MATEMATIKA V EKONOMII – PŘEDNÁŠKA Č. 5:
(Tečná rovina, totální diferenciál, lokální a vázané extrémy funkce dvou proměnných)

- **Tečná rovina** a **normála**: Nechť má funkce $z = f(x, y)$ v bodě $C[x_0, y_0, z_0]$ obě parciální derivace. Pak rovnice tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $C[x_0, y_0, z_0]$ má tvar:

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(C) \cdot \left(x - x_0\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(C) \cdot \left(y - y_0\right)$$

Normálový vektor (vektor kolmý k tečné rovině):

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(C), \frac{\partial f}{\partial y}(C), -1\right)$$

A **normála** (v parametrickém tvaru):

$$x = x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(C) \cdot t$$

$$y = y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(C) \cdot t \quad , \ t \in R$$

$$z = z_0 - t$$

Příklad 4.13. Je dána funkce $f(x,y)=x^3+xy^2$.

a) Najděte rovnici tečné roviny ke grafu této funkce v bodě C [2,1,?].

b) Určete normálu k této rovině v daném bodě.

- **Totální diferenciál** funkce dvou proměnných: Totálním diferenciálem (prvního řádu) funkce dvou proměnných $f(x,y)$ v bodě $C=[c_1,c_2,c_3]$ nazýváme výraz:

$$df(C)=\frac{\partial f}{\partial x}(C)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(C)dy\,,$$

pokud obě parciální derivace v bodě *C* existují.
Stejně jako u funkce jedné proměnné vyjadřuje totální diferenciál dvou proměnných (přibližně) přírůstek funkce $f(x,y)$ spojený s malým přírůstkem proměnné *x* (první člen na pravé straně) a proměnné *y* (druhý člen na pravé straně).

Příklad 4.14. Je dána funkce $f(x,y)=3x^2+5xy+y$, bod *C* [1,1,9] a *dx* = 0,1, *dy* = 0,2. Určete:
a) totální diferenciál funkce,
b) přírůstek funkce v bodě *C* pro dané hodnoty *dx* a *dy*.

Totálním diferenciálem druhého řádu nazýváme výraz:

$$d^2 f(C,dx,dy) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C)d^2x + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(C)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C)d^2y$$

Totální diferenciál druhého řádu vyjadřuje (přibližně) „přírůstek přírůstku" funkce. Lze jej využít k hledání maxima a minima funkce dvou (a více) proměnných, viz Kapitola 5.

- **Lokální extrémy funkce:** Má-li funkce dvou proměnných $f(x,y)$ v jistém bodě (x,y) maximum nebo minimum, a existují obě parciální derivace, pak platí: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$.

Tato podmínka však není postačující, neboť v daném bodě může být i inflexní (sedlový) bod.

- **Existenci** maxima (minima) funkce při splnění určitých podmínek zaručuje následující věta:

***Věta 5.1 (Weierstrassova)**. Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na uzavřené a omezené oblasti $M \subset R^2$. Pak funkce $f(x,y)$ nabývá na oblasti M (globálního) maxima i minima.*

Poznámka: Funkce může mít extrémy i v bodech, v nichž některá první parciální derivace neexistuje. Takové body se musí vyšetřit zvlášť a v dalším výkladu se jimi nebudeme zabývat.

- Bod, v němž má funkce všechny první derivace nulové, se nazývá **stacionární bod** nebo též **bod podezřelý z extrému**, a bude značen *C*.

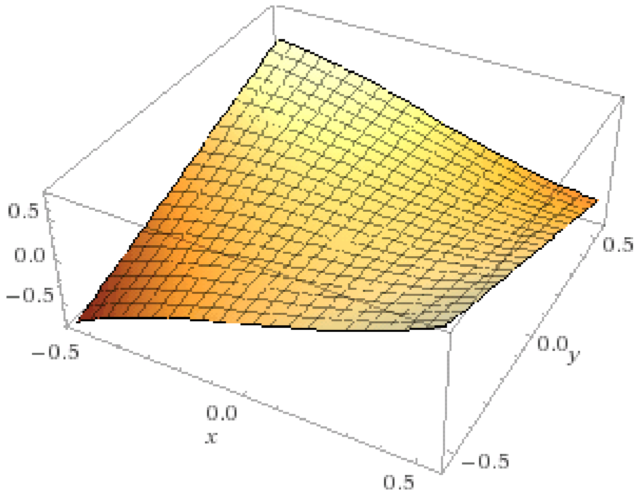
- O tom, která alternativa nastává, rozhodneme na základě druhých parciálních derivací, z nichž sestavíme **Hesseovu** matici a její determinant zvaný **hessián**:

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

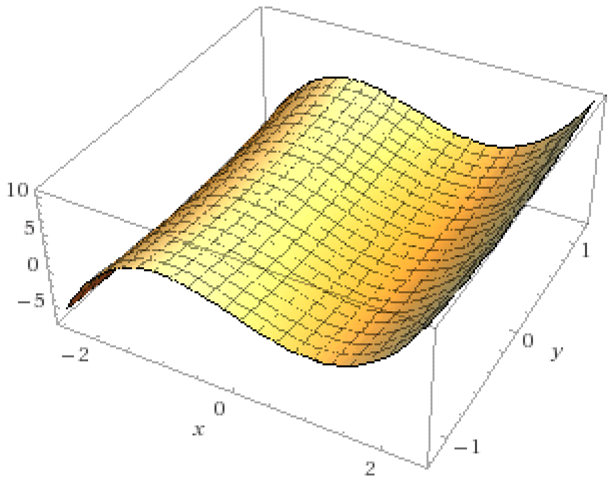
Do hessiánu dosadíme souřadnice bodu C a označíme: $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C)$ a $D_2 = H_f(C)$. D_2 je determinant Hesseovy matice. Pro určení extrému pak platí následující pravidlo:

- $D_2 > 0$: v bodě C je **EXTRÉM**, a to (lokální ostré) **MINIMUM**, pokud je $D_1 > 0$; a (lokální ostré) **MAXIMUM**, pokud je $D_1 < 0$.
- $D_2 < 0$: v bodě C je sedlo (inflexní bod).
- $D_2 = 0$: v daném bodě může (ale nemusí) být extrém, o extrému se musí rozhodnout jiným způsobem, například pomocí totálního diferenciálu druhého či vyššího řádu.

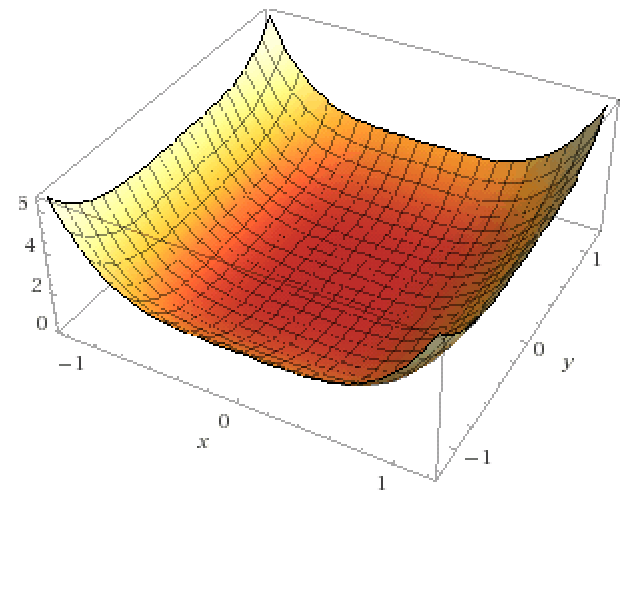
Příklad 5.1. Určete lokální extrémy funkce: $f(x,y) = x^3 - 2xy$



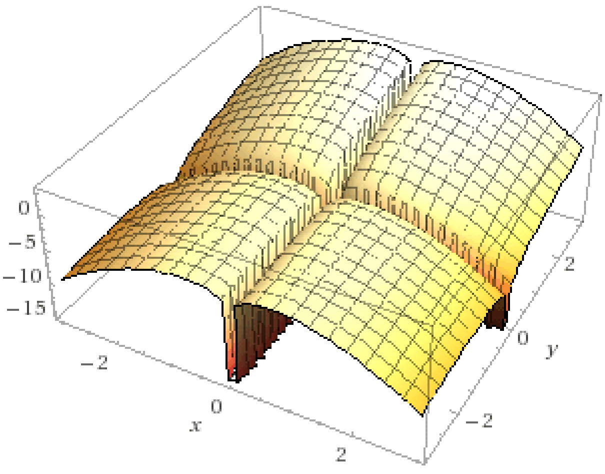
Příklad. Určete lokální extrémy funkce: $f(x,y) = x^3 - 3x + y^2 + 1$



Příklad 5.3. Určete lokální extrémy funkce: $f(x, y) = 2x^4 + y^4$.



Příklad 5.4. Určete lokální extrémy funkce: $f(x,y)=\ln\left(xy\right)-x^2+y$.



- Vázané extrémy: kromě funkce $f(x,y)$ je ještě zadána **vazba** (omezující podmínka pro *x* a *y*) ve tvaru $g(x,y)=0$. Hledáme extrémy funkce $f(x,y)$, které jsou vázány (leží na ní) křivkou $g(x,y)=0$.

Budeme používat dvě metody:

a) **Dosazovací metoda**: z vazby $g(x,y)=0$ vyjádříme *x* nebo *y* a dosadíme do $f(x,y)$, čímž získáme funkci jedné proměnné, a extrémy tedy hledáme podobně jako u funkce jedné proměnné. Tuto metodu použijeme v případě, že z rovnice vazby lze osamostatnit *x* nebo *y*.

b) **Lagrangeova metoda neurčitých koeficientů**: sestavíme Lagrangeovu funkci $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$, kde λ je Lagrangeův multiplikátor. Poté vypočteme parciální derivace *L* a položíme je rovny 0. Jako třetí rovnici pro tři neznámé *x*, *y*, λ použijeme rovnici vazby. Vyřešíme soustavu a výsledné „podezřelé" body *C* dosadíme do hessiánu, pomocí kterého rozhodneme, zda se jedná o maximum, minimum nebo inflexní bod.

Pro určení extrému platí následující pravidlo:

- $D_2 > 0$: v bodě C je **EXTRÉM**, a to (lokální ostré) **MINIMUM**, pokud je navíc $D_1 > 0$; a (lokální ostré) **MAXIMUM**, pokud je $D_1 < 0$.
- $D_2 \leq 0$: o extrému se musí rozhodnout jiným způsobem.

U Lagrangeovy metody můžeme o charakteru kritického bodu *C* rozhodnout i bez hessiánu, pokud jsou splněny podmínky Věty 5.1, tedy pokud je funkce definovaná na omezené a uzavřené oblasti: spočteme hodnotu všech kritických bodů, a bod s největší (nejmenší) hodnotou bude vázaným maximem (minimem) dané funkce. Omezenou a uzavřenou oblastí může být například kružnice, elipsa, úsečka, apod.

Příklad 5.6. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) : x - y + 1 = 0$.

Příklad 5.7. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = x + y + 3$, $g(x, y): x^2 + y^2 - 2 = 0$.

MAXIMALIZACE PŘÍJMU

Příklad 5.9. Firma vyrábí dva druhy zboží, jejich množství označme Q_1 a Q_2. Příjem firmy je dán funkcí $TR(Q_1, Q_2) = 50Q_1 + 20Q_2 - 2Q_1^2 - 5Q_2^2$. Najděte maximum příjmu.

MINIMALIZACE NÁKLADŮ

Příklad 5.13. Jsou dány celkové náklady: $TC(x, y) = 100 - 32x - 30y + x^4 + 3y^2$. Najděte minimum nákladů.