MATEMATIKA V EKONOMII – PŘEDNÁŠKA Č. 8:
Aplikace určitého integrálu, nekonečné číselné řady

APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU

Určitý integrál má mnoho aplikací především v technických a přírodovědných oborech. Lze jej využít například k výpočtu:

- obsahu plochy omezené danými křivkami
- objemu rotačního tělesa
- plochy rotačního tělesa
- délky křivky (rektifikaci)
- Řešení diferenciálních rovnic s danými okrajovými nebo počátečními podmínkami

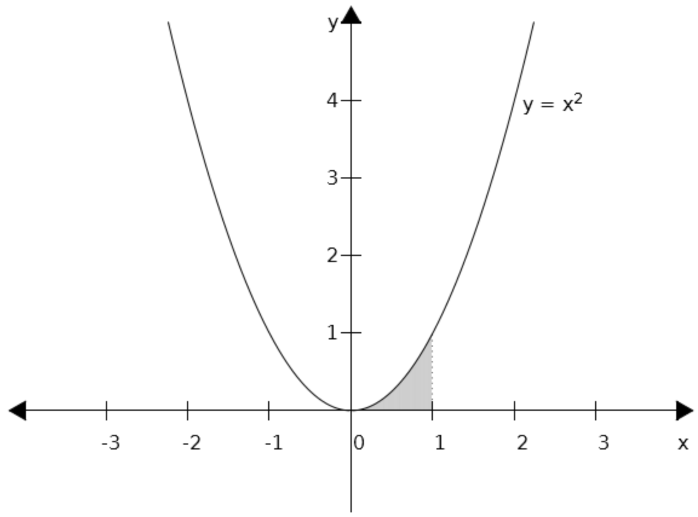
OBSAH PLOCHY VYMEZENÝ DANOU KŘIVKOU
A OSOU X NA DANÉM INTERVALU

Nejjednodušším užitím určitého integrálu je výpočet obsahu plochy pod (nad) danou křivkou, tedy mezi danou křivkou a osou *x* (viz Obr. 9.1.).

Věta 9.1. *Nechť $y = f(x)$ je (všude) nezáporná funkce na intervalu (a,b). Potom obsah plochy S vymezený křivkami $y = f(x)$, x = a, x = b a y = 0 vypočteme užitím Newton-Leibnizovy formule:*

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{9.1}$$

Příklad 9.1. Vypočtěte obsah plochy pod křivkou $y = x^2$ na intervalu $(0,1)$.

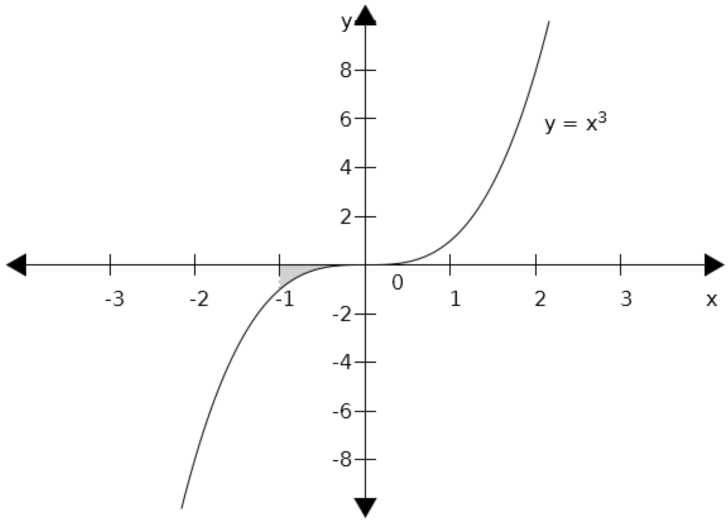


Obr. 9.1.

Pokud je funkce $y = f(x)$ na daném intervalu (a,b) záporná, dostaneme užitím vztahu (9.1) obsah plochy rovněž záporný, což je z geometrického hlediska nesmysl. V tomto případě tedy musíme vzít místo funkce $y = f(x)$ její absolutní hodnotu, čímž je zaručen kladný výsledek:

$$S = \int_a^b |f(x)|\, dx = |F(b) - F(a)| \tag{9.2}$$

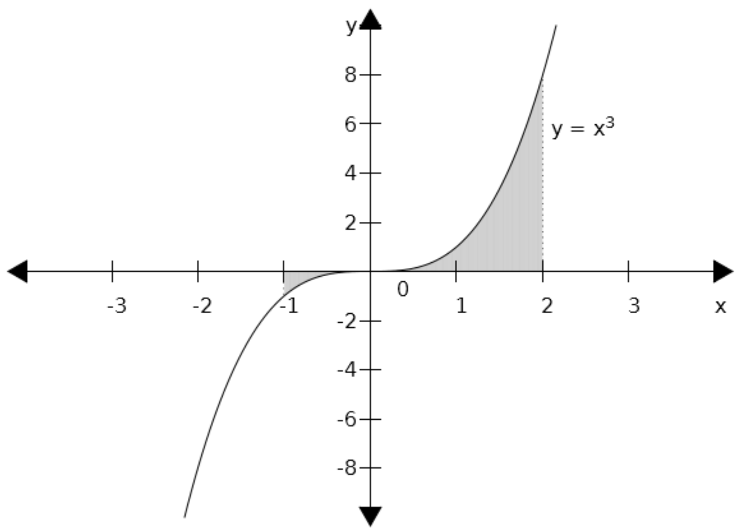
Příklad 9.2. Vypočtěte obsah plochy pod křivkou $y = x^3$ na intervalu $(-1,0)$.



Obr. 9.2.

Pokud je funkce $y = f(x)$ na intervalu (a,b) kladná i záporná, rozdělíme interval (a,b) na několik dílčích na sebe navazujících intervalů tak, aby v každém takovém intervalu byla daná funkce buď jen kladná nebo jen záporná. Vypočteme obsahy ploch pod (nad) danými úseky funkce a vše nakonec sečteme.

Příklad 9.3. Vypočtěte obsah plochy vymezené křivkou $y = x^3$, osou x, a přímkami $x = -1$ a $x = 2$ (viz Obrázek 9.3).



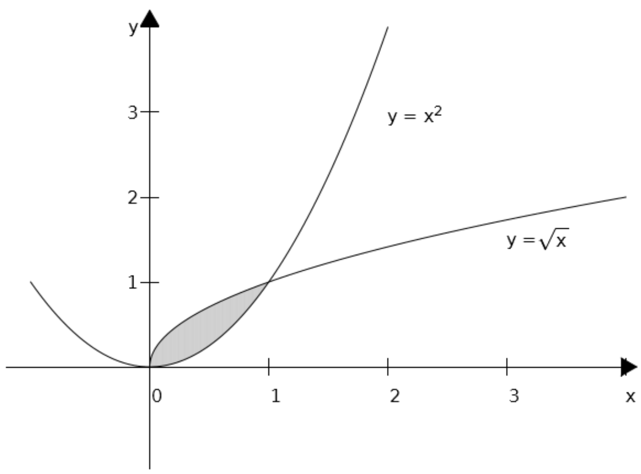
Obr. 9.3.

Obsah plochy sevřené dvěma a více křivkami

Obsah plochy mezi křivkami $f(x)$ a $h(x)$, kde $h(x)$ je horní křivka a $f(x)$ dolní křivka, a kde a a b jsou průsečíky obou křivek, počítáme podle vztahu:

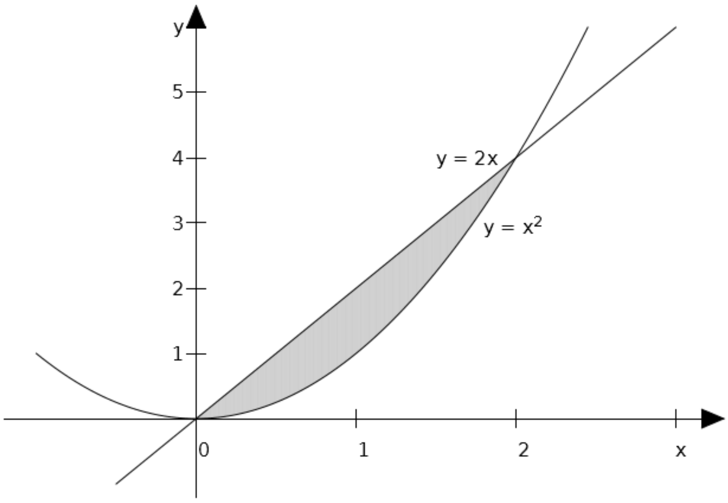
$$S = \int_a^b \left(h(x) - f(x) \right) dx \qquad (9.3)$$

Příklad 9.4. Vypočtěte obsah plochy sevřené křivkami $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$ (viz Obr. 9.4).



Obr. 9.4.

Příklad 9.5. Vypočtěte obsah plochy sevřené křivkami $y = x^2$ a $y = 2x$ (viz Obr. 9.5.).



Obr. 9.5.

OBJEM ROTAČNÍHO TĚLESA

Objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky $y = f(x)$ kolem osy x na intervalu (a,b) počítáme ze vztahu:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Podobně lze vypočítat objem rotačního tělesa, pokud rotujeme křivku kolem osy y, pak jen zaměníme x za y.

Příklad 9.7. Vypočtěte objem tělesa (jde o *rotační paraboloid*), které vznikne rotací křivky $y = \sqrt{x}$ kolem osy x na intervalu $(a,b) = (0,3)$.

Příklad 9.8. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací křivky $y = x^2$ kolem osy x na intervalu $(1,2)$.

CELKOVÝ PŘÍJEM JAKO URČITÝ INTEGRÁL INTENZITY TOKU PŘÍJMU

Celkový příjem může být v některých situacích dán jako součet toku příjmu za nějaké období. To je typické pro příjmy telefonních operátorů, obchodních řetězců, apod., kde lze tok příjmů považovat za *spojitý* (tyto společnosti inkasují od zákazníků každou sekundu), nebo *diskrétní*, což je případ nejrůznějších rent, dividend, apod. V obou případech lze intenzitu toku modelovat pomocí spojitých funkcí (které lze derivovat a integrovat).

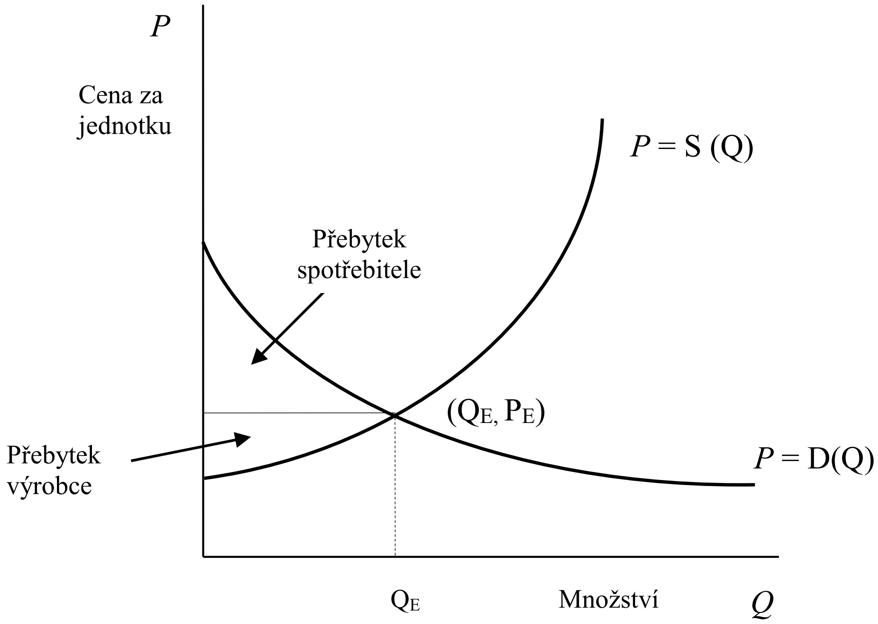
Celkový příjem TR za období (t_1;t_2), jestliže funkce $f(t)$ vyjadřuje *intenzitu toku příjmu* (velikost renty) v čase t, se vypočte jako:

$$TR = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt \qquad (9.4)$$

Příklad 9.10. Určete celkový příjem od 1 do 15 let, je-li hodnota renty v čase t (t jsou roky) dána funkcí $f(t) = \dfrac{120000}{t+5}$ Kč.

PŘEBYTEK SPOTŘEBITELE A VÝROBCE V PODMÍNKÁCH DOKONALÉ KONKURENCE

Víme, že průsečík P_E je průsečíkem křivky nabídky a poptávky, a je nazývaný rovnovážná cena. Někdy jsou spotřebitelé ochotni zaplatit cenu, která je vyšší než rovnovážná cena P_E za každou jednotku produkce. V tomto případě spotřebitelé získávají tím, že jsou schopni koupit produkt za nižší cenu P_E.



Obr. 9.6. Zdroj: Godulová et. al. (2000).

Přebytek spotřebitele CS (customer surplus) je dán plochou oblasti nad horizontálou $P = P_E$ a pod křivkou poptávky, viz Obr. 9.6. Plocha této oblasti se vypočte jako plocha pod křivkou poptávky na intervalu $(0,Q_E)$ mínus plocha obdélníka s šířkou Q_E a výškou P_E. Přebytek spotřebitele CS je tedy:

$$CS = \int_0^{Q_E} D(Q)dQ - Q_E P_E \qquad (9.5)$$

Producent, který je ochoten nabízet produkt za cenu pod P_E, bude realizovat zisk z prodeje produktu za cenu P_E. *Přebytek výrobce PS* (*producer surplus*) je dán plochou oblasti pod horizontální křivkou $P = P_E$ a nad křivkou nabídky, viz Obr. 9.6. Graficky je PS určeno jako plocha obdélníka o šířce Q_E a výšce P_E mínus plocha oblasti pod křivkou nabídky na intervalu $(0,\ Q_E)$. Přebytek výrobce (PS) je tedy:

$$PS = Q_E P_E - \int_0^{Q_E} S(Q)dQ \qquad (9.6)$$

Příklad 9.12. Vypočtěte přebytek spotřebitele a přebytek výrobce v podmínkách dokonalé konkurence za předpokladu, že funkce nabídky $S(Q) = 4 + Q$ a funkce poptávky $D(Q) = \dfrac{54}{Q+1}$.

POJEM NEKONEČNÉ ČÍSELNÉ ŘADY

Číselnou řadou nazýváme součet (reálných) čísel $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Je-li počet sčítanců konečný, mluvíme o **konečné číselné řadě**, je-li počet sčítanců nekonečný ($n \to \infty$), jedná se o **nekonečnou řadu**:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (10.1)$$

Veličina $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ se nazývá *n-tý částečný součet řady*. Je to součet prvních *n* členů řady. **Součet řady s** je pak limitou posloupnosti částečných součtů s_n:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \qquad (10.2)$$

Jestliže má daná řada konečný součet, nazývá se **konvergentní**.

V opačném případě, to jest když je součet nekonečný anebo vůbec neexistuje, je řada **divergentní**.

Řadu mohou obecně tvořit kladné i záporné členy, a proto musíme ještě rozlišovat **neabsolutní konvergenci** a **absolutní konvergenci**: řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ne, pak daná řada konverguje neabsolutně. Absolutní konvergence je tedy „silnější“, a je tomu tak proto, že u řady bez absolutních hodnot se mohou kladné a záporné členy řady částečně odečíst.

O konvergenci řad platí tato tvrzení:

1. Vynechání nebo přidání konečného počtu členů nemá vliv na konvergenci či divergenci řady.
2. Pokud daná řada konverguje absolutně, pak také konverguje neabsolutně. Opačné tvrzení neplatí.

Konvergenci (divergenci) řad zjišťujeme pomocí *podmínek konvergence* a/nebo užitím *kritérií konvergence*, které jsou obsahem následující kapitoly.

Příklad 10.1. Uvažujme dělení pizzy, při kterém nejprve ukrojíme polovinu pizzy, pak ukrojíme polovinu z toho, co zbylo (tedy čtvrtinu původní pizzy), pak ukrojíme polovinu zbytku (tedy osminu původní pizzy), atd. Tímto dělením získáme nekonečnou řadu: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$

Částečné součty této řady jsou:

$s_1 = \frac{1}{2}$,

$s_2 = \sum_{i=1}^{2} a_1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$,

$s_3 = \sum_{i=1}^{3} a_1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$, atd.

Tyto částečné součty se blíží k jedné, a podle vztahu (10.2) je tedy součet řady s = 1. Nakonec odkrojíme celou pizzu (jednotku).■

Příklad 10.3. Určete součet následující nekonečné řady: $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+4+5+6+\ldots.$

PODMÍNKY KONVERGENCE ŘAD, KRITÉRIA KONVERGENCE

Aby řada měla konečný součet (aby konvergovala), musí splňovat **nutnou podmínku konvergence**:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (10.3)$$

Podmínka (10.3) říká, že členy řady se musí zmenšovat k nule. Ale tato podmínka sama o sobě ke konvergenci nestačí, viz např. harmonická řada.

Příklad 10.4. Určete součet *harmonické řady*: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...$

Příklad 10.5. Je řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+4}{3n-1}$ konvergentní nebo divergentní?

Podmínka, která s jistotou zaručuje konvergenci řady, se nazývá *postačující podmínka*. Takovou podmínku nalezli v 19. století matematikové L. A. Cauchy[1] a B. Bolzano[2], a proto se nazývá *Bolzano-Cauchyova nutná a postačující podmínka konvergence nekonečné řady*:

***Věta 10.1**. (Bolzano-Cauchyova podmínka): Řada* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *s kladnými nebo zápornými členy je konvergentní právě tehdy, když ke každému* $\varepsilon>0$ *existuje přirozené číslo N takové, že pro* $n>N$ *a libovolné přirozené číslo p platí:* $\left|a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+p}\right|<\varepsilon$.

[1] L.A. Cauchy (1789-1857), francouzský matematik.
[2] B. Bolzano (1781-1848), český matematik.

V praxi používaná kritéria:

- **Srovnávací kritérium**:

Věta 10.2. *(Srovnávací kritérium). Mějme dvě nekonečné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*, a nechť platí* $a_n \geq b_n$ *pro všechna n větší než nějaký index k (tato podmínka říká, že od k-tého členu jsou všechny členy řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *větší než tytéž členy řady* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*). Nechť dále řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní. Potom také řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje. Řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nazýváme majorantou řady* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

Často používanou řadou pro srovnávací kritérium je *Dirichletova řada*: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Tato řada konverguje pro $\alpha > 1$.

Příklad 10.6. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ pomocí srovnávacího kritéria.

Další kritéria konvergence řad pro řady s kladnými členy: **podílové**, **odmocninové** a **integrální kritérium**:

Věta 10.3. (Limitní podílové kritérium)*. Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je nekonečná číselná řada s kladnými členy, a nechť* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$*. Potom:*

- *Je-li* $L < 1 \Rightarrow$ *řada konverguje.*
- *Je-li* $L > 1 \Rightarrow$ *řada diverguje.*

- *Je-li* $L=1 \Rightarrow$ *nelze rozhodnout.*

Toto kritérium používáme především tehdy, když daná řada obsahuje faktoriál.

Příklad 10.8. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ pomocí podílového kritéria.

Příklad. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^3}$ pomocí podílového kritéria.

Věta 10.4. (Limitní odmocninové kritérium)*. Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je nekonečná číselná řada s kladnými členy, a nechť* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. *Potom:*

- *Je-li* $L < 1 \Rightarrow$ *řada konverguje.*
- *Je-li* $L > 1 \Rightarrow$ *řada diverguje.*
- *Je-li* $L = 1 \Rightarrow$ *nelze rozhodnout.*

Toto kritérium používáme především tehdy, když daná řada obsahuje *n* v exponentu.

Příklad. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$.

Příklad. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln}{n}\right)^{n+1}$.

***Věta 10.5. (Integrální kritérium)**. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy, $a_n = f(n)$, a nechť $f(x)$ je spojitá a nerostoucí funkce na intervalu $(a,+\infty)$. Potom daná řada konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.*

Příklad 10.11. Rozhodněte o konvergenci harmonické řady.