MATEMATIKA V EKONOMII – PŘEDNÁŠKA Č. 4
(Parciální zlomky a funkce dvou a více proměnných)

ROZKLAD RACIONÁLNÍ LOMENÉ FUNKCE NA PARCIÁLNÍ ZLOMKY

- ***Racionální lomenou funkcí*** nazýváme výraz $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou dané mnohočleny.
- ***Rozkladem na parciální zlomky*** rozumíme rozklad dané racionální lomené funkce na součet jednodušších (parciálních) zlomků.
- Nejprve ***rozložíme jmenovatel*** $Q(x)$ na součin kořenových činitelů, tedy na součin závorek, v nichž je vždy (x – kořen Q), nebo nerozložitelný kvadratický dvojčlen či trojčlen.
- Při rozkladu Q(x) mohou nastat tyto případy:

a) Všechny kořeny $Q(x)$, označíme je x_1, x_2 až x_k jsou reálná čísla, a žádný kořen se neopakuje (má násobnost jedna). Pak:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots(x-x_k)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \ldots + \frac{K}{x-x_k}$$

b) Všechny kořeny $Q(x)$, označíme je x_1, x_2 až x_k jsou reálná čísla, ale některý kořen, například x_1 se opakuje n-krát (říkáme, že má násobnost n). Pak:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)^n\cdot(x-x_2)\cdot\ldots(x-x_k)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n} + \frac{B}{x-x_2} + \ldots + \frac{K}{(x-x_k)}$$

c) Jmenovatel obsahuje nerozložitelný kvadratický dvojčlen nebo trojčlen násobnosti jedna. Příkladem budiž například x^2+1 nebo x^2+2x+4. Pak:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)\cdot(x-x_1)\ldots} = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)} + \frac{C}{x-x_1}\ldots.$$

Příklad 6.3. Rozložte na parciální zlomky $\dfrac{7x-9}{x^2+x-6}$.

Příklad 6.4. Rozložte na parciální zlomky $\dfrac{3x+3}{(x+2)(x-1)}$.

Příklad 6.5. Rozložte na parciální zlomky $\dfrac{6x^3+21x^2+18x+5}{(x+1)^3 x}$.

Odbočka: Jak dělíme mnohočlen mnohočlenem?

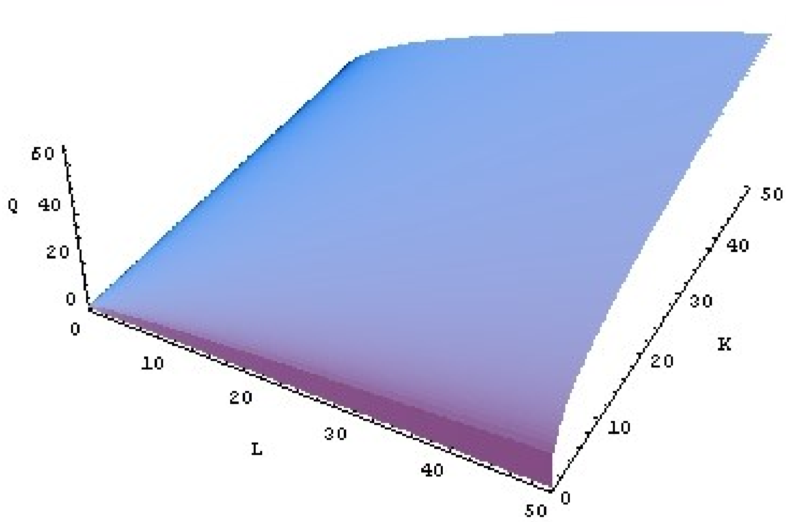
$$\left(3x^3+5x^2+5x+2\right):\left(x^2+x+1\right)$$

Pokud v racionální funkci $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ je stupeň čitatele větší než jmenovatele, nejprve mnohočleny dělíme, teprve poté rozkládáme.

Příklad 6.5. Rozložte na parciální zlomky $\dfrac{3x^2-3x+2}{x^3+x}$

FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

- Funkce **dvou proměnných**: $z = f(x, y)$.
- Například **Cobb-Douglasova produkční funkce** $Q(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$.
- **Graf** funkce dvou proměnných si lze představit jako plochu („krajinu“) v trojrozměrném prostoru:



Obr. 4.6. Graf Cobb-Douglasovy funkce. Zdroj: Wikipedia.

-**Definiční obor** funkce dvou proměnných tvoří body [x, y], pro které má daná funkce smysl. Určujeme jej graficky.

Příklad 4.1. Určete definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{x + y - 2}$.

Příklad 4.2. Určete definiční obor funkce $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}$.

Příklad 4.3. Určete definiční obor funkce $f(x,y)=\log\left(x^2-y\right)$.

Příklad 4.5. Určete definiční obor funkce $f(x,y)=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$.

- **Derivace** funkce dvou proměnných: Nechť funkce $f(x,y)$ je funkcí dvou proměnných x a y. Derivaci funkce dvou proměnných podle jedné z nich nazýváme *parciální derivace*. Pro parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle x respektive y užíváme následující značení:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\quad f'_x(x,y),\quad f_x' \text{ , respektive } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y},\quad f'_y(x,y),\quad f_y'$$

Definice parciálních derivací se zavádí obdobně jako derivace funkce jedné proměnné:

$$f_x'(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},$$

$$f_y'(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

Při výpočtu parciální derivace podle x postupujeme tak, že y považujeme za konstantu (pouze ji opisujeme) a funkci $f(x,y)$ derivujeme podle x. Při výpočtu parciální derivace podle y postupujeme přesně opačně.

Příklad 4.6. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x,y) = x^2 y + 2y^3$.

Příklad 4.7. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x,y) = x^2 e^y + \ln(xy)$.

- **Druhé derivace** funkce dvou proměnných:

Druhá derivace podle *x*: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

Druhá derivace podle *y*: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Smíšená derivace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ respektive $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

U smíšené derivace nezáleží na pořadí derivovaní (věta o záměnnosti pořadí derivování), platí tedy: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Příklad 4.8. Vypočtěte druhé parciální derivace funkce $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 5$.

- **Cobb-Douglasova produkční funkce** udává závislost produkce *Q* na práci *L* a kapitálu *K*:

$$Q = AK^a L^b \tag{4.1}$$

Ve vztahu (4.1) jsou *A*, *a*, *b* kladné konstanty. Konstanta *A* souvisí s technologickým pokrokem: při stejném *K* a *L* vyšší *A* znamená, že je produkce vyšší (ze stejného množství kapitálu a práce se vyprodukuje více díky efektivnějším technologiím). Podle hodnoty *a* + *b* říkáme o produkční funkci, že má:

- konstantní výnosy z rozsahu, je-li $a+b=1$
- rostoucí výnosy z rozsahu, je-li $a+b>1$
- klesající výnosy z rozsahu, je-li $a+b<1$.

- Mezní produkt práce a kapitálu

Derivacemi produkční funkce podle práce respektive kapitálu získáme **mezní produkt práce *MP_L*** respektive **mezní produkt kapitálu *MP_K***:

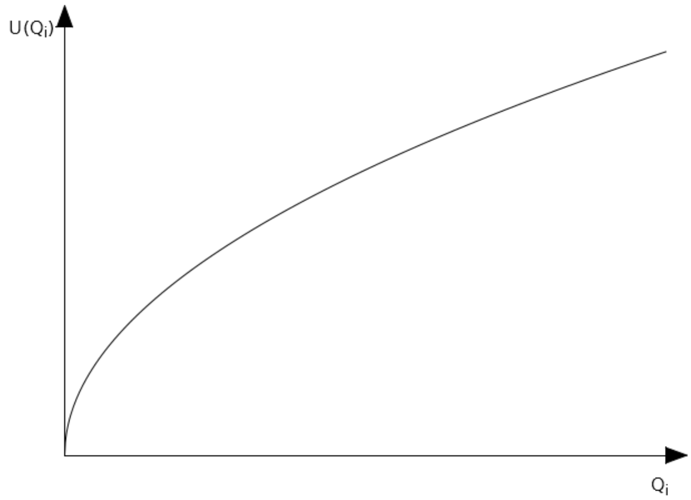
$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L},$$
$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K}$$

Příklad 4.9. Je dána Cobb-Douglasova funkce $Q = 80K^{0,3}L^{0,7}$. Určete:
a) mezní produkt práce a kapitálu,
b) mezní produkt práce pro $K = 100$ a $L = 50$.

- **Funkce užitku**: Mějme n druhů zboží, jejichž množství buď Q_1, Q_2, …, Q_n. Předpokládejme, že spotřebitel je schopen přiřadit každé skupině zboží jednu hodnotu, která vyjadřuje *užitečnost* (*užitek*) dané skupiny zboží. Zmíněné přiřazení nazýváme *funkce užitečnosti* (*utility fiction*), a zapisujeme:

$$U(Q_1, Q_2, ..., Q_n)$$

V dalším výkladu se omezíme pouze na funkce užitečnosti dvou proměnných.



Obr. 4.8. Obvyklý tvar funkce užitku.

- **Mezní užitečnost (užitek)** je derivace užitku:

$$MU_i = \frac{\partial U(Q_1, Q_2, ..., Q_n)}{\partial Q_i}$$

Příklad 4.10. Je dána funkce užitečnosti pro dva druhy zboží $U(Q_1, Q_2) = Q_1\sqrt{Q_2}$. Zjistěte, zda je spotřebitelem preferován stav $Q_1 = 10$, $Q_2 = 5$ nebo stav s hodnotami $Q_1 = 7$, $Q_2 = 8$.

Příklad 4.11. Vypočtěte mezní užitek MU_1 a MU_2 pro funkci $U = Q_1^{0,5} \cdot Q_2^{0,2}$:

a) obecně,

b) pro $Q_1 = 10$ a $Q_2 = 8$.

Příklad 4.12. Pan Tomáš má k dispozici důchod 200 jednotek (například eur). Může si za ně koupit dva statky, které mají cenu $P_1 = 4$ a $P_2 = 2$ jednotky. Funkce užitku U pana Tomáše je dána takto: $U(Q_1, Q_2) = Q_1 \cdot Q_2$, kde Q_1 je množství prvního statku a Q_2 je množství druhého statku. Jaké množství statků má pan Tomáš koupit tak, aby maximalizoval svůj užitek a přitom utratil veškerý důchod?

- **Tečná rovina** a **normála**: Nechť má funkce $z = f(x,y)$ v bodě $C[x_0, y_0, z_0]$ obě parciální derivace. Pak rovnice tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y)$ v bodě $C[x_0, y_0, z_0]$ má tvar:

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(C)\cdot\left(x - x_0\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(C)\cdot\left(y - y_0\right)$$

Normálový vektor (vektor kolmý k tečné rovině):

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(C), \frac{\partial f}{\partial y}(C), -1\right)$$

A **normála** (v parametrickém tvaru):

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(C)\cdot t \\ y &= y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(C)\cdot t \quad , \ t \in R \\ z &= z_0 - t \end{aligned}$$

Příklad 4.13. Je dána funkce $f(x,y) = x^3 + xy^2$.

a) Najděte rovnici tečné roviny ke grafu této funkce v bodě C [2,1,?].

b) Určete normálu k této rovině v daném bodě.

- **Totální diferenciál** funkce dvou proměnných: Totálním diferenciálem (prvního řádu) funkce dvou proměnných $f(x,y)$ v bodě $C=[c_1,c_2,c_3]$ nazýváme výraz:

$$df(C)=\frac{\partial f}{\partial x}(C)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(C)dy\,,$$

pokud obě parciální derivace v bodě *C* existují.
Stejně jako u funkce jedné proměnné vyjadřuje totální diferenciál dvou proměnných (přibližně) přírůstek funkce $f(x,y)$ spojený s malým přírůstkem proměnné *x* (první člen na pravé straně) a proměnné *y* (druhý člen na pravé straně).

Příklad 4.14. Je dána funkce $f(x,y)=3x^2+5xy+y$, bod *C* [1,1,9] a *dx* = 0,1, *dy* = 0,2. Určete:
a) totální diferenciál funkce,
b) přírůstek funkce v bodě *C* pro dané hodnoty *dx* a *dy*.

Totálním diferenciálem druhého řádu nazýváme výraz:

$$d^2 f(C, dx, dy) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C) d^2 x + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(C) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C) d^2 y$$

Totální diferenciál druhého řádu vyjadřuje (přibližně) „přírůstek přírůstku“ funkce. Lze jej využít k hledání maxima a minima funkce dvou (a více) proměnných, viz Kapitola 5.