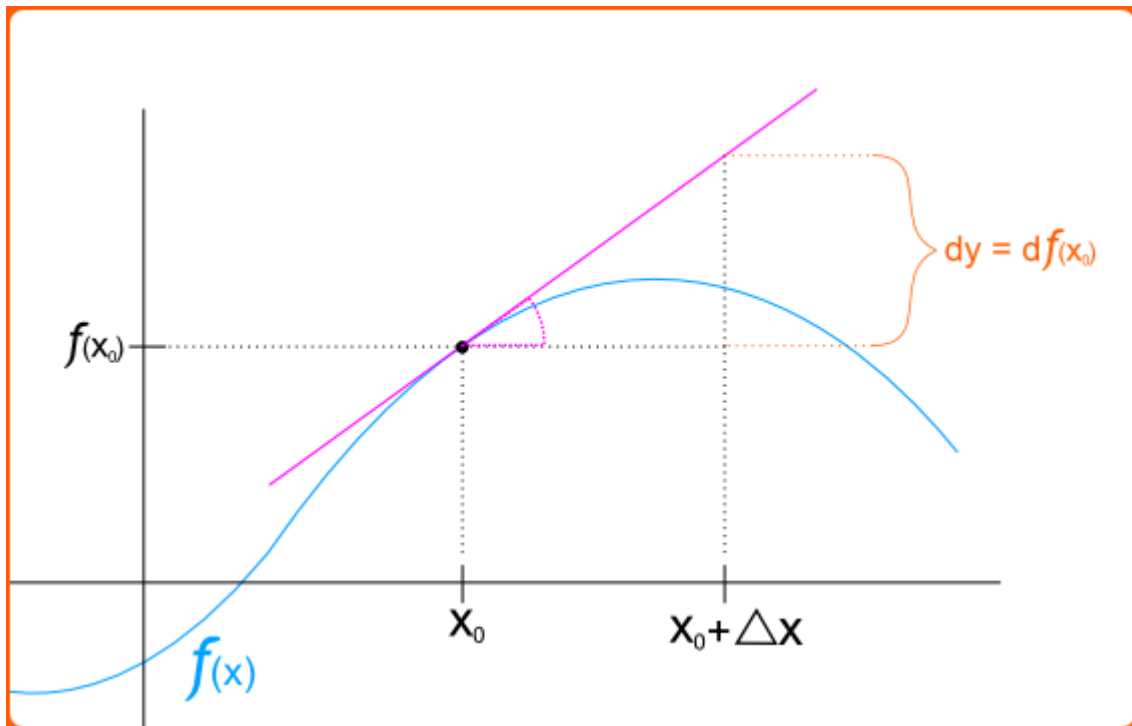


## MATEMATIKA V EKONOMII- PŘEDNÁŠKA Č. 2

-Diferenciálem funkce  $y = f(x)$  nazýváme funkci  $df(x, dx) = f'(x) dx$ .

-Diferenciál funkce vyjadřuje přibližně přírůstek funkce  $df$  při změně argumentu  $x$  o  $dx$  v bodě  $x$ . (Toto přibližné vyjádření je tím přesnější, čím menší je  $dx$ ).



**Příklad 2.6.** Určete přírůstek funkce  $y = x^3$  v bodě  $x = 3$  pro přírůstek argumentu  $dx = 0,2$  pomocí diferenciálu funkce.

## LOGARITMICKÁ DERIVACE

-Používá se pro funkce ve tvaru  $y = f(x)^{g(x)}$ .

-U těchto funkcí nejprve jejich předpis **logaritmujeme**, a teprve potom derivujeme.

---

**Příklad 2.7.** Derivujte: a)  $y = x^x$ , b)  $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\sin x+1}$

## DERIVACE IMPLICITNÍ FUNKCE

U některých funkcí se může stát, že  $y$  nejde vyjádřit jako funkci  $x$ . Například u funkce  $f(x, y) = xy^2 + \log(x - y)$  není možné vyjádřit (osamostatnit vlevo)  $y$ . V takovém případě hovoříme o *implicitní funkci*.

---

**Věta 2.1.** Necht'  $f(x, y) = 0$  je implicitní funkce, která má v bodě  $C$  konečné parciální derivace  $\frac{\partial f(C)}{\partial x}$  a  $\frac{\partial f(C)}{\partial y}$ , a necht'  $\frac{\partial f(C)}{\partial y} \neq 0$ . Derivace implicitní funkce v bodě  $C$  je pak definována takto:

$$y'(C) = -\frac{\frac{\partial f(C)}{\partial x}}{\frac{\partial f(C)}{\partial y}} \quad (2.1)$$

---

**Příklad 2.8.** Derivujte: a)  $f(x, y) = \sin y + 2xy$ , b)  $e^y + e^{2x} + 2x^2 y = 0$ .

### 1.1 TAYLOROVA A MACLAURINOVA ŘADA (POLYNOM)

-Složité funkce, které mají derivace všech řádů (resp. až do  $n$ -tého řádu) v okolí zvoleného bodu  $x = a$ , můžeme za splnění určitých podmínek (konvergence zbytku řady k nule) nahradit jejich **Taylorovou řadou** (**Taylorovým polynomem**  $n$ -tého stupně).

-Vyjádření funkce pomocí polynomu (mnohočlenu) je jednodušší a usnadňuje výpočty.

**Tabulka 2.2.** Mocninné rozvoje vybraných funkcí.

Funkce	Maclaurinův rozvoj	Obor konvergence
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$(-\infty, \infty)$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$(-\infty, \infty)$
$e^x$	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$(-\infty, \infty)$
$\ln(x+1)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$(-1, 1)$

**Příklad.** Exponenciální funkci  $y = e^x$  můžeme nahradit na okolí bodu  $x = 0$  například takto:  $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2}$ , tedy kvadratickým polynomem stupně  $n = 2$ .

**-Taylorova řada** (rozvoj) funkce  $f(x)$  v bodě  $a$  je definována takto:

$$T(f, a, x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

**-Taylorův polynom** stupně  $n$  funkce  $f(x)$  v bodě  $a$  je definován takto:

$$T_n(f, a, x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

-Pokud zvolíme  $a = 0$ , dostaneme **Maclaurinovu řadu resp. polynom**:

$$T(f, 0, x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

---

**Příklad 2.9.** Určete Maclaurinův rozvoj funkce  $f$ : a)  $y = e^x$ , b)  $y = \ln(x+1)$ .

**Příklad.** Určete Taylorův polynom stupně  $n = 4$  funkce  $f$ :  $y = e^x$  v bodě  $x = 3$ .

## Příklady užití (první) derivace v ekonomii

- Mějme funkci  $y = f(x)$ . **Elasticitu** funkce definujeme takto:

$$E(x) = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} y'$$

-Elasticita funkce **udává** přibližnou procentní změnu  $y$  odpovídající jednotkové procentní změně  $x$ . Kladná změna znamená růst, záporná pokles.

---

**Příklad.** Určete elasticitu funkce  $y = x^2 + 5x - 3$  v bodě  $x = 3$ .

-**Cenovou elasticitu poptávky**, kde  $Q(P)$  je funkce poptávky, definujeme takto:

$$E(P) = -\frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP} \quad (2.6)$$

$E(P)$  udává, o kolik procent se změní poptávané množství, jestliže se cena změní o 1 %. Znaménko mínus ve vztahu (2.6) se zavádí proto, aby výsledná elasticita byla kladné číslo.

---

**Příklad 2.11.** Je dána funkce poptávky  $Q(P) = 80 - 4P$ . Určete elasticitu poptávky obecně a pak v bodě  $P = 5$ .

Podle hodnoty elasticity poptávky při dané ceně  $P$  rozlišujeme poptávku:

- elastickou, je-li  $E(P) > 1$ ,
- jednotkově elastickou, je-li  $E(P) = 1$ ,
- neelastickou, je-li  $E(P) < 1$ .

---

**Příklad 2.12.** Je dána nabídka  $Q = 0,5P^2 + 120$ . Určete elasticitu nabídky obecně a pro  $P = 40$ . Dále ověřte, že funkce  $E(P)$  je rostoucí.

### Mezní (marginální) veličiny

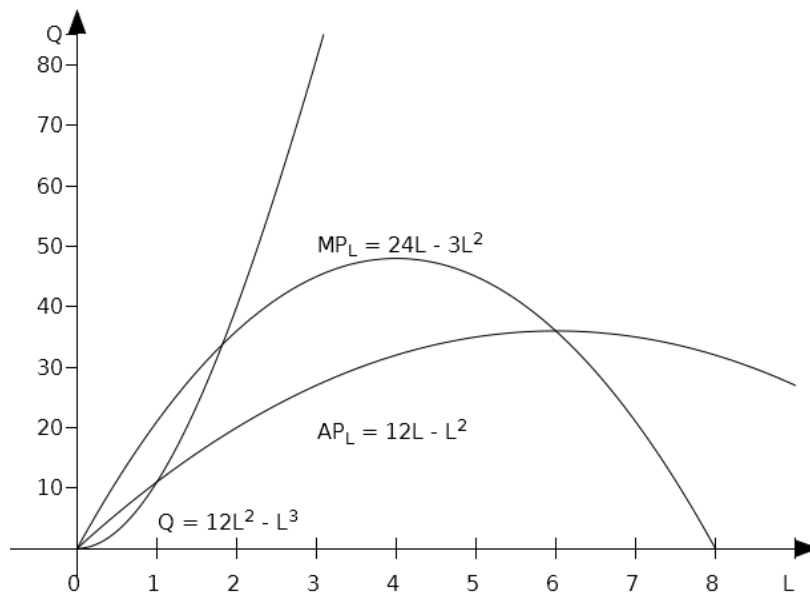
**Mezní produkt práce** (marginal product of labour)  $MP_L$  je derivace funkce produkce podle práce:

$$MP_L = \frac{dQ}{dL} = Q'(L) \quad (2.8)$$

Mezní produkt práce udává, jak se (přibližně) změní produkce při dané práci  $L$ , pokud se práce zvětší o 1 jednotku (jednoho pracovníka) na  $L + 1$ .

---

**Příklad 2.14.** Je dána produkce  $Q = 12L^2 - L^3$ . Určete mezní produkt práce  $MP_L$  obecně a pro  $L = 2$  resp.  $L = 8$ .



Obr. 2.2.

-**Mezní příjem  $MR$**  (marginal revenue) je definován jako derivace celkového příjmu:

$$MR = \frac{dTR(Q)}{dQ}$$

Mezní příjem vyjadřuje (přibližně), jak se změní celkový příjem, jestliže se množství  $Q$  změní o jednotku.

---

**Příklad 2.18.** Celkový příjem je  $TR(Q) = -0,5Q^2 + 25Q$ . Určete:

- průměrný a mezní příjem obecně,
- průměrný a mezní příjem pro  $Q = 10$ ,

-**Mezní náklady**  $MC$  (marginal cost) jsou derivací celkových nákladů:

$$MC = \frac{dTC}{dQ}$$

---

**Příklad 2.19.** Jsou dány celkové náklady  $TC(Q) = 50 + 2Q - 5Q^2 + Q^3$ . Určete  $MC$ .

### Maximalizace zisku, minimalizace nákladů

- **Zisk**  $PR$  (*profit*) se vypočte jako rozdíl celkového příjmu a celkových nákladů:

$$PR(Q) = TR(Q) - TC(Q)$$

-**Maximální zisk** lze určit z funkce  $PR(Q)$  pomocí první (druhé) derivace, nebo pomocí *principu maximalizace zisku*:

$$\text{V bodě maxima zisku je } MR = MC.$$

V maximu tedy platí, že mezní příjem je roven mezním nákladům.

---

**Příklad 2.22.** Jsou dány celkové náklady  $TC(Q) = Q^2 + 5Q + 4$  a celkové příjmy  $TR(Q) = 45Q - Q^2$ . Určete: a) maximum zisku, b) ověřte, že v bodě maxima je  $MR = MC$ .



---

**Příklad 2.23.** Určete maximální zisk firmy, jestliže celkové příjmy jsou popsány funkcí  $TR = 200Q - 4Q^2$  a celkové náklady funkcí  $TC = 100 + 0,2Q^2$ .

---

**Příklad 2.20.** Jsou dány celkové náklady  $TC(Q) = 54 - 6Q + Q^3$ . Minimalizujte průměrné náklady.