

**MATEMATIKA V EKONOMII – PŘEDNÁŠKA Č. 10**  
(Nekonečné číselné řady-pokračování, nekonečné funkční řady)

**Příklad.** Rozhodněte o konvergenci následujících nekonečných řad. U geometrických řad určete součet

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{n!}$

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$

f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^n$

## NEKONEČNÁ FUNKČNÍ ŘADA A JEJÍ SOUČET

-Nekonečná řada, jejíž členy jsou funkce, se nazývá **nekonečná funkční řada**.

---

**Příklad.** Mějme funkční řadu  $\sum_{x=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ . Ukážeme si některé její vlastnosti...

Nechť  $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$  je posloupnost funkcí. **Nekonečná funkční řada** je symbol:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

Součet funkční řady je funkce  $s(x)$ , kterou získáme (stejně jako u nekonečných číselných řad) jako limitu posloupnosti částečných součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x)$$

-Řada je **konvergentní**, jestliže funkční řada  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$  konverguje k funkci  $s(x)$  na jisté množině  $M$ .

-Pokud k  $s(x)$  konverguje i řada absolutních hodnot  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ , hovoříme o **absolutní konvergenci**.

-Množina všech  $x \in M$ , pro které řada konverguje (konverguje absolutně), se nazývá **obor konvergence (obor absolutní konvergence)**, a v dalším textu bude značen jako *OK (OAK)*.

## GEOMETRICKÁ ŘADA

Geometrickou řadou nazýváme řadu ve tvaru:  $\sum_{n=1}^{\infty} f^n(x)$ ,

Označíme-li  $f(x) = q$ , pak řada konverguje pro  $|q| < 1$ , a součet řady:

$$s(x) = \frac{a_1}{1 - q} \quad (11.5)$$

---

**Příklad 11.6.** Určete obor konvergence řady  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  a její součet.

---

**Příklad.** Určete obor konvergence a součet řady  $\sum_{n=1}^{\infty} (x+3)^n$ .

---

**Příklad 11.9.** Určete obor konvergence řady  $\sum_{n=0}^{\infty} \ln^n x$ .

---

**Příklad 11.10.** Určete obor konvergence řady  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$ .

## MOCNINNÁ ŘADA

-**Mocninná řada** je speciálním případem obecné funkční řady, a je dána následujícím předpisem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a)^1 + c_2 (x-a)^2 + \dots$$

-Mocninná řada konverguje absolutně na intervalu  $(a-\rho, a+\rho)$ , kde  $a$  je **střed řady** a  $\rho$  je **poloměr konvergence**.

-Tento interval se nazývá **interval konvergence (IK)**. Interval konvergence je souměrný podle středu  $a$ , a obsahuje všechna  $x$ , která mají od středu menší vzdálenost než  $\rho$ .

- Poloměr intervalu konvergence  $\rho$  se vypočte pomocí následujících limit:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad (11.3)$$

nebo

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \quad (11.4)$$

V krajních bodech intervalu  $a + \rho$ ,  $a - \rho$ , řada může, ale nemusí konvergovat, a proto se tyto případy musí vyšetřit zvlášť. Obecně pak platí:  $IK \subseteq OAK \subseteq OK$ .

---

**Příklad 11.2.** Určete konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$ .

---

**Příklad 11.3.** Určete konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^n}$ .

---

**Příklad 11.4.** Určete konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+5)$ .

---

**Příklad 11.5.** Určete konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{n^3}$ .