

MATEMATIKA – seminář č. 7 – Neurčitý integrál, integrace racionálních zlomků, metoda „per partes“.

0. Opakování základních integrálů.

$$\int x^2 dx$$

$$\int (x^3 + 6x^2 - 5x + 4) dx$$

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{x^3} + e^x + 3^x + 2 \sin x + \sqrt{x} \right) dx$$

PER PARTES

1. Vypočtěte:

a) $\int x e^x dx$

b) $\int (x^2 + 1) e^x dx$

c) $\int x \ln x dx$

d) $\int x \sin x dx$

e) $\int x^3 \ln x dx$

f) $\int \ln x dx$

g) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

h) $\int \sin x e^x dx$

Výsledky: a) $(x-1)e^x + C$, b) $(x^2 - 2x + 3)e^x + C$, c) $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$,

d) $-x \cos x + \sin x + C$, e) $\frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$, f) $x \ln x - x + C$, g) $-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + C$, h)

$$\frac{\sin x e^x - \cos x e^x}{2} + C$$

PARCIÁLNÍ ZLOMKY

2. Vypočtěte: a) $\int \frac{x-13}{x^2+4x-5} dx$

b) $\int \frac{5x^2-17x+12}{x^3-4x^2+4x} dx$

Výsledky:

a) $3 \ln|x+5| - 2 \ln|x-1| + C$,

b) $\int \frac{3}{x} dx + \int \frac{2}{x-2} dx - \int \frac{1}{(x-2)^2} dx = 3 \ln|x| + 2 \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + C$

INTEGRÁLY VEDOUcí NA FUNKCI ARCTG

3. Vypočtěte: a) $\int \frac{1}{x^2+4x+5} dx$

b) $\int \frac{3}{x^2+2x+5} dx$

Výsledky: a) $\arctg(x+2) + C$, b) $\frac{3}{2} \arctg \frac{x+1}{2} + C$

Tabulka 6.1. Základní integrály.

| řádek | $f(x)$ | $\int f(x)dx$ |
|-------|-----------------------------|--|
| 1 | 0 | C |
| 2 | 1 | $x + C$ |
| 3 | x^n | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ |
| 4 | e^x | $e^x + C$ |
| 5 | $\frac{1}{x}$ | $\ln x + C$ |
| 6 | $\frac{1}{ax+b}$ | $\frac{1}{a} \ln ax+b + C$ |
| 7 | a^x | $\frac{a^x}{\ln a} + C$ |
| 8 | $\sin x$ | $-\cos x + C$ |
| 9 | $\cos x$ | $\sin x + C$ |
| 10 | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\operatorname{tg} x + C$ |
| 11 | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ | $\operatorname{cot} x + C$ |
| 12 | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\operatorname{arctg} x + C$ |
| 13 | $\frac{1}{a^2+x^2}$ | $\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ |
| 14 | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\operatorname{arcsin} x + C$ |
| 15 | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\operatorname{arccos} x + C$ |
| 16 | $\frac{1}{\sqrt{1\pm x^2}}$ | $\ln x+\sqrt{1\pm x^2} + C$ |