MATEMATIKA V EKONOMII – PŘEDNÁŠKA Č. 6: Vázané extrémy, neurčitý integrál, metoda per partes, integrace racionálních funkcí

VÁZANÉ EXTRÉMY

Kromě funkce $f(x, y)$ je ještě zadána **vazba** (omezující podmínka pro x a y) ve tvaru $g(x, y) = 0$. Hledáme extrémy funkce $f(x, y)$, které jsou vázány (leží na ní) křivkou $g(x, y) = 0$.

Budeme používat dvě metody:

a) **Dosazovací metoda**: z vazby $g(x, y) = 0$ vyjádříme x nebo y a dosadíme do $f(x, y)$, čímž získáme funkci jedné proměnné, a extrémy tedy hledáme podobně jako u funkce jedné proměnné. Tuto metodu použijeme v případě, že z rovnice vazby lze osamostatnit x nebo y.

b) **Lagrangeova metoda neurčitých koeficientů**: sestavíme Lagrangeovu funkci $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, kde λ je Lagrangeův multiplikátor. Poté vypočteme parciální derivace L a položíme je rovny 0. Jako třetí rovnici pro tři neznámé x, y, λ použijeme rovnici vazby. Vyřešíme soustavu a výsledné „podezřelé" body C dosadíme do hessiánu, pomocí kterého rozhodneme, zda se jedná o maximum, minimum nebo inflexní bod.

Pro určení extrému platí následující pravidlo:

- $D_2 > 0$: v bodě C je **EXTRÉM**, a to (lokální ostré) **MINIMUM**, pokud je navíc $D_1 > 0$; a (lokální ostré) **MAXIMUM**, pokud je $D_1 < 0$.
- $D_2 \leq 0$: o extrému se musí rozhodnout jiným způsobem.

U Lagrangeovy metody můžeme o charakteru kritického bodu C rozhodnout i bez hessiánu, pokud jsou splněny podmínky Věty 5.1, tedy pokud je funkce definovaná na omezené a uzavřené oblasti: spočteme hodnotu všech kritických bodů, a bod s největší (nejmenší) hodnotou bude vázaným maximem (minimem) dané funkce. Omezenou a uzavřenou oblastí může být například kružnice, elipsa, úsečka, apod.

Příklad 5.6. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y): x - y + 1 = 0$.

Příklad 5.7. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = x + y + 3$, $g(x, y): x^2 + y^2 - 2 = 0$.

MAXIMALIZACE PŘÍJMU

Příklad 5.9. Firma vyrábí dva druhy zboží, jejich množství označme Q_1 a Q_2. Příjem firmy je dán funkcí $TR(Q_1, Q_2) = 50Q_1 + 20Q_2 - 2Q_1^2 - 5Q_2^2$. Najděte maximum příjmu.

MINIMALIZACE NÁKLADŮ

Příklad 5.13. Jsou dány celkové náklady: $TC(x, y) = 100 - 32x - 30y + x^4 + 3y^2$. Najděte minimum nákladů.

POJEM NEURČITÉHO INTEGRÁLU, ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

- Funkce $F(x)$ se nazývá **primitivní funkcí** k funkci $f(x)$ na otevřeném intervalu $J \subseteq R$ právě tehdy, když $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in J$. Primitivní funkce existuje ke každé spojité funkci na J.
- Množina všech primitivních funkcí k dané funkci se nazývá **neurčitý integrál, a značí se takto:**

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

kde $\int$ je integrační znak,
x integrační proměnná,
$f(x)$ integrovaná funkce neboli integrand,
$F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$,
C integrační konstanta.

Neurčitý integrál je lineární operátor, což znamená, že splňuje následující dvě podmínky:

i) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$,

ii) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Tabulka 6.1. Základní integrály.

řádek	$f(x)$	$\int f(x)dx$
1	0	C
2	1	x + C
3	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ + C
4	e^x	e^x + C
5	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$ + C
6	$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
7	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$ + C
8	$\sin x$	$-\cos x$ + C
9	$\cos x$	$\sin x$ + C
10	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}x$ + C

11	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	cotg$x$ + C
12	$\frac{1}{1+x^2}$	arctg$x$ + C
13	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
14	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arcsin$x$ + C
15	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arccos$x$ + C
16	$\frac{1}{\sqrt{1\pm x^2}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{1\pm x^2}\right\|$ + C

Příklad 6.2. Integrujte:

a) $\int x^2 dx$.

b) $\int \left(x^3 + 2x^2 + 6x + 1 \right) dx$.

c) $\int \sqrt[3]{x} dx$.

d) $\int \frac{1}{x^3} dx$.

e) $\int \left(5 \sin x - 2 \cos x + 3^x \right) dx$.

INTEGRACE SOUČINU FUNKCÍ (METODA PER PARTES)

Smyslem této metody je **rozložit** jeden složitější integrál **na dva jednodušší členy** (odtud název metody: *per partes* je latinsky „po částech“).

- Vzorec, který používáme při integraci per partes, si odvodíme z pravidla pro derivaci součinu dvou funkcí, které označíme $u(x)$ a $v(x)$.

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

Nyní osamostatníme vlevo člen uv': $uv' = (uv)' - u'v$, a tuto rovnost integrujeme:

$$\int uv'dx = \int (uv)'dx - \int u'vdx$$

Prostřední člen obsahuje integrál i derivaci, proto se tyto dvě operace vyruší, a dostaneme:

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

- Důležitá je **správná volba** funkcí u a v'. Nesprávná volba funkcí vede k tomu, že složitost úlohy naroste. V takovém případě je zapotřebí zvolit funkce u a v' opačně.

Příklad 6.7. Vypočtěte: $\int x \cdot e^x dx$.

Příklad 6.8. Vypočtěte: $\int x \cdot \ln x dx$.

Příklad 6.10. Vypočtěte: $\int arctgx dx$.

Příklad 6.11. Vypočtěte: $\int \sin x e^x dx$.

INTEGRACE RACIONÁLNÍCH FUNKCÍ (METODA PARCIÁLNÍCH ZLOMKŮ)

- Racionální funkcí rozumíme výraz $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde *P*(x) a *Q*(x) jsou polynomy proměnné *x*. Budeme předpokládat, že stupeň polynomu *P*(*x*) je menší než stupeň polynomu *Q*(*x*). K integraci (ryzích) racionálních funkcí ve využívá metoda rozkladu na *parciální zlomky*. Smyslem této metody je rozložit zadanou (a obvykle složitou) racionální funkci na součet „nejjednodušších“ (*parciální* znamená „částečný“) zlomků.

Příklad. Vypočtěte $\int \frac{5x+8}{x^2+2x-8}dx$.

Příklad. Vypočtěte: $\int \frac{5x^2-17x+12}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

Příklad. Integrujte $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$.

Příklad. Integrujte: $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}\,dx$.

CELKOVÉ NÁKLADY A CELKOVÉ PŘÍJMY

- V ekonomii lze (neurčitý) integrál využít k výpočtu **celkových příjmů** nebo **celkových nákladů,** pokud jsou známy (dány) mezní příjmy respektive mezní náklady.

- Funkce **celkových nákladů *TC*(*x*)** a funkce **mezních nákladů *MC*(*x*)**, kde x je počet výrobků, spolu souvisejí vztahem:

$$TC(x) = \int MC(x)dx + C \tag{6.1}$$

Vztah (6.1) říká, že celkové náklady jsou součtem mezních nákladů. Integrační konstanta C se určí z jedné známé hodnoty $TC(x)$ pro dané x. Stejný vztah platí také pro **celkové příjmy *TR*(*x*)** a **mezní příjmy *MR*(*x*):**

$$TR(x) = \int MR(x)dx + C \tag{6.2}$$

Příklad 6.12. Určete funkci celkových nákladů, jestliže funkce mezních nákladů $MC(x) = 140e^{0,2x}$ a náklady na produkci 10 výrobků činí 6000 Kč.

Příklad 6.14. Mezní příjmy jsou popsány funkcí $MR = 140 - 6x + 2$, najděte funkci celkového příjmu.