MATEMATIKA – seminář č. 10 – NEKONEČNÉ ŘADY

NEKONEČNÁ ŘADA A JEJÍ SOUČET

Nechť a_n je posloupnost, pak symbol $a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá nekonečná řada. Součet nekonečné řady s zjistíme jako limitu posloupnosti částečných součtů s_n : $\lim_{n\to\infty} s_n$ (to znamená, že sečteme nejprve 2 členy, pak 3 členy, 4 členy, atd, a zjistíme, čemu se tyto součty blíží). Pokud je součet řady konečný, nazývá se řada KONVERGENTNÍ. Pokud je součet řady nekonečný, nebo řada nemá součet, pak se nazývá DIVERGENTNÍ.

GEOMETRICKÁ ŘADA

Speciální případ řady, která vznikne součtem členů geometrické posloupnosti s kvocientem q (u geometrické posloupnosti je podíl sousedních členů a_n a a_{n+1} vždy konstantní a rovný q). Tato řada je konvergentní, pokud $|q| < 1$. Její součet je: $s = \frac{a_1}{1-q}$.

NUTNÁ PODMÍNKA KONVERGENCE ŘAD, KRITÉRIA KONVERGENCE

Nutná podmínka konvergence: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Tato podmínka říká, že členy řady musí klesat k nule, ale tato podmínka sama o sobě ke konvergenci nestačí, viz harmonická řada.

KRITÉRIA (viz níže):

i) srovnávací (důležitá je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$)
ii) podílové (používáme, když řada obsahuje faktoriál)
iii) odmocninové (používáme, když řada obsahuje n-tou mocninu)
iv) integrální (je univerzální)
v) Leibnizovo (pro řady alternující)

1. Rozhodněte, zda-li je daná řada geometrická, pokud ano, určete její součet.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot 2^{2n-1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^{n+1}$

Výsledky: a) řada je geometrická (G), konvergentní (K), součet: s = 1 b) G, K, $s = \frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$, c) G, divergentní (D) , d) dvě G řady, K, s = 3/2 , e) G, D.

2. Dva speciální případy na zapamatování:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

$$\sum_{1}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+...$$

Výsledky: První řada je harmonická a diverguje, druhá řada nemá součet, tudíž také diverguje.

3. Určete součet řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

Výsledky: a) 1/2 , b) 3/4 , c) 3/2

4.) Rozhodněte o konvergenci/divergenci řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{8^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+6}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{2n+1}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\text{arctg}\left(n^2+1\right)\right)^n$ h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$ j) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

Výsledky: a) D (podle srovnávacího kritéria s řadou 1/n), b) D (podle srovnávacího kritéria s řadou 1/n), c) K (podílové) , d) K (odmocninové) , e) D (není splněna nutná podmínka konvergence), f) D (není splněna nutná podmínka konvergence), g) D (není splněna nutná podmínka konvergence), , h) K (odmocninové) , i) D (integrální) , j) D (integrální), k) K (srovnávací) , l) K (srovnávací).

5. Rozhodněte o konvergenci alternujících řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+200}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}$

Výsledky: a) K relativně (Leibnizovo), b) K absolutně (Leibnizovo a odmocninné).

KRITÉRIA - TEORIE

Srovnávací kritérium: Mějme dvě nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, a nechť platí $a_n \geq b_n$ pro všechna n větší než nějaký index k (tato podmínka říká, že od k-tého členu jsou všechny členy řady $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ větší než tytéž členy řady $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$). Nechť dále řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je konvergentní. Potom také řada $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konverguje. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ nazýváme *majorantou* řady $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

Srovnávací kritérium říká, že pokud k dané řadě ($\sum_{n=1}^{\infty} b_n$) najdeme nějakou konvergentní řadu ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$), jejíž členy jsou větší než členy dané řady, pak daná řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (což je logické, neboť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ obsahuje větší členy, a její součet je konečný, tudíž řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s menšími členy musí mít rovněž konečný (a menší) součet).

Analogicky můžeme rozhodnout o divergenci dané řady, pokud její členy jsou větší než členy jiné divergentní řady.

Často používanou řadou pro srovnávací kritérium je **Dirichletova řada**: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Tato řada konverguje pro $\alpha > 1$. To znamená, že například $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,2}}$ je konvergentní ($\alpha = 1,2 > 1$), zatímco řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ je divergentní ($\alpha = 0,5$). Pro $\alpha = 1$ dostaneme již známou harmonickou řadu, která je divergentní.

Příklad. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ pomocí srovnávacího kritéria.

Zadaná řada má členy $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, které jsou menší než členy $\frac{1}{n^2}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Tato řada je majorantou zadané řady, jedná se o Dirichletovu řadu, která je konvergentní ($\alpha = 2$). Proto podle srovnávacího kritéria konverguje i zadaná řada.

Příklad. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$ pomocí srovnávacího kritéria.

Zadaná řada má členy $\frac{1}{n \cdot 3^n}$, které jsou menší než členy $\frac{1}{3^n}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ je tedy majorantou zadané řady. Zároveň je to řada geometrická s kvocientem $q = \frac{1}{3}$, a tudíž je konvergentní. Proto konverguje i zadaná řada.

Nyná si uvedeme další kritéria konvergence řad pro řady s kladnými členy. Na závěr pak uvedeme jedno kritérium pro řady s alternujícícimi členy (řady, ve kterých se střídají kladné a záporné členy).

Limitní podílové kritérium:

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečná číselná řada s kladnými členy, a nechť $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Potom:

- Je-li $L < 1 \Rightarrow$ řada konverguje.
- Je-li $L > 1 \Rightarrow$ řada diverguje.
- Je-li $L = 1 \Rightarrow$ nelze rozhodnout.

Toto kritérium používáme především tehdy, když daná řada obsahuje faktoriál.

Příklad. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ pomocí podílového kritéria.

Nejprve vypočteme limitu L: $L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)} = 0$. Podle limitního podílového kritéria řada konverguje.

Příklad. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^5}$ pomocí podílového kritéria.

Vypočteme limitu L: $L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)^5}}{\frac{e^n}{n^5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5 e^{n+1}}{(n+1)^5 e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{(n+1)^5} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}}{e^n} = 1 \cdot e = e$.

Protože $L > 1$, řada diverguje (mimochodem, řada nesplňuje ani nutnou podmínku konvergence).

Limitní odmocninové kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečná číselná řada s kladnými členy, a nechť $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Potom:

- Je-li $L < 1 \Rightarrow$ řada konverguje.
- Je-li $L > 1 \Rightarrow$ řada diverguje.
- Je-li $L = 1 \Rightarrow$ nelze rozhodnout.

Toto kritérium používáme především tehdy, když daná řada obsahuje *n* v exponentu.

Příklad. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

Použijeme limitní odmocninové kritérium: $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{3}{5}$.

Protože $L = \frac{3}{5} < 1$, řada konverguje.

Limitní podílové i odmocninové kritérium lze použít i pro řady se zápornými členy (v tom případě při výpočtu limity L počítáme s absolutními hodnotami členů řady).

Integrální kritérium

Integrální kritérium je univerzální v tom smyslu, že pro ně není požadován nějaký speciální tvar řady. Pomocí tohoto kritérium navíc dokážeme rozhodnout o konvergenci i u řad, pro něž předešlá kritéria selhávají (například u harmonické řady).

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy, $a_n = f(n)$, a nechť $f(x)$ je spojitá a nerostoucí funkce na intervalu $(a,+\infty)$. Potom daná řada konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Příklad. Rozhodněte o konvergenci harmonické řady.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x|\right]_1^{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty$$

Daný nevlastní integrál je nekonečný, proto řada diverguje.

Pro *alternující řady* ve tvaru $\sum_1^{\infty} (-1)^n a_n$ se používá Leibnizovo kritérium. Alternující řady jsou řady, v nichž se střídají kladné a záporné členy. Střídání znamének členů řady způsobuje výraz $(-1)^n$.

Leibnizovo kritérium: Nechť $\sum_1^{\infty} (-1)^n a_n$ je alternující řada a nechť platí:

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ii) $a_{n+1} \le a_n, \forall n \in N$

Pak je řada $\sum_1^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ konvergentní.