

MATEMATIKA V EKONOMII – seminář č. 5 – Totální diferenciál, rovnice
tečné roviny

1. Určete totální diferenciál funkce $f(x, y) = x^3 + 5xy$ obecně a v bodě C [-1,1].

Výsledky: $df = (3x^2 + 5y)dx + 5xdy$, $df = 8dx - 5dy$

2. Je dána Cobb-Douglasova produkční funkce $Q(K, L) = 20K^{0,5} \cdot L^{0,5}$.

- Určete parciální derivace podle K a L ,
- Vyjádřete totální diferenciál funkce Q ,
- Určete totální diferenciál v bodě C [4,1],
- Určete změnu Q v bodě C [4,1], jestliže $dK = 0,2$ a $dL = 0,1$.

Výsledky: a) $\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{10\sqrt{L}}{\sqrt{K}}$, $\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{10\sqrt{K}}{\sqrt{L}}$, b) $dQ = \frac{10\sqrt{L}}{\sqrt{K}}dK + \frac{10\sqrt{K}}{\sqrt{L}}dL$, c) $dQ = 5dK + 20dL$, d) $dQ = 3$

3. Matematický model příjmu R (revenue) pro daný druh produktu jisté firmy je funkcí ceny p (price) a nákladů na reklamu A (advertising expenditures): $R = \frac{54\sqrt{A}}{\sqrt{p}}$. Určete:

- změnu příjmu R v závislosti na změně ceny p .
- změnu příjmu R v závislosti na změně nákladů na reklamu A .
- Předpokládejme, že $p = 9$ a $A = 64$. Vyjádřete totální diferenciál a určete jeho hodnotu, jestliže $dp = -0,4$ a $dA = 0,2$.

Výsledky: a) $\frac{\partial R}{\partial p} = -\frac{27\sqrt{A}}{\sqrt{p^3}}dp$, b) $\frac{\partial R}{\partial A} = \frac{27}{\sqrt{A}\sqrt{p}}dA$, c) $dR = -8dp + \frac{9}{8}dA = 3,425$

4. Je dána funkce $f(x, y) = 2x^2 + xy^2$.

- Najděte rovnici tečné roviny ke grafu této funkce v bodě C [2,1, ...].
- Určete normálu k této rovině v daném bodě.

$$x = 2 + 9t$$

Výsledky: a) $9x + 4y - z - 12 = 0$, b) $y = 1 + 4t$, $t \in R$.

$$z = 10 - t$$

5. Je dána funkce $f(x, y) = x^3y^2$.

- Najděte rovnici tečné roviny ke grafu této funkce v bodě C [-2,2, ..].
- Určete normálu k této rovině v daném bodě.

$$x = -2 + 48t$$

Výsledky: a) $48x - 32y - z + 128 = 0$, b) $y = 2 - 32t$, $t \in R$.

$$z = -32 - t$$