  je minimum.

2.) Určete vázané extrémy funkce  $f(x, y) = 2x + y - 1$ ,  $g(x, y): x^2 + y^2 - 4 = 0$

**Výsledek**: maximum  $\left[ \frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right]$ , minimum  $\left[ -\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right]$ .

3.) Určete vázané extrémy funkce  $f(x, y) = xy$ ,  $g(x, y): x + y + 2 = 0$ .

**Výsledek**: bod  $C_1 = [-1, -1]$  je maximum.

V praxi reprezentuje vazbová podmínka **rozpočtová omezení**. Například investor, který chce maximalizovat zisk investicí do dvou produktů  $x$  a  $y$ , může mít rozpočtové omezení ve tvaru  $Y = ax + by$ , kde  $a$  a  $b$  jsou ceny produktu  $x$  respektive  $y$ , a  $Y$  je rozpočet investora.