MATEMATIKA V EKONOMII – PŘEDNÁŠKA Č. 9

(Nekonečné číselné řady)

POJEM NEKONEČNÉ ČÍSELNÉ ŘADY

Číselnou řadou nazýváme součet (reálných) čísel $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Je-li počet sčítanců konečný, mluvíme o **konečné číselné řadě**, je-li počet sčítanců nekonečný ($n \to \infty$), jedná se o **nekonečnou řadu**:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (10.1)$$

Veličina $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ se nazývá *n-tý částečný součet řady*. Je to součet prvních n členů řady. **Součet řady s** je pak limitou posloupnosti částečných součtů s_n:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \qquad (10.2)$$

Jestliže má daná řada konečný součet, nazývá se **konvergentní**.

V opačném případě, to jest když je součet nekonečný anebo vůbec neexistuje, je řada **divergentní**.

Řadu mohou obecně tvořit kladné i záporné členy, a proto musíme ještě rozlišovat **neabsolutní konvergenci** a **absolutní konvergenci**: řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ne, pak daná řada konverguje neabsolutně. Absolutní konvergence je tedy „silnější“, a je tomu tak proto, že u řady bez absolutních hodnot se mohou kladné a záporné členy řady částečně odečíst.

O konvergenci řad platí tato tvrzení:

1. Vynechání nebo přidání konečného počtu členů nemá vliv na konvergenci či divergenci řady.
2. Pokud daná řada konverguje absolutně, pak také konverguje neabsolutně. Opačné tvrzení neplatí.

Konvergenci (divergenci) řad zjišťujeme pomocí *podmínek konvergence* a/nebo užitím *kritérií konvergence*, které jsou obsahem následující kapitoly.

Příklad 10.1. Uvažujme dělení pizzy, při kterém nejprve ukrojíme polovinu pizzy, pak ukrojíme polovinu z toho, co zbylo (tedy čtvrtinu původní pizzy), pak ukrojíme polovinu zbytku (tedy osminu původní pizzy), atd. Tímto dělením získáme nekonečnou řadu: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$

Částečné součty této řady jsou:

$s_1=\frac{1}{2}$,

$s_2=\sum_{i=1}^{2}a_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,

$s_3=\sum_{i=1}^{3}a_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$, atd.

Tyto částečné součty se blíží k jedné, a podle vztahu (10.2) je tedy součet řady s = 1. Nakonec odkrojíme celou pizzu (jednotku).■

Příklad 10.3. Určete součet následující nekonečné řady: $\sum_{n=1}^{\infty}n=1+2+3+4+5+6+\dots.$

PODMÍNKY KONVERGENCE ŘAD, KRITÉRIA KONVERGENCE

Aby řada měla konečný součet (aby konvergovala), musí splňovat **nutnou podmínku konvergence**:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0 \qquad (10.3)$$

Podmínka (10.3) říká, že členy řady se musí zmenšovat k nule. Ale tato podmínka sama o sobě ke konvergenci nestačí, viz např. harmonická řada.

Příklad 10.4. Určete součet *harmonické řady*: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$

Příklad 10.5. Je řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+4}{3n-1}$ konvergentní nebo divergentní?

Podmínka, která s jistotou zaručuje konvergenci řady, se nazývá *postačující podmínka*. Takovou podmínku nalezli v 19. století matematikové L. A. Cauchy[1] a B. Bolzano[2], a proto se nazývá *Bolzano-Cauchyova nutná a postačující podmínka konvergence nekonečné řady*:

***Věta 10.1**. (Bolzano-Cauchyova podmínka): Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *s kladnými nebo zápornými členy je konvergentní právě tehdy, když ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje přirozené číslo N takové, že pro* $n > N$ *a libovolné přirozené číslo p platí:* $\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}\right|<\varepsilon$.

[1] L.A. Cauchy (1789-1857), francouzský matematik.
[2] B. Bolzano (1781-1848), český matematik.

V praxi používaná kritéria:

- **Srovnávací kritérium**:

Věta 10.2. *(Srovnávací kritérium). Mějme dvě nekonečné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*, a nechť platí* $a_n \geq b_n$ *pro všechna n větší než nějaký index k (tato podmínka říká, že od k-tého členu jsou všechny členy řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *větší než tytéž členy řady* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*). Nechť dále řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní. Potom také řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje. Řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nazýváme majorantou řady* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Často používanou řadou pro srovnávací kritérium je *Dirichletova řada*: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Tato řada konverguje pro $\alpha > 1$.

Příklad 10.6. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ pomocí srovnávacího kritéria.

Další kritéria konvergence řad pro řady s kladnými členy: **podílové**, **odmocninové** a **integrální kritérium**:

***Věta 10.3. (Limitní podílové kritérium)**. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečná číselná řada s kladnými členy, a nechť $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Potom:*

- *Je-li $L < 1 \Rightarrow$ řada konverguje.*
- *Je-li $L > 1 \Rightarrow$ řada diverguje.*
- *Je-li $L = 1 \Rightarrow$ nelze rozhodnout.*

Toto kritérium používáme především tehdy, když daná řada obsahuje faktoriál.

Příklad 10.8. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ pomocí podílového kritéria.

Příklad. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^3}$ pomocí podílového kritéria.

Věta 10.4. (Limitní odmocninové kritérium)*. Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je nekonečná číselná řada s kladnými členy, a nechť* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = L$*. Potom:*

- *Je-li* $L < 1 \Rightarrow$ *řada konverguje.*
- *Je-li* $L > 1 \Rightarrow$ *řada diverguje.*
- *Je-li* $L = 1 \Rightarrow$ *nelze rozhodnout.*

Toto kritérium používáme především tehdy, když daná řada obsahuje n v exponentu.

Příklad. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^n$.

Příklad. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln}{n}\right)^{n+1}$.

Věta 10.5. ***(Integrální kritérium)****. Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy,* $a_n = f(n)$*, a nechť* $f(x)$ *je spojitá a nerostoucí funkce na intervalu* $(a,+\infty)$*. Potom daná řada konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Příklad 10.11. Rozhodněte o konvergenci harmonické řady.

NEKONEČNÁ FUNKČNÍ ŘADA A JEJÍ SOUČET

-Nekonečná řada, jejíž členy jsou funkce, se nazývá **nekonečná funkční řada.**

Příklad. Mějme funkční řadu $\sum_{x=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$. Ukážeme si některé její vlastnosti...

Nechť $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... je posloupnost funkcí. **Nekonečná funkční řada** je symbol:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

Součet funkční řady je funkce $s(x)$, kterou získáme (stejně jako u nekonečných číselných řad) jako limitu posloupnosti částečných součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$$

-Řada je **konvergentní**, jestliže funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$ konverguje k funkci $s(x)$ na jisté množině *M*.

-Pokud k $s(x)$ konverguje i řada absolutních hodnot $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, hovoříme o **absolutní konvergenci**.

-Množina všech $x \in M$, pro které řada konverguje (konverguje absolutně), se nazývá **obor konvergence** (**obor absolutní konvergence**), a v dalším textu bude značen jako *OK* (*OAK*).

GEOMETRICKÁ ŘADA

Geometrickou řadou nazýváme řadu ve tvaru: $\sum_{n=1}^{\infty} f^n(x)$,

Označíme-li $f(x) = q$, pak řada konverguje pro $|q| < 1$, a součet řady:

$$s(x) = \frac{a_1}{1-q} \tag{11.5}$$

Příklad 11.6. Určete obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ a její součet.

Příklad. Určete obor konvergence a součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} (x+3)^n$.

Příklad 11.9. Určete obor konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} \ln^n x$.

Příklad 11.10. Určete obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$.

MOCNINNÁ ŘADA

-Mocninná řada je speciálním případem obecné funkční řady, a je dána následujícím předpisem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a)^1 + c_2 (x-a)^2 + \ldots$$

-Mocninná řada konverguje absolutně na intervalu $(a-\rho, a+\rho)$, kde $\boldsymbol{a}$ je **střed řady** a $\boldsymbol{\rho}$ je **poloměr konvergence**.

-Tento interval se nazývá **interval konvergence (IK)**. Interval konvergence je souměrný podle středu a, a obsahuje všechna x, která mají od středu menší vzdálenost než ρ.

- Poloměr intervalu konvergence ρ se vypočte pomocí následujících limit:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \qquad (11.3)$$

nebo

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \qquad (11.4)$$

V krajních bodech intervalu $a + \rho$, $a - \rho$, řada může, ale nemusí konvergovat, a proto se tyto případy musí vyšetřit zvlášť. Obecně pak platí: $IK \subseteq OAK \subseteq OK$.

Příklad 11.2. Určete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$.

Příklad 11.3. Určete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^n}$.

Příklad 11.4. Určete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+5)$.

Příklad 11.5. Určete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{n^3}$.

ÚVOD DO OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

- Mějme funkci jedné proměnné $y = f(x)$. **Diferenciální rovnice** je rovnice, která kromě x a y obsahuje i **derivaci** (derivace) funkce y.

- Řád diferenciální rovnice je určen nejvyšší derivací, mocnina u nejvyšší derivace určuje **stupeň diferenciální rovnice**.

- Příklady:

$y' + 5y = x^2$ je diferenciální rovnicí 1. řádu 1. stupně

$(y'')^3 - (y')^5 x^2 - y^8 + 5x = 0$ je diferenciální rovnice 2. řádu 3. stupně.

- **Diferenciální rovnice lze** dále **dělit** například na *obyčejné* a *parciální* (budeme se zabývat jen těmi prvními), a na *lineární* a *nelineární* (budeme se zabývat vesměs jen těmi prvními).

Rozlišujeme **tři druhy řešení** diferenciální rovnice:

-Obecné řešení je funkce $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ vyhovující dané rovnici a obsahující (neurčité) konstanty C_i podobně jako u neurčitého integrálu.

-Partikulární řešení dostaneme z obecného řešení tak, že za konstanty C_i dosadíme nějaké konkrétní hodnoty, které mohou vyplývat například z takzvaných počátečních nebo okrajových podmínek (pro danou hodnotu x je předepsána hodnota funkce y a/nebo hodnota její derivace. Grafickým znázorněním partikulárního řešení je *integrální křivka*.

-Singulární řešení je řešení, které nelze získat z obecného řešení pro žádné hodnoty C_i, často se jedná o „zvláštní“ funkce typu $y = 0$, apod.

Příklad 12.2. Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = x$. Určete i partikulární řešení, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 2$.

Příklad 12.3. Určete obecné řešení rovnice $y' = 4x + 2$, a dále partikulární řešení pro $y\,(1) = 2$.

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU SE SEPAROVATELNÝMI PROMĚNNÝMI

Jedná se o rovnice ve tvaru: $P(x) + Q(y)y' = 0$ nebo $P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$.

Řeší se **separací** (oddělením) **proměnných**: členy obsahující proměnnou x převedeme na jednu stranu rovnice (obvykle nalevo), členy s y na druhou stranu, a pak obě strany rovnice integrujeme.

Příklad 12.5. Určete obecné řešení rovnice $yy' = x$.

Příklad 12.6. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' + (x-1)y = 0$.

Příklad 12.8. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $3x^2 y' - \frac{1}{y} = 0$, a poté najděte partikulární řešení této rovnice vyhovující podmínce $y(1) = 0$.

Okruhy k průběžnému testu a ke zkoušce - 2013

Průběžný test:
1. Logaritmická derivace.
2. Derivace implicitní funkce.
3. Maclaurinova řada (polynom) zadané funkce.
4. Taylorova řada (polynom) zadané funkce.
5. Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky.
6. Definiční obor funkce jedné nebo dvou proměnných.
7. Extrémy funkce jedné nebo dvou proměnných, průběh funkce.
8. Vázané extrémy
9. Diferenciál, totální diferenciál, tečná rovina.
10. Ekonomické aplikace:

-elasticita funkce, elasticita produkční funkce, cenová elasticita poptávky a nabídky
-mezní (marginální) náklady a příjmy,
-mezní produkt práce a kapitálu,
-minimalizace (průměrných, celkových) nákladů, maximalizace celkových (průměrných) příjmů a zisku.

Zkouška:

Totéž, co průběžný test, plus:
-Neurčitý integrál (per partes, racionální zlomky, substituce).
-Určitý integrál, aplikace: obsah plochy sevřené danými křivkami.
-Nekonečné číselné řady, jejich konvergence, u geometrických řad součet.
Ekonomické aplikace:
-Výpočet celkových příjmů, nákladů, apod., z mezních veličin.
-Přebytek spotřebitele a výrobce v podmínkách dokonalé konkurence.
-Celkový příjem jako integrál z intenzity (toku) příjmu.
-Celkový příjem jako součet nekonečné geometrické řady.

Ke zkoušce můžete mít:
Vzorce jako u průběžného testu + A4 dalších (vlastních)vzorců.