EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Název projektu	Rozvoj vzdělávání na Slezské univerzitě v Opavě
Registrační číslo projektu	CZ.02.2.69/0.0./0.0/16_015/0002400

Sbírka úloh
Matematika v ekonomii

Distanční studijní text

Jiří Mazurek

Karviná 2021

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Obor: Matematika, ekonomie

Klíčová slova: Diferenciální počet, funkce, integrální počet, mikroekonomie, optimalizace.

Anotace: Sbírka úloh z matematiky v ekonomii je opora určená studentům prezenční i kombinované formy navazujícího magisterského studia na Obchodně podnikatelské fakultě v Karviné pro stejnojmenný jednosemestrální předmět, který svým obsahem navazuje na předmět Kvantitativní metody vyučovaný v prvním ročníku. Cílem sbírky je poskytnout studentům úlohy a příklady k prohloubení znalostí především v oblasti matematické analýzy a demonstrovat její užití v různých oblastech ekonomie. Opora zahrnuje reálné funkce jedné a více proměnných, průběh funkce, nekonečné řady, diferenciální a integrální počet a diferenciální rovnice. Aplikace matematické analýzy v oblasti ekonomie zahrnuje hledání extrémů (maxima a minima) ekonomických funkcí, jako jsou náklady, příjmy, zisk, užitek, produkce apod., analýzu vlastností těchto funkcí a jejich vzájemných vztahů a také matematické modelování ekonomických situací.

Autor: Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D.

Obsah

ÚVODEM

Sbírka úloh z *Matematiky v ekonomii* je doplňkovou studijní oporou pro stejnojmenný předmět vyučovaný na Slezské univerzitě, Obchodně podnikatelské fakultě v prvním ročníku magisterského studia, který navazuje na předmět *Kvantitativní metody* vyučovaný v prvním ročníku bakalářského studia.

Sbírka úloh z Matematiky v ekonomii poskytuje studentům téměř tři stovky úloh rozdílné obtížnosti k procvičení. Jejím obsahem jsou funkce jedné reálné proměnné, úvod do diferenciálního počtu jedné reálné proměnné, průběh funkce, reálná funkce dvou reálných proměnných, lokální a vázané extrémy funkce dvou proměnných, neurčitý a určitý integrál a nekonečné číselné a funkční řady s aplikacemi v ekonomii.

Ke všem úlohám jsou uvedeny výsledky a jednotlivé kapitoly jsou řazeny (pro lepší přehlednost) podobně jako v základní studijní opoře *Matematika v ekonomii* [1]. Na začátku každé kapitoly jsou uvedeny nejdůležitější pojmy, vztahy a vzorce, následují jednotlivé úlohy a jejich výsledky.

RYCHLÝ NÁHLED STUDIJNÍ OPORY

Sbírka úloh z Matematiky v ekonomii je rozdělena do deseti kapitol. Každá kapitola obsahuje na začátku nové pojmy, vzorce a vztahy potřebné k řešení úloh, následují tematicky řazené úlohy a jejich řešení včetně obrázků a grafů.

Stručná osnova studijní opory:

- Funkce jedné reálné proměnné
- Úvod do diferenciálního počtu jedné reálné proměnné
- Průběh funkce
- Reálná funkce dvou reálných proměnných
- Lokální a vázané extrémy funkce dvou proměnných
- Neurčitý integrál
- Určitý integrál
- Číselné řady
- Funkční řady
- Úvod do obyčejných diferenciálních rovnic

1 FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Obsahem této kapitoly jsou funkce jedné reálné proměnné, definiční obor funkce, obor hodnot, graf funkce, základní funkce.

CÍLE KAPITOLY

- Definovat pojem funkce jedné reálné proměnné.
- Zavést a vysvětlit nejdůležitější vlastnosti funkcí.
- Představit grafy základních funkcí.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Funkce, definiční obor funkce, obor hodnot funkce, graf funkce.

1.1. ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY

Funkci značíme písmenem f (g, h, ...), definiční obor funkce jako $D(f)$ nebo D_f a obor hodnot $H(f)$ nebo H_f. Funkční předpis se značí $y = f(x)$, například $y = x^2 + 1$. Proměnná x se nazývá *nezávislá proměnná* (*argument*), proměnná y je *závislá proměnná*.

Definiční obor funkce $D(f)$ je množina všech x, pro něž má smysl funkční předpis $y = f(x)$. Smysl určování definičního oboru spočívá ve vymezení hodnot x, pro které je (respektive není) předpis $y = f(x)$ definován. V ekonomii platí, že většina veličin může nabývat pouze kladných hodnot, neboť například záporná poptávka, nabídka, cena nebo produkce postrádají ekonomický smysl.

Grafem funkce $y = f(x)$ nazýváme množinu všech bodů o souřadnicích $[x, f(x)]$, kde $x \in D(f)$. Grafem lineární funkce je přímka, kvadratické funkce parabola, nepřímé úměrnosti hyperbola atd.

Polynomem (mnohočlenem) řádu n nazýváme výraz $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ a značíme jej $P_n(x)$. Je-li $n = 0$, je polynom roven konstantě a_0; je-li $n = 1$, je polynom lineární: $a_0 + a_1x$; pro $n = 2$ je polynom kvadratický: $a_0 + a_1x + a_2x^2$ atd. *Nulovým bodem* (*kořenem*) polynomu je takové číslo x_0, pro které platí $P_n(x) = 0$.

SAMOSTATNÝ ÚKOL

Zopakujte si grafy základních funkcí: lineární, kvadratické, mocninné, sinus a kosinus.

1.2. Úlohy

1.1 Určete definiční obor funkce:

a) $y=\sqrt{4x+8}$

b) $y=\sqrt{5-x}$

c) $y=\sqrt{x^2-9}$

d) $y=\log(2x-3)$

e) $y=\log(16-x^2)$

f) $y=\dfrac{3x+1}{x^2-4}$

g) $y=\sqrt{x^2-x-6}$

h) $y=\sqrt{4+2x}+\dfrac{1}{x+3}$

i) $y=\log(x^2+x)$

j) $y=\dfrac{6-x}{x^3-x^2}$

1.2. Nakreslete graf funkce:

a) $y=2x+1$

b) $y=x-3$

c) $y=-x+4$

d) $y=x^2+1$

e) $y=x^2-4$

f) $y=2^x$

g) $y=\left(\dfrac{1}{5}\right)^x$

h) $y=x^3$

i) $y=-x^2$

j) $y=-x^2+1$

1.3. Určete nulové body polynomu:

a) x^2+6x+8

b) x^3-2x^2-3x

c) x^4-4x^2

d) x^4-x^3

e) x^3-x

1.4. Načrtněte funkci poptávky a nabídky a určete graficky i výpočtem bod rovnováhy:

a) $Q_D=40-5P; Q_S=8+3P$

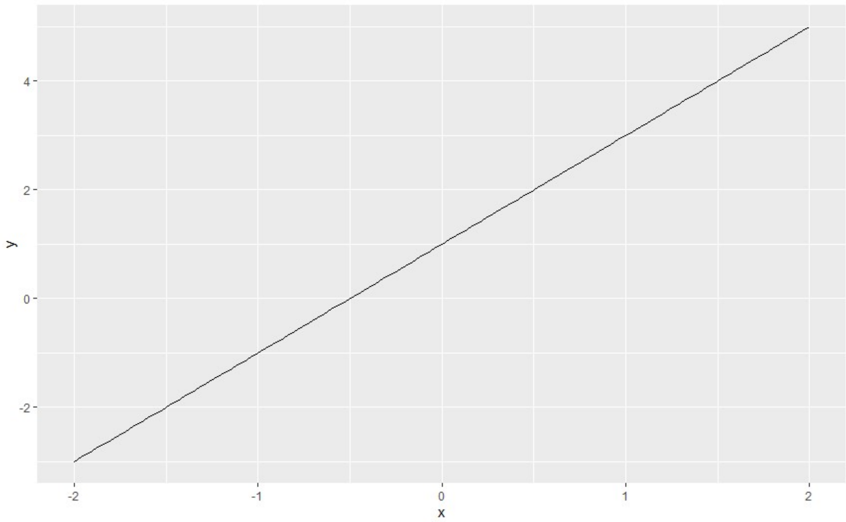
b) $Q_D=100-2P; Q_S=40+P$

c) $Q_D=250-8P; Q_S=30+2P$

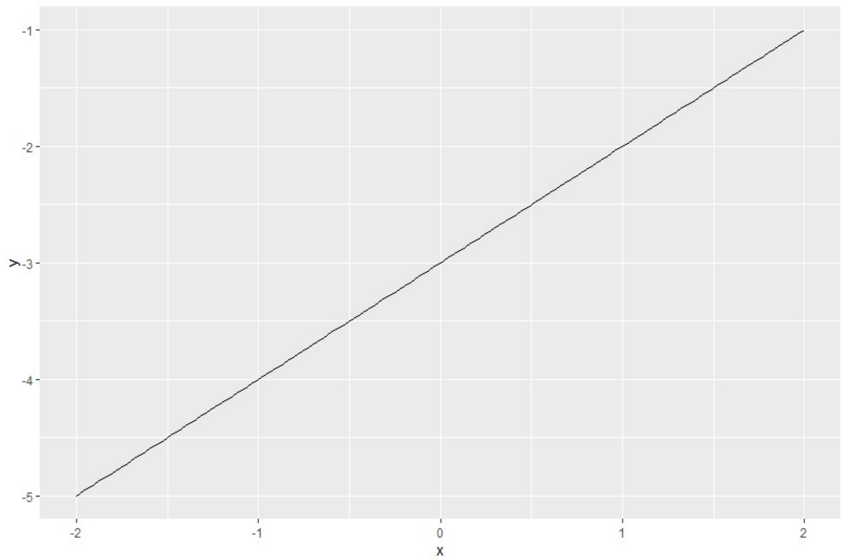
VÝSLEDKY

1.1. a) $\langle -2,\infty)$, b) $(-\infty,5\rangle$, c) $(-\infty,5\rangle \cup \langle 3,\infty)$, d) $(3/2,\infty)$, e) $(-4,4)$, f) $R-\{-2,+2\}$, g) $(-\infty,-2\rangle \cup \langle 3,\infty)$, h) $\langle -2,\infty)$, i) $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$, j) $R-\{0,1\}$.

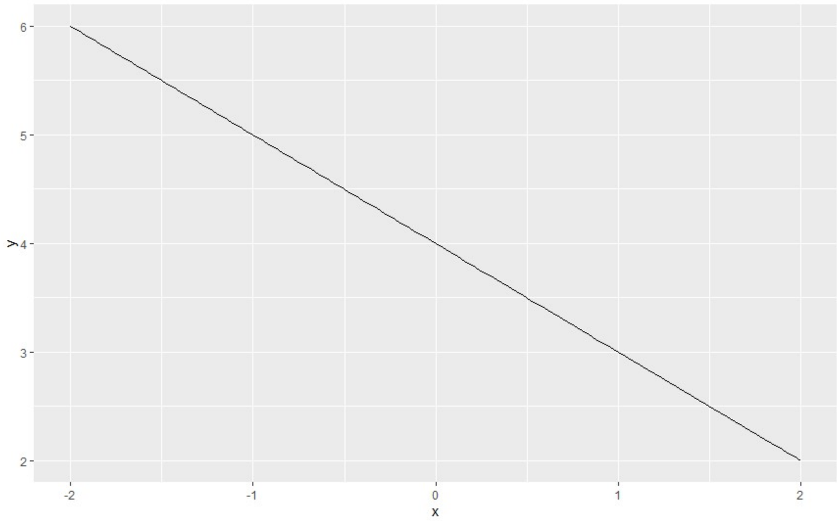
1.2.



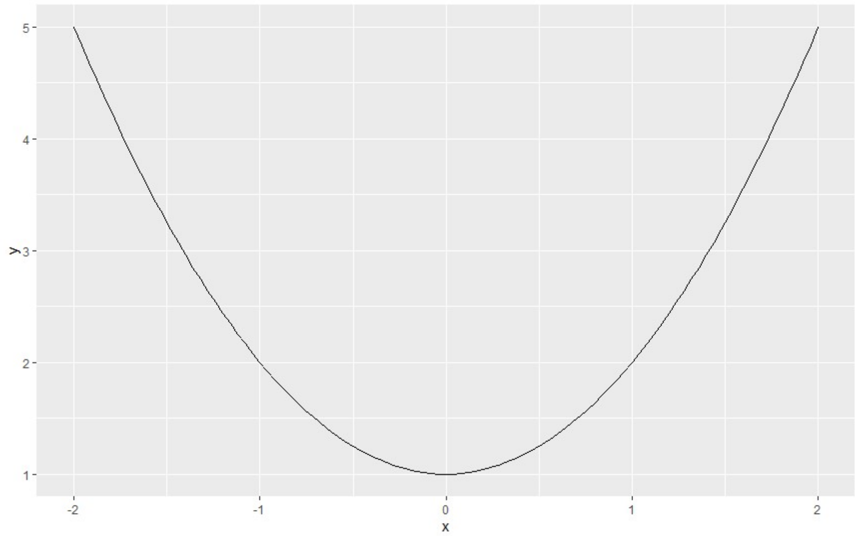
a)



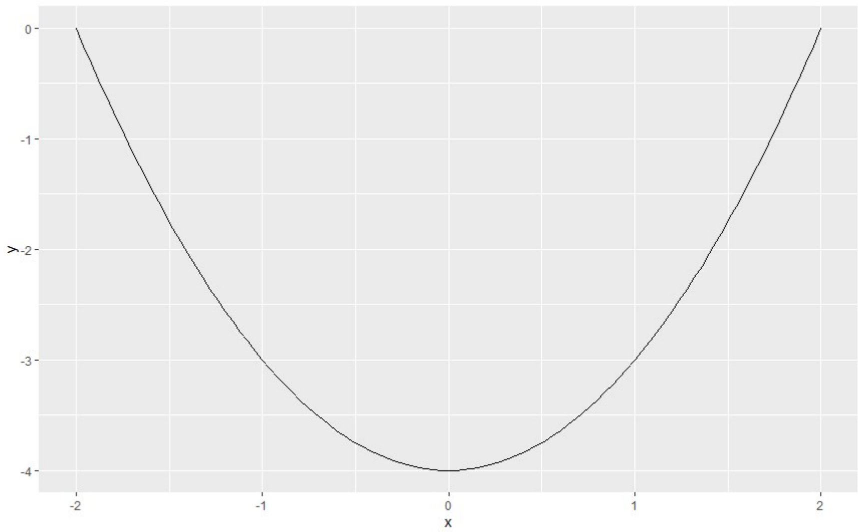
b)



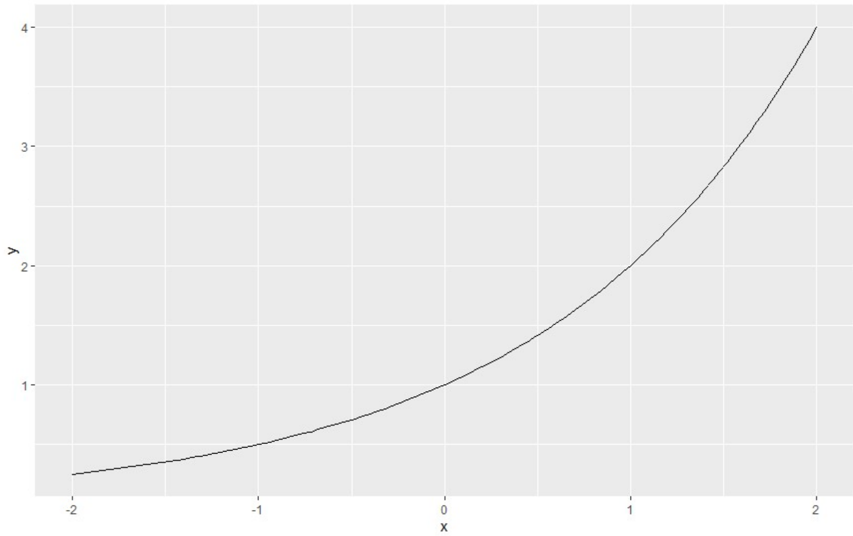
c)



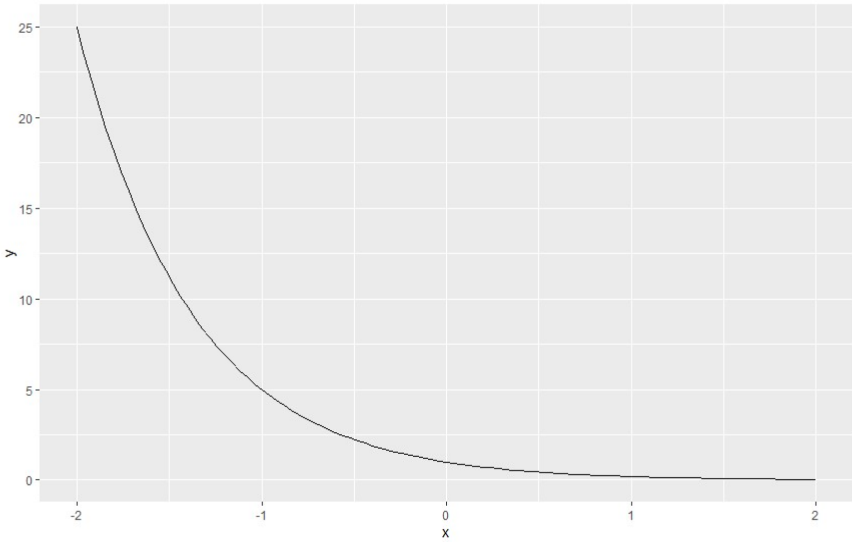
d)



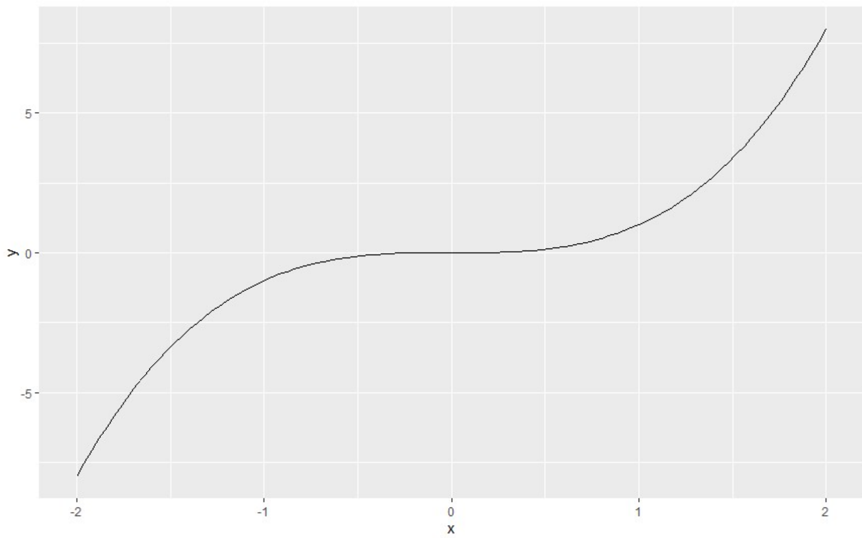
e)



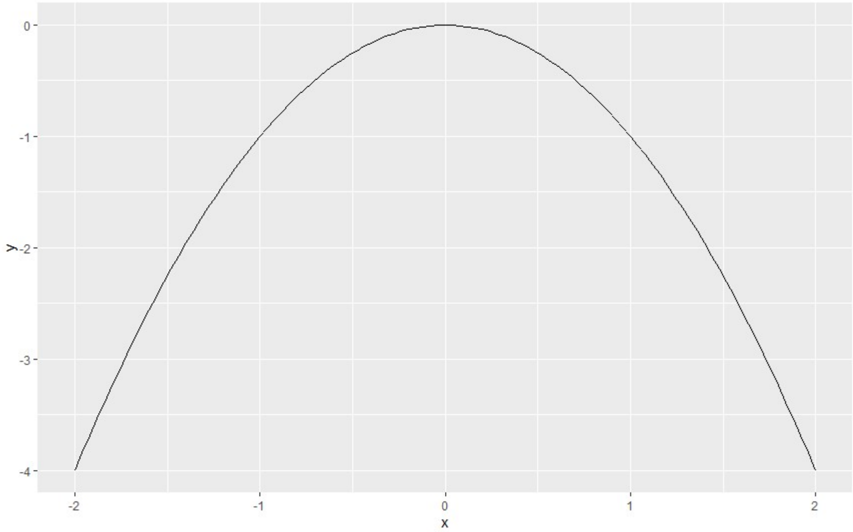
f)



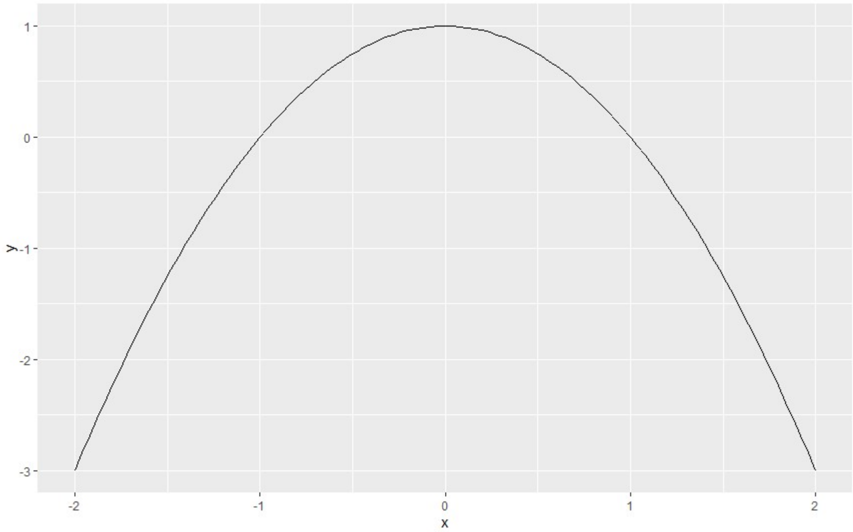
g)



h)



i)



j)

1.3. a) $\{-4,-2\}$, b) $\{-1,0,3\}$, c) $\{-2,0,2\}$, d) $\{0,1\}$, e) $\{0,1\}$.

1.4. a) P = 4, Q = 20; b) P = 20, Q = 60, c) P = 22, Q = 74.

2 ÚVOD DO DIFERENCIÁLNÍHO POČTU JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Obsahem této kapitoly je derivace funkce a její aplikace v ekonomii.

CÍLE KAPITOLY

- Definovat pojem derivace funkce.
- Demonstrovat užití vztahů pro derivování základních funkcí.
- Ukázat ekonomické aplikace derivace.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Funkce, derivace funkce, rostoucí funkce, klesající funkce, maximum funkce, minimum funkce.

2.1. ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY

Derivací funkce $y = f(x)$ v bodě x rozumíme limitu:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y'$$

Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají derivaci na intervalu $J \subseteq R$. K výpočtu derivací součtu, rozdílu, součinu a podílu těchto funkcí, a pro derivaci funkce složené, používáme následující pravidla:

i) $\quad [c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

ii) $\quad [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

iii) $\quad [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

iv) $\quad \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \; g(x) \neq 0$

v) $\quad [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Pravidlo iii) se nazývá Pravidlo pro derivaci součinu funkcí, pravidlo iv) slouží k výpočtu derivace podílu funkcí, a konečně pravidlo v) je pravidlo pro derivaci složené funkce. K derivování elementárních funkcí používáme vzorce uvedené v Tabulce 2.1.

Některé funkce není možné derivovat pomocí pravidel uvedených v Tabulce 2.1. Typickým příkladem jsou funkce ve tvaru $y = f(x)^{g(x)}$, tedy funkce, v nichž se proměnná x nachází jak v základu mocniny, tak v exponentu. V takovém případě využijeme tzv. *logaritmickou derivaci*: funkci y nejprve logaritmujeme: $y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = \ln f(x)^{g(x)}$

$\Rightarrow \ln y = g(x) \ln f(x)$, a pak derivujeme:

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}$$

U některých funkcí nelze y vyjádřit jako funkci x. V takovém případě hovoříme o *implicitní funkci.* Derivace implicitní funkce je dána takto:

$$y'(C) = \frac{-\frac{\partial f(C)}{\partial x}}{\frac{\partial f(C)}{\partial y}}$$

Ve výše uvedeném vzorci pro derivaci implicitní funkce se vyskytují parciální derivace, které najdete v Kapitole 4.

Složité funkce, které mají derivace až do n-tého řádu, můžeme přibližně nahradit (aproximovat) *Taylorovou řadou* (Taylorovým polynomem) stupně n v okolí zvoleného bodu a. Vyjádření funkce pomocí polynomu (mnohočlenu) je jednodušší a usnadňuje výpočty. V ekonomii se tento postup často používá například ke zjednodušení nelineárních funkcí na funkce lineární.

Taylorův polynom funkce $f(x)$ v bodě a je definován takto:

$$T_n(f, a, x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ \ldots \ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x),$$

kde $R_{n+1}(x)$ se nazývá *zbytek řady*.

Pokud zvolíme $a = 0$, dostaneme *Maclaurinovu řadu*:

$$T_n(f, 0, x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ \ldots \ + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

Maclaurinův rozvoj vybraných funkcí je uveden v Tabulce 2.2 i s příslušným oborem konvergence odpovídající funkční řady.

Diferenciálem funkce $y = f(x)$ nazýváme funkci $df(x) = f'(x)dx$. Diferenciál funkce závisí na x a dx, a vyjadřuje přibližně přírůstek funkce f při změně argumentu x o dx v bodě x. (Toto přibližné vyjádření je tím přesnější, čím menší je dx).

Elasticita funkce (pomocí první derivace) je definována následovně:

$$E(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{y} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} y'$$

Cenovou elasticitu poptávky, krátce *elasticitu poptávky* (*price elasticity of demand*), definujeme takto:

$$E(P) = -\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}$$

K ZAPAMATOVÁNÍ

Podle hodnoty elasticity poptávky při dané ceně *P* rozlišujeme poptávku:

- elastickou, je-li $E(P) > 1$,
- jednotkově elastickou, je-li $E(P) = 1$,
- neelastickou, je-li $E(P) < 1$.

Cenová elasticita nabídky, krátce *elasticita nabídky* (*price elasticity of supply*) se definuje podobně jako cenová elasticita poptávky:

$$E(P) = \frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP},$$

kde $Q = S(P)$ je funkce nabídky. Protože funkce nabídky je rostoucí a *P* a *Q* jsou kladné, neobjevuje se ve vztahu znaménko mínus.

Mezní produkt práce (*marginal product of labour*) MP_L je derivace funkce produkce podle práce:

$$MP_L = \frac{dQ}{dL} = Q'(L)$$

Celkový příjem TR (*total revenue*) je součinem množství *Q* a ceny za jednotku množství *P*:

$$TR = Q \cdot P$$

Průměrný příjem AR (*average revenue*) je podíl celkového příjmu a množství:

$$AR = \frac{TR(Q)}{Q}$$

Mezní příjem MR (*marginal revenue*) je definován jako derivace celkového příjmu:

$$MR = \frac{dTR(Q)}{dQ}$$

Celkové náklady TC (*total cost*) jsou všechny náklady nutné pro realizaci Q jednotek. Celkové náklady lze rozložit na *celkové variabilní náklady TVC* (*total variable cost*) a *fixní náklady FC* (*fixed cost*):

$$TC(Q) = TVC(Q) + FC$$

Mezní náklady MC (*marginal cost*) jsou derivací celkových nákladů:

$$MC = \frac{dTC}{dQ}$$

Tabulka 2.1. Přehled derivací elementárních funkcí.

$f(x)$	$f'(x)$
konstanta	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{cotg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccotg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Tabulka 2.2. Mocninné rozvoje vybraných funkcí.

Funkce	Maclaurinův rozvoj	Obor konvergence
$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$	$(-\infty,\infty)$
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$	$(-\infty,\infty)$
e^x	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$	$(-\infty,\infty)$
$\ln(x+1)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$	$(-1,1\rangle$

2.2. Úlohy

2.1. Derivujte elementární funkce:

a) $y=x^4+5x^3$

b) $y=10x^8+1$

c) $y=2x^3+6x-11$

d) $y=\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}$

e) $y=\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}$

f) $y=12\ln x+6\log x$

g) $y=3\sin x-2\cos x+tgx$

h) $y=10e^x+5^x$

2.2. Derivujte následující funkce:

a) $y=(2x+1)\cdot e^x$

b) $y=x^4\cdot\ln x$

c) $y=\cos x\cdot\ln x$

d) $y=\frac{\ln x}{x+1}$

e) $y=\frac{x+5}{x^2+1}$

f) $y=\frac{\cos x}{\sin x}$

g) $y=\ln(x^3+5x)$

h) $y=(x^2+6)^3$

i) $y=\sin(4x+5)$

j) $y=e^{x^2+4}$

k) $y=\frac{\ln x}{x^2}$

l) $y=\sqrt{4x+6}$

2.3. Určete derivace vyšších řádů (druhého a třetího řádu):

a) $y=x^5$

b) $y=x^4+3x^2-6x+12$

c) $y = \ln x$

d) $y = \sin x$

e) $y = \sqrt{x}$.

2.4. Derivujte:

a) $y = x^{x+1}$

b) $y = x^{\ln x}$

c) $y = x^{\cos x}$

d) $y = (\sin x)^x$

2.5. Derivujte:

a) $5xy + \ln y + 4 = 0$

b) $x^2 y + x \sin y - x = 0$

c) $\ln(xy) + x^2 + y^2 = 0$

d) $\sin(x+y) + x^2 y^2 - 12 = 0$

e) $x^4 + 2xy + 16 = 0$.

2.6. Určete Maclaurinovu řadu funkce *f*:

a) $y = \sqrt{x+1}$

b) $y = 2^x$

c) $y = \cos x$

d) $y = \ln(x+1)$

e) $y = e^{2x}$

f) $y = e^x + x^2$

2.7. Určete Taylorovu řadu dané funkce *f* v daném bodě *a*:

a) $y = \sqrt{x}$, a = 1

b) $y = e^x$, a = 1

c) $y = \ln x$, a = 1

d) $y = \dfrac{1}{x}$, a = 2

2.8. Určete elasticitu funkce:

a) $y = x^2$

b) $y = x^3$,

c) $y = 3x^2 - 4x$ v bodě $x = 2$

d) $y = x^3 + 5$, $x = 1$

e) $y = \ln x$, $x = 3$

f) $y = x^2 + 5x + 2$, $x = 1$

2.9. Určete cenovou elasticitu poptávky:

a) $Q(P) = 60 - 5P$

b) $Q(P) = 110 - 22P$

c) $Q(P) = 42 - 2P$

d) $Q(P) = 60 - 3P$

e) $Q(P) = 20 - P^2$

f) $Q(P) = 100 - 18P$

2.10. Určete cenovou elasticitu poptávky v daném bodě P:

a) $Q(P) = 60 - 5P$, P = 5

b) $Q(P) = 140 - 15P$, P = 2

c) $Q(P) = 42 - 2P$. P = 3

d) $Q(P) = 60 - 3P$, P = 5

e) $Q(P) = 40 - 2P^2$, P = 3

f) $Q(P) = 82 - 6P$, P = 10

2.11. Určete mezní produkt práce (načrtněte křivku MP_L):

a) $Q(L)=L^2+3L+5$ b) $Q(L)=5L^3+16L$

c) $Q(L)=20L^2-L^3$

2.12. Určete mezní produkt práce pro danou hodnotu L:

a) $Q(L)=L^2+3L+5$, $L=2$ b) $Q(L)=5L^3+16L$, $L=10$

c) $Q(L)=20L^2-L^3$, $L=1$

2.13. Vypočtěte mezní náklady $MC(Q)$, jsou-li dány celkové náklady:

a) $TC(Q)=Q^3+16Q+250$ b) $TC(Q)=4Q^2+\dfrac{100}{Q}$

2.14. Najděte maximum zisku pro funkci celkového příjmu $TC(Q)=-Q^2+14Q+250$.

2.15. Vypočtěte diferenciál funkce:

a) $y=x^2, x=2, dx=0{,}1$. b) $y=x^3+x, x=1, dx=0{,}2$.

c) $y=6\ln x, x=2, dx=0{,}1$. d) $y=x^2+8x-4, x=3, dx=0{,}1$.

VÝSLEDKY

2.1. a) $4x^3+15x^2$, b) $80x^7$, c) $6x^2+6$, d) $-\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}$, e) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, f) $\dfrac{12}{x}+\dfrac{6}{x\ln 10}$,

g) 3cosx+2sinx+1/cos^{2}x, h) 10e^x+5^{x}ln5.

2.2. a) $(2x+3)e^x$, b) $4x^3\ln x+x^3$, c) $-\sin x\cdot\ln x+\dfrac{\cos x}{x}$, d) $\dfrac{(x+1)\frac{1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}$,

e) $\dfrac{-x^2-10x+1}{(x^2+1)^2}$, f) $-\dfrac{1}{(\sin x)^2}$, g) $\dfrac{3x^2+5}{x^3+5x}$, h) $6x(x^2+6)^2$, i) $4\cos(4x+5)$, j) $2xe^{x^2+4}$,

k) $\dfrac{x-2x\ln x}{x^4}$, l) $\dfrac{2}{\sqrt{4x+6}}$.

2.3. a) $y'=5x^4; y''=20x^3; y'''=60x^2$, b) $y'=4x^3+6x-6; y''=12x^2+6; y'''=24x$,

c) $y'=\dfrac{1}{x}; y''=-\dfrac{1}{x^2}; y'''=\dfrac{2}{x^3}$, d) $y'=\cos x; y''=-\sin x; y'''=-\cos x$,

e) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}; y''=-\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}; y'''=\dfrac{3}{8\sqrt{x^5}}$.

2.4. a) $x^{x+1}(\ln x+\dfrac{x+1}{x})$, b) $x^{\ln x}(\dfrac{2}{x}\ln x)$, c) $x^{\cos x}(-\sin x\ln x+\dfrac{\cos x}{x})$,

d) $(\sin x)^x(\ln(\sin x)+x\cot gx)$.

2.5. a) $-\dfrac{5y}{5x+\dfrac{1}{y}}$, b) $-\dfrac{2xy+\sin y-1}{x^2+x\cos x}$, c) $-\dfrac{\dfrac{1}{x}+2x}{\dfrac{1}{y}+2y}$, d) $-\dfrac{\cos(x+y)+2xy^2}{\cos(x+y)+2x^2y}$,

e) $-\dfrac{4x^3+2y}{2x}$.

2.6. a) $\sqrt{x+1}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{16}x^3+\dots$, b) $2^x=1+\ln 2\cdot x+\dfrac{(\ln 2)^2}{2}x^2+\dfrac{(\ln 2)^3}{6}x^3+\dots$,

c) $\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dots$, d) $\ln(x+1)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dots$, e) $e^{2x}=1+2x+4x^2+\dfrac{4}{3}x^3+\dots$

f) $e^x+x^2=1+x+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+\dots$

2.7. a) $T(\sqrt{x},a=1)=1+\dfrac{1}{2}(x-1)-\dfrac{1}{8}(x-1)^2+\dfrac{1}{16}(x-1)^3+\dots$,

b) $T(e^x,a=1)=1+e(x-1)+\dfrac{e}{2}(x-1)^2+\dfrac{e}{6}(x-1)^3+\dots$,

c) $T(\ln x,a=1)=+(x-1)-\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\dfrac{1}{3}(x-1)^3+\dots$,

d) $T(1/x,a=2)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}(x-2)+\dfrac{1}{8}(x-2)^2-\dfrac{1}{16}(x-2)^3+\dots$.

2.8. a) 2, b) 3, c) 4, d) ½, e) 1/ln3, f) 7/8.

2.9. a) $\dfrac{5P}{60-5P}$, b) $\dfrac{22P}{110-22P}$, c) $\dfrac{2P}{42-2P}$, d) $\dfrac{3P}{60-3P}$, e) $\dfrac{4P^2}{40-2P^2}$, $\dfrac{18P}{100-18P}$.

2.10. a) 0,714, b) 0,273, c) 1/6, d) 1/3, e) 1,636, f) 2,727.

2.11. a) 2L + 3, b) $15L^2$+ 16, c) 40L – $3L^{2.}$

2.12. a) 7, b) 1516, c) 37.

2.13. a) $3Q^2$+ 16 Q, b) 8Q-100/Q^2

2.14. Q = 7.

2.15. a) 0,4, b) 0,8, c) 0,3, d) 1,4.

3 PRŮBĚH FUNKCE

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Kapitola je věnována určování vlastností funkce – průběhu funkce, který mimo jiné zahrnuje nalezení definičního oboru funkce, lokálních extrémů nebo intervalů monotónnosti, a také načrtnutí grafu funkce.

CÍLE KAPITOLY

- Naučit se určovat průběh funkce pomocí předdefinované desetibodové osnovy.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Průběh funkce, lokální extrémy, intervaly monotónnosti, graf.

3.1. ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY

Určit *průběh funkce* znamená určit její vlastnosti. Při určování průběhu funkce obvykle postupujeme podle následující osnovy:

1. $D(f)$, sudost, lichost, periodičnost.
2. Limity (jednostranné) v bodech nespojitosti a v nevlastních bodech.
3. Průsečíky s osami x a y, znaménka funkčních hodnot.
4. První derivace, její nulové body.
5. Lokální extrémy a intervaly monotónnosti.
6. Druhá derivace a její nulové body.
7. Inflexní body, konkávnost, konvexnost.
8. Asymptoty.
9. Omezenost funkce, obor hodnot funkce $H(f)$.
10. Graf funkce.

3.2. ÚLOHY

3.1. Určete lokální extrémy funkce:

a) $y = x^2 - 6x + 5$

b) $y = 2x^2 + 18x + 35$

c) $y = 2x^3 - x^2$

d) $y = e^x$

e) $y = \dfrac{1}{x}$

f) $y = \ln x - x$

g) $y = x \cdot e^x$

h) $y = x \cdot \ln x$

i) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

j) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

k) $y = 3^x$

3.2. Určete konvexnost a konkávnost funkce:

a) $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 3$

b) $y = \dfrac{1}{x}$

c) $y = x^4 - 16x^2$

d) $y = e^x$

e) $y = x^2 - 6x + 3$

f) $y = \ln x$

3.3. Určete průběh funkce a nakreslete graf:

a) $y = x^2 e^x$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 8$

c) $y = 12x - x^3$

d) $y = x \ln x$

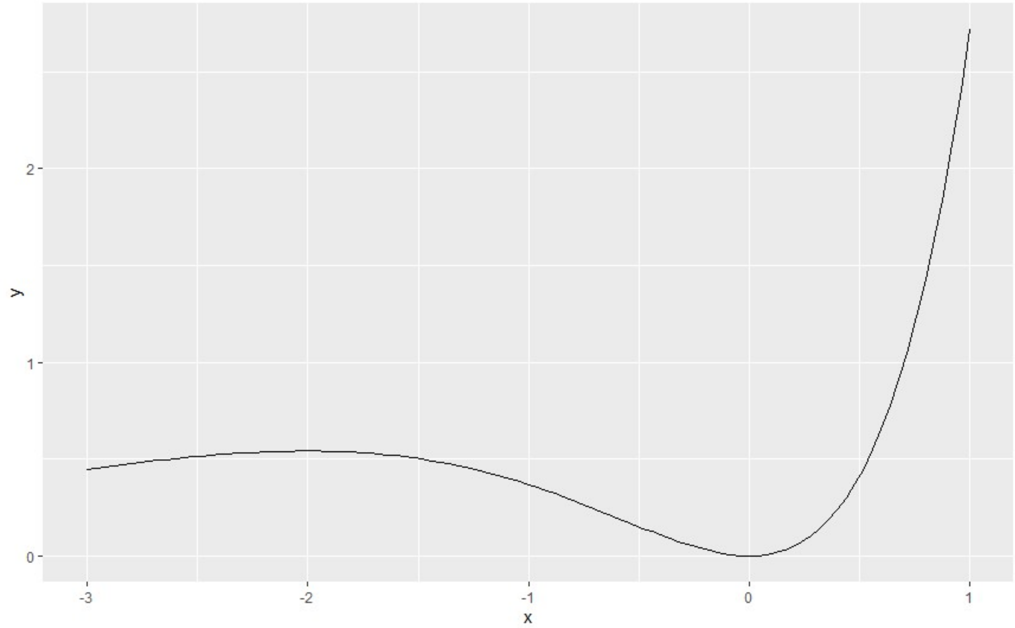
e) $y = x^4 - 4x^3$

VÝSLEDKY

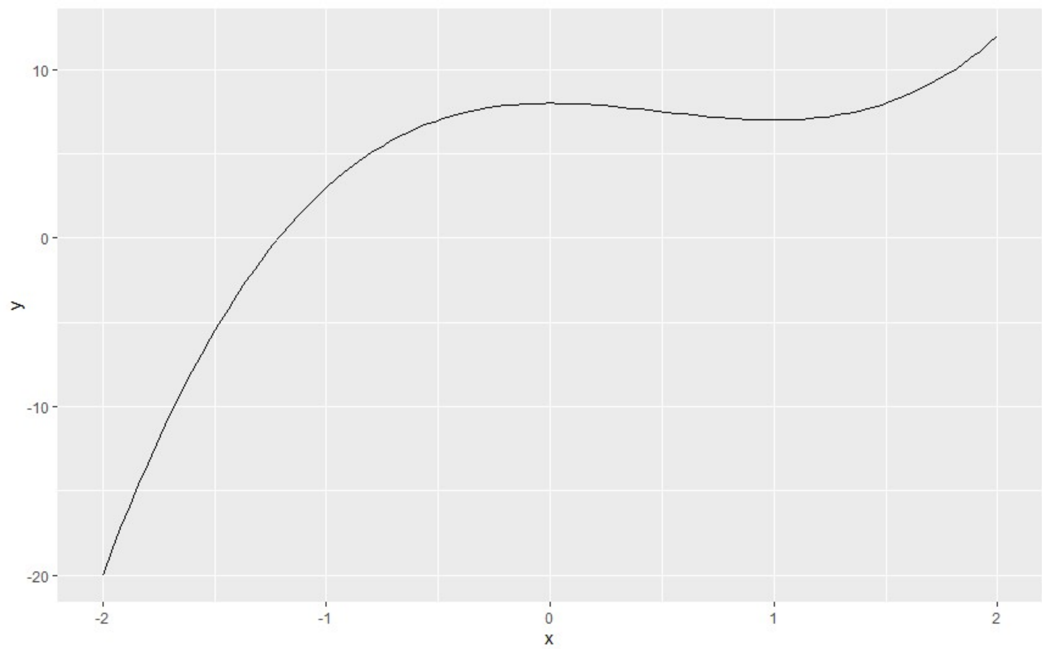
3.1. a) x = 3, MAX; b) x = -4,5, MIN; c) x = 0, MAX, x = 1/3, MIN; d) nejsou, e) nejsou, f) x = 1, MAX; g) x = -1, MIN; h) x = 1/e, MIN;, i) x = e, MIN, j) x = 0 MIN, k) nejsou.

3.2. a) funkce je pro $x \in (-\infty, 2/3)$ konkávní a pro $x \in (2/3, \infty)$ konvexní, b) funkce je pro $x \in (-\infty, 0)$ konkávní a pro $x \in (0, \infty)$ konvexní, c) funkce je na intervalu $x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{8}{3}})$ konvexní, na intervalu $x \in (-\sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}})$ konkávní a na intervalu $x \in (\sqrt{\frac{8}{3}}, \infty)$ konvexní, d) funkce je konvexní na celém definičním oboru, e) funkce je konvexní na celém definičním oboru, f) funkce je konkávní na celém definičním oboru.

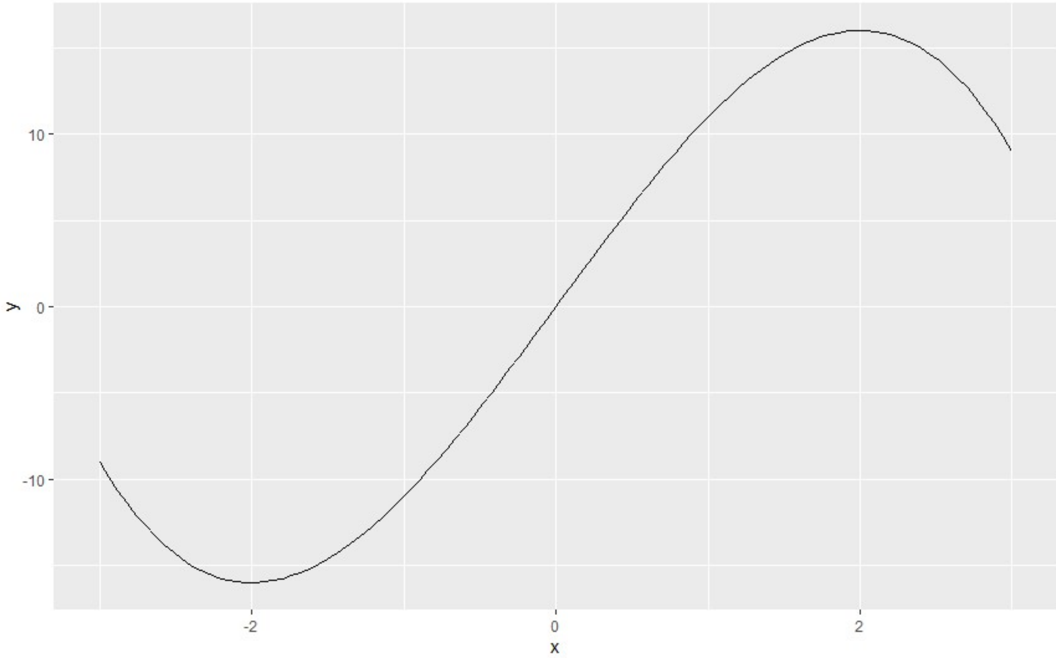
3.3. a) D(f) = R, ani sudá, ani lichá, ani periodická, průsečíky s osami: [0,0], H(f) = R+, maximum: [-2,4/e^2], minimum: [0,0], $x \in (-\infty,-2)$: rostoucí, $x \in (-2,0)$: klesající, $x \in (0,\infty)$: rostoucí, inflexní body: $\left[-2,\sqrt{2}\right]$, $\left[-2,-\sqrt{2}\right]$, $x \in \left(-\infty,-2-\sqrt{2}\right)$: konvexní, $x \in \left(-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\right)$: konkávní, $x \in \left(-2+\sqrt{2},\infty\right)$: konvexní, asymptoty: osa *x*.



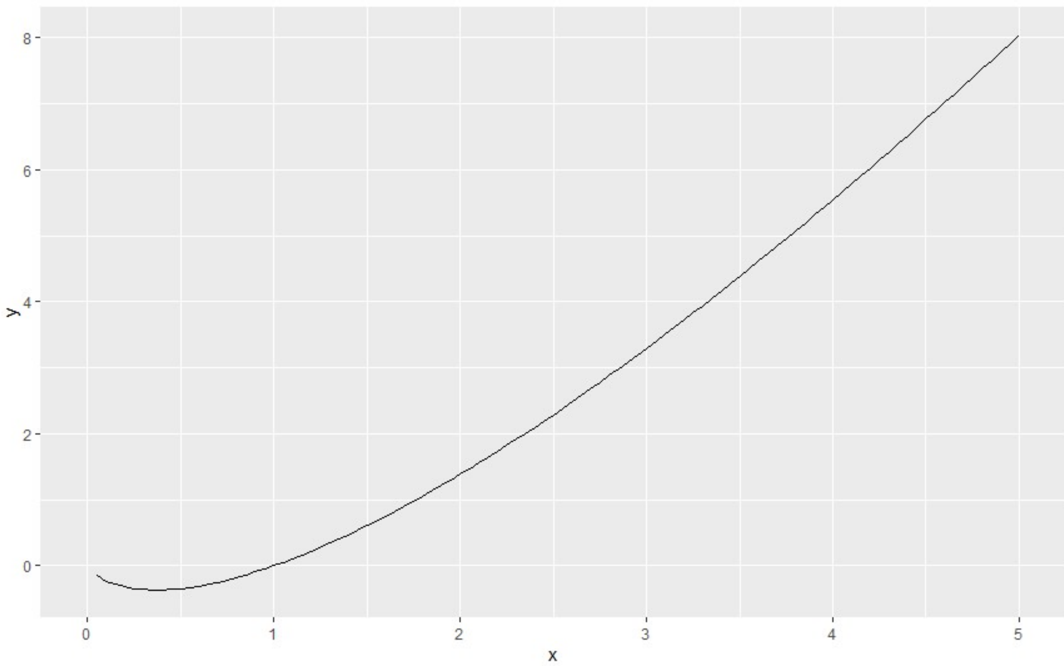
b) D(f) = R, ani sudá, ani lichá, ani periodická, průsečíky s osami: [0,8] (průsečíky s osou x vypočítat neumíme), H(f) = R, maximum: [0,8], minimum: [1,7], $x \in (-\infty,0)$: rostoucí, $x \in (0,1)$: klesající, $x \in (1,\infty)$: rostoucí, inflexní bod: x = 1/2, $x \in (-\infty,1/2)$: konkávní, $x \in (1/2,\infty)$: konvexní, asymptoty: nejsou.



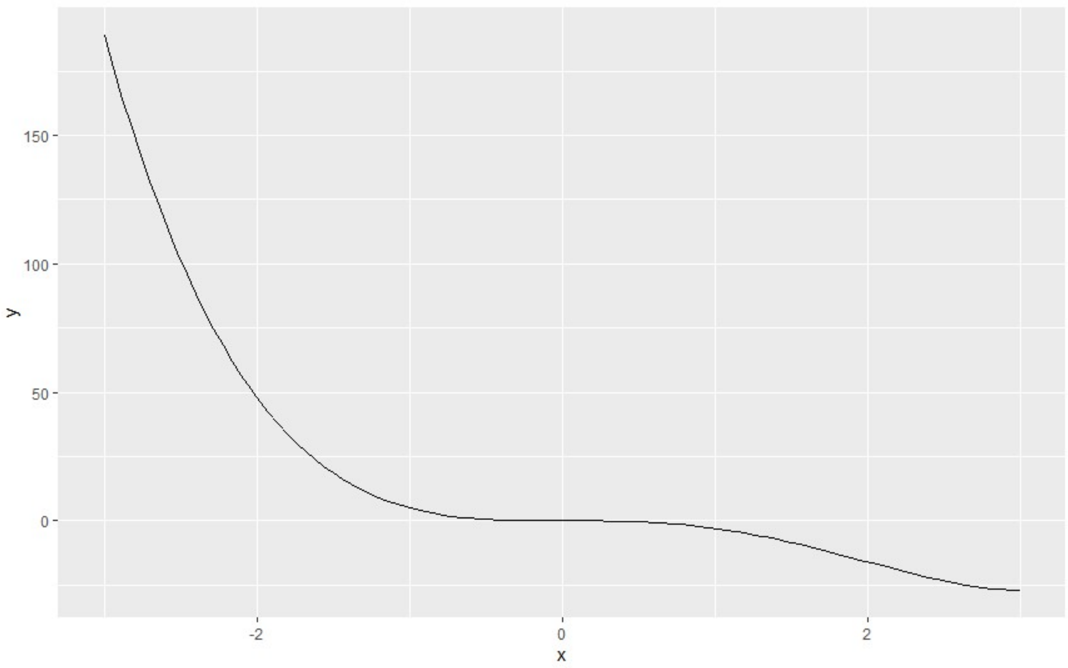
c) D(f) = R, ani sudá, ani lichá, ani periodická, průsečíky s osami: [0,0], $\left[-\sqrt{12},0\right]\left[\sqrt{12},0\right]$, $x=-2$: MIN, $x=2$: MAX, $x\in(-\infty,-2)$: klesající, $x\in(-2,2)$: rostoucí, $x\in(2,\infty)$: rostoucí, x = 0: inflexní bod, $x\in(-\infty,0)$: konvexní, $x\in(0,\infty)$: konkávní, asymptoty nejsou, H(f) = R.



d) $D(f)=(0,\infty)$, ani sudá, ani lichá, ani periodická, průsečíky s osami: [1,0], $x=1/e$: MIN, $x\in(0{,}1/e)$: klesající, $x\in(1/e,\infty)$: rostoucí, funkce je na celém definičním oboru konvexní, nemá asymptoty, $H(f)=(-1/e,\infty)$.



e) D(f) = R, ani sudá, ani lichá, ani periodická, průsečíky s osami: [0,0] a [4,0], $x = 3$: MIN, $x \in (-\infty,3)$: klesající, $x \in (3,\infty)$: rostoucí, inflexní body: $x = 0$ a $x = 2$, $x \in (-\infty,0)$: konvexní, $x \in (0,2)$: konkávní, $x \in (2,\infty)$: konvexní, asymptoty nejsou, H(f) = $(-27,\infty)$.



4 REÁLNÁ FUNKCE DVOU REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Kapitola je věnována úvodu do reálných funkcí dvou reálných proměnných. Zaměřuje se především na určení definičního oboru, výpočtu první a druhé parciální derivace, výpočtu totálního diferenciálu a aplikace v ekonomii na příkladu Cobb-Douglasovy funkce.

CÍLE KAPITOLY

- Zavést funkci dvou reálných proměnných.
- Naučit se graficky určovat definiční obor funkce dvou reálných proměnných.
- Zavést první a druhé parciální derivace funkce.
- Zavést totální diferenciál.
- Využít parciální derivace v aplikaci na Cobb-Douglasovu produkční funkci.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Funkce dvou reálných proměnných, derivace funkce, Cobb-Douglasova produkční funkce.

4.1. ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY

Definičním oborem funkce $f(x,y)$ proměnných x a y rozumíme všechny uspořádané dvojice $[x,y] \in R^2$, pro které má daná funkce smysl. Definiční obor obvykle znázorňujeme graficky v pravoúhlé soustavě souřadnic jako (vyšrafovanou) část roviny.

Pro parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle x respektive y užíváme následující značení:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\quad f'_x(x,y),\quad f_x{}' \quad \text{, respektive } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y},\quad f'_y(x,y),\quad f_y{}'$$

Při výpočtu parciální derivace podle x postupujeme tak, že y považujeme za konstantu (pouze ji opisujeme) a funkci $f(x,y)$ derivujeme podle x. Při výpočtu parciální derivace podle y postupujeme přesně opačně.

Druhé parciální derivace značíme takto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Výraz $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ znamená, že funkci $f(x, y)$ derivujeme (poprvé) podle proměnné x, a poté (podruhé) opět podle x. Význam ostatních druhých derivací je obdobný.

Jsou-li druhé parciální derivace spojité, u smíšené derivace nezáleží na pořadí derivování, platí tedy: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Totálním diferenciálem (prvního řádu) funkce dvou proměnných $f(x, y)$ v bodě $C[c_1, c_2]$ nazýváme výraz:

$$df(C) = \frac{\partial f}{\partial x}(C)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(C)dy$$

Stejně jako u funkce jedné proměnné vyjadřuje totální diferenciál dvou proměnných (přibližně) přírůstek funkce $f(x, y)$ spojený s malým přírůstkem proměnné x (první člen na pravé straně přechozího vztahu) a malým přírůstkem proměnné y (druhý člen na pravé straně).

Cobb-Douglasova[1] produkční funkce udává závislost produkce Q na práci L a kapitálu K:

$$Q = AK^a L^b,\ a, b \in (0,1)$$

K ZAPAMATOVÁNÍ

Podle hodnoty $a + b$ říkáme o produkční funkci, že má:

- konstantní výnosy z rozsahu, je-li $a + b = 1$,
- rostoucí výnosy z rozsahu, je-li $a + b > 1$,
- klesající výnosy z rozsahu, je-li $a + b < 1$.

Pokud je $a + b = 1$, lze vztah pro produkci Q upravit následovně:

$$Q = AK^a L^{1-a}$$

Mezní produkt práce (*marginal product of labour*) MP_L je derivace funkce produkce podle práce:

$$MP_L = \frac{dQ}{dL} = Q'(L)$$

[1] Charles Cobb (1875-1949), americký ekonom, Paul Douglas (1892-1976), americký ekonom.

Podobně jako mezní produkt práce se zavádí mezní produkt kapitálu:

$$MP_K = \frac{dQ}{dK} = Q'(K)$$

4.2. ÚLOHY

4.1. Určete (graficky) definiční obor funkcí dvou proměnných:

a) $f(x,y) = \sqrt{x+y+1}$

b) $f(x,y) = \sqrt{x-4} + y$

c) $f(x,y) = \sqrt{y+3}$

d) $f(x,y) = \ln(y-x)$

e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-16}$

f) $f(x,y) = \ln(y-x^2)$

g) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2-9)$

h) $f(x,y) = \sqrt{x+y} - \sqrt{x+1}$

4.2. Vypočtěte parciální derivace funkce.

a) $f(x,y) = x^2 + 3y^2$

b) $f(x,y) = 4x^2 - 2y^2 + 5x - 2y + 8$

c) $f(x,y) = x^3 + 2xy^2$

d) $f(x,y) = x\ln y$

e) $f(x,y) = x^2 + ye^x + 5y$

f) $f(x,y) = \ln(xy)$

g) $f(x,y) = x\sin(xy) + e^y$

4.3. Vypočtěte všechny druhé parciální derivace funkcí.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

b) $f(x,y) = 2x^3 - 8y + x$

c) $f(x,y) = 6x^2 + ye^x + 5y$

d) $f(x,y) = 10x^2y^2$

4.4. Vyjádřete totální diferenciál funkce:

a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$

b) $f(x,y) = 4x^2y^2$

c) $f(x,y) = \ln x + \ln y$

d) $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + 5x + 6$

e) $f(x,y) = x^4 - 5y^2$

4.5. Určete přírůstek dané funkce v daném bodě pomocí totálního diferenciálu:

a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, C[1,1], dx = 0,1; dy = 0,2

b) $f(x,y) = 2x + 6y^3 + 5$, C[1,2], dx = 0,1; dy = 0,1

c) $f(x,y) = xy^2 + 3x + 1$, C[2,2], dx = 0,1; dy = 0,3

4.6. Určete přírůstek produkční funkce v daném bodě:

a) $Q(K,L) = 6K^{0.5}L^{0.5}$, C[4,9], dK = 0,2; dL = 0,1

b) $Q(K,L) = 14K^{0.5}L^{0.5}$, C[1,4], dK = 0,2; dL = 0,3

c) $Q(K,L) = 100K^{0.3}L^{0.7}$, C[1,1], dK = 0,4; dL = 0,2

4.7. Vypočtěte mezní produkt práce MP_L a kapitálu MP_K:

a) $Q(K,L) = 18K^{0.6}L^{0.4}$ b) $Q(K,L) = 60K^{0.8}L^{0.2}$

c) $Q(K,L) = 50K^{0.5}L^{0.5}$

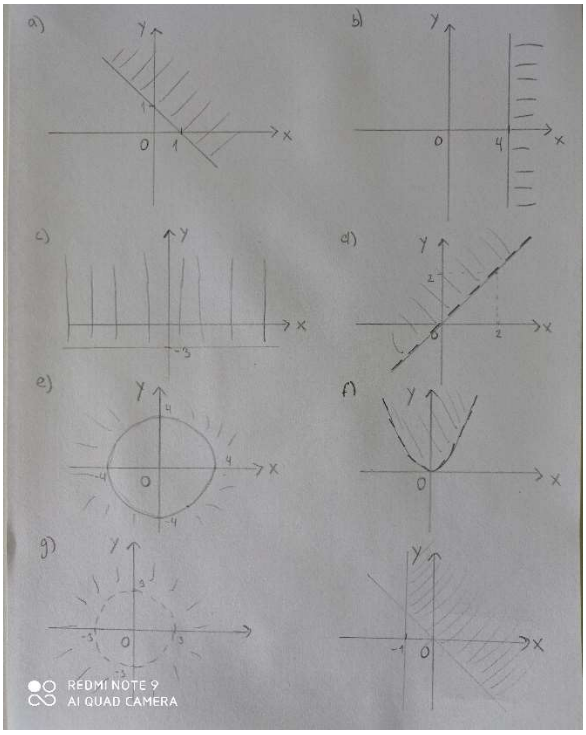
4.8. Vypočtěte (přibližně) mezní produkt práce a kapitálu v daném bodě:

a) $Q(K,L) = 18K^{0.6}L^{0.4}$, K = 1, L = 9 b) $Q(K,L) = 60K^{0.8}L^{0.2}$, K = 5, L = 7

c) $Q(K,L) = 50K^{0.5}L^{0.5}$, K = 10, L = 15

VÝSLEDKY

4.1.



4.2. a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6y$, b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 8x + 5$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -4y - 2$, c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4xy$,

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \ln y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{y}$, e) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + ye^x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = e^x + 5$, f) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{y}$,

g) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \sin(xy) + xy\cos(xy)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2\cos(xy) + e^y$

4.3. a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$,

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12 + ye^x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^x$, d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 20y^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 20x^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 40xy$.

4.4. a) $df = 2xdx + 4ydy$, b) $df = 8xy^2dx + 8x^2ydy$, c) $df = \frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy$, d) $df = (2x + 2y^2 + 5)dx + 4xydy$, e) $df = 4x^3dx - 10ydy$.

4.5. a) df = 1,8; b) df = 7,4; c) df = 3,1.

4.6. a) 1,1, b) 3,85, c) 26.

4.7. a) $MP_L = 7{,}2K^{0,6}L^{-0,6}$, $MP_K = 10{,}8K^{-0,4}L^{0,4}$, b) $MP_L = 12K^{0,8}L^{-0,8}$, b) $MP_K = 48K^{-0,2}L^{0,2}$, c) $MP_L = 25K^{0,5}L^{-0,5}$, $MP_K = 25K^{-0,5}L^{0,5}$.

4.8. a) MP_L = 1,93, MP_K = 26, b) MP_L = 9,17, MP_K = 51,34, c) MP_L = 20,41, MP_K = 30,62.

5 LOKÁLNÍ A VÁZANÉ EXTRÉMY FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Kapitola se věnuje problematice nalezení lokálních a globálních extrémů, tedy maxima a minima funkce dvou reálných proměnných.

CÍLE KAPITOLY

- Demonstrovat nalezení extrémů funkce dvou reálných proměnných.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Funkce dvou proměnných, lokální extrém, globální extrém, vázaný extrém.

5.1. ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY

Podobně jako u funkce jedné reálné proměnné je *nutnou podmínkou* lokálního (a samozřejmě i globálního) maxima či minima nulová první derivace: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$. Tato podmínka však není postačující, neboť v daném bodě může být i inflexní (sedlový) bod.

Bod, v němž má funkce všechny první derivace nulové, se nazývá *stacionární bod* nebo též *bod podezřelý z extrému*, a bude značen *C* (z anglického *critical point*). Jak už bylo řečeno, je v tomto bodě maximum, minimum, nebo inflexní bod. O tom, která alternativa nastává, rozhodneme na základě druhých parciálních derivací, z nichž sestavíme Hesseovu[2] matici a její determinant zvaný *hessián*:

[2] Ludwig Otto Hesse (1811-1874), německý matematik.

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Do hessiánu dosadíme souřadnice bodu C a označíme: $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C)$ a $D_2 = H_f(C)$. D_2 je determinant Hesseovy matice.

K ZAPAMATOVÁNÍ

Pro určení extrému pak platí následující pravidlo:

- $D_2 > 0$: v bodě C je EXTRÉM, a to (lokální ostré) MINIMUM, pokud je $D_1 > 0$; a (lokální ostré) MAXIMUM, pokud je $D_1 < 0$.
- $D_2 < 0$: v bodě C je sedlo (inflexní bod).
- $D_2 = 0$: v daném bodě může (ale nemusí) být extrém, o extrému se musí rozhodnout jiným způsobem, například pomocí totálního diferenciálu druhého či vyššího řádu, viz například [2].

Vázané extrémy označují situaci, kdy kromě funkce $f(x, y)$ je ještě zadána *vazba* (omezující podmínka pro x a y) ve tvaru $g(x, y) = 0$. Hledáme extrémy funkce $f(x, y)$, které jsou vázány (leží na ní) křivkou $g(x, y) = 0$. Postupujeme dosazovací metodou nebo Lagrangeovou metodou neurčitých multiplikátorů, viz [1, 2].

5.2. ÚLOHY

5.1 Najděte extrémy funkce dvou proměnných:

a) $f(x, y) = 2x^2 - 10y^2 + 4x$

b) $f(x, y) = 3x^2 + 10y^2 - 12x - 40y + 5$

c) $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 10x + 50y + 200$

d) $f(x, y) = 2x^2 + xy - 9y + 5$

e) $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + y^2 + 2y + 5$

f) $f(x, y) = x^3 - 12x + 4y^2$

5.2. Najděte vázané extrémy funkce:

a) $f(x,y)=x^2+y^2$, $g(x,y): x+y-1=0$

b) $f(x,y)=10x^2+y^2, g(x,y): y=x-2$

c) $f(x,y)=4xy+5, g(x,y): y=x-1$

d) $f(x,y)=ye^x+4, g(x,y): y=x+3$

5.3. Maximalizujte příjem $TR(x,y)=-5x^2+40x-4y^2+160y+200$.

5.4. Minimalizujte náklady: $TC(x,y)=10x^2-120x+40y^2-1200y+2000$.

5.5. Maximalizujte příjem $TR(x,y)=-x^2+20x-y^2+22y+1600$ za podmínky $x+y=5$.

VÝSLEDKY

5.1. a) C [-1,0] inflexní bod, b) C [2,2] minimum, c) C [5,25] maximum, d) C [9,-36] inflexní bod, e) C [0,-1] inflexní bod a C [1,-1] minimum, f) C [2,0] minimum a C [-2,0] inflexní bod.

5.2. a) [1/2,1/2] minimum, b) [2/11,-20/11] minimum, c) [1/2,1/2] minimum, d) [-4,-1] minimum.

5.3. Bod [4,20] je maximum příjmu.

5.4. Bod [6,15] je minimum nákladů.

5.5. Bod [2,3] je maximum příjmu.

6 NEURČITÝ INTEGRÁL

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Kapitola je věnována úvodu do neurčitého integrálu, seznámení se základními pojmy a vztahy, a také ekonomickým aplikacím.

CÍLE KAPITOLY

- Zavést neurčitý integrál.
- Seznámit se se základními vztahy a způsoby integrace.
- Demonstrovat užití neurčitého integrálu v ekonomii.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Neurčitý integrál, primitivní funkce.

6.1. ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY

Funkce $F(x)$ se nazývá *primitivní funkcí* k funkci $f(x)$ na otevřeném intervalu $J \subseteq R$ právě tehdy, když $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in J$. Primitivní funkce existuje ke každé spojité funkci na J. Množina všech primitivních funkcí k dané funkci $f(x)$ se označuje jako *neurčitý integrál* k funkci $f(x)$, a značí se takto:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

kde $\int$ je integrační znak,

x integrační proměnná,

$f(x)$ integrovaná funkce neboli integrand,

$F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$,

C integrační konstanta.

Neurčitý integrál je lineární operátor, což znamená, že splňuje následující dvě podmínky:

i) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$,

ii) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Integrály základních funkcí jsou uvedeny v Tabulce 6.1.

Integraci součinu funkcí provádíme metodou *per partes* (latinsky „po částech“) pomocí následujícího vztahu.

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

Racionální funkce (funkce ve tvaru zlomku) rozkládáme na parciální zlomky. Při integraci složitějších funkcí používáme substituce, viz dále.

K ZAPAMATOVÁNÍ

Substituci provádíme typicky v těchto případech:

- Je-li v integrálu složená funkce (v závorce), pak nahrazujeme vnitřní funkci (tedy onu závorku),
- Je-li v integrálu odmocnina, pak nahrazujeme celou odmocninu nebo výraz pod odmocninou,
- Jsou-li v integrálu různé goniometrické funkce, pak provedeme substituci tak, abychom dostali buď jednu goniometrickou funkci, nebo racionální funkci bez goniometrických funkcí.

Funkce *celkových nákladů* $TC(x)$ a funkce *mezních nákladů* $MC(x)$, kde x je počet výrobků, spolu souvisejí vztahem:

$$TC(x) = \int MC(x)dx + C$$

Předchozí vztah říká, že celkové náklady jsou integrálem (tedy součtem) součtem mezních nákladů. Integrační konstanta C se určí z jedné známé hodnoty $TC(x)$ pro dané x.

Celkové příjmy $TR(x)$ a *mezní příjmy* $MR(x)$:

$$TR(x) = \int MR(x)dx + C$$

Tabulka 6.1. Základní integrály.

řádek	$f(x)$	$\int f(x)dx$
1	0	C
2	1	x + C
3	x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ + C
4	e^x	e^x + C
5	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$ + C
6	$\dfrac{1}{ax+b}$	$\dfrac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
7	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$ + C
8	sin x	–cos x + C
9	cos x	sin x + C
10	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	tg x + C
11	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	cotg x + C
12	$\dfrac{1}{1+x^2}$	arctg x + C
13	$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$
14	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arcsin x + C
15	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arccos x + C
16	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{1+x^2}\right\rvert$ + C

6.2. ÚLOHY

6.1. Vypočtěte:

a) $\int x^4 dx$

b) $\int (x^2 + x^3) dx$

c) $\int 10x^5 dx$

d) $\int (x^2 + 6x - 4) dx$

e) $\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) dx$

f) $\int (\frac{6}{x} + \frac{4}{x^3}) dx$

g) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$

h) $\int (5e^x + 3^x) dx$

i) $\int (3\sin x + 2\cos x) dx$

6.2. Vypočtěte (metoda per partes):

a) $\int x \sin x dx$

b) $\int x^2 e^x dx$

c) $\int x^4 \ln x dx$

d) $\int (x^2 + 6x) \sin x dx$

e) $\int (2x + 4) \cos x dx$

6.3. Vypočtěte (použijte substituci):

a) $\int \sin(4x + 5) dx$

b) $\int (2x + 8)^3 dx$

c) $\int \sqrt{2x - 8} dx$

d) $\int 2x\sqrt{x^2 + 1} dx$

e) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

f) $\int \frac{e^x}{e^x + 5} dx$

g) $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$

h) $\int \sin x \cdot \cos^5 x dx$

i) $\int e^{3x-5} dx$

j) $\int (3x + 1)^4 dx$

6.4. Vypočtěte (použijte rozklad na parciální zlomky):

a) $\int \frac{8x}{x^2 + 2x - 3} dx$

b) $\int \frac{8x - 3}{x^2 - 3x} dx$

c) $\int \frac{4x^2 + x - 2}{x^3 - x^2} dx$

d) $\int \frac{4x + 9}{x^2 + x - 12} dx$

e) $\int \frac{7x + 27}{x^2 + 6x + 5} dx$

VÝSLEDKY

6.1. a) $\frac{x^5}{5}+C$, b) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+C$, c) $\frac{5x^6}{3}+C$, d) $\frac{x^3}{3}+3x^2-4x+C$, e) $\ln|x|-\frac{1}{x}+C$,

f) $6\ln|x|-\frac{2}{x^2}+C$, g) $\frac{2}{3\sqrt{x^3}}+\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}+C$, h) $5e^x+\frac{3^x}{\ln 3}+C$, i) -3cosx+2sinx+C.

6.2. a) $-x\cos x+\sin x+C$, b) $x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$, c) $\frac{x^5}{5}\ln|x|-\frac{x^5}{25}+C$,

d) $-\cos x(x^2+6x)+(2x+6)\sin x-2\cos x+C$, $(2x+4)\sin x+2\cos x+C$

6.3. a) $-\frac{\cos(4x+5)}{4}+C$, b) $\frac{(2x+8)^4}{8}+C$, c) $\frac{\sqrt{(2x-8)^3}}{3}+C$, d) $\frac{2\sqrt{(x^2+1)^3}}{3}+C$,

e) $\frac{(\ln x)^3}{3}+C$, f) $\ln|e^x+5|+C$, g) $\frac{\sin^3 x}{3}+C$, h) $-\frac{\cos^6 x}{6}+C$, i) $\frac{e^{3x-5}}{3}+C$, j) $\frac{(3x+1)^5}{15}+C$.

6.4. a) $6\ln|x+3|+2\ln|x-1|+C$, b) $\ln|x|+7\ln|x-3|+C$, c) $\ln|x|-\frac{2}{x}+3\ln|x-1|+C$, d) $\ln|x+4|+3\ln|x-3|+C$, e) $2\ln|x+5|+5\ln|x+1|+C$.

7 URČITÝ INTEGRÁL

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Kapitola je věnována určitému (Newtonovu) integrálu spojité funkce. Obsahuje základní pojmy a vztahy, pravidla pro integraci a ekonomické aplikace určitého integrálu.

CÍLE KAPITOLY

- Zavést určitý (Newtonův) integrál.
- Představit pravidla pro výpočet určitého integrálu.
- Demonstrovat užití určitého integrálu v ekonomii.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Určitý integrál, pravidla integrování, ekonomické aplikace.

7.1. ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY

Výpočet určitého integrálu provádíme pomocí Newtonova-Leibnizova vzorce:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

kde funkce $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a,b \rangle$. Čísla a a b ve vztahu výše se nazývají dolní a horní *integrační meze*.

Obsah plochy mezi křivkami $f(x)$ a $h(x)$, kde $h(x)$ je horní křivka a $f(x)$ dolní křivka, a kde a a b jsou průsečíky obou křivek, počítáme podle vztahu:

$$S = \int_a^b \left(h(x) - f(x)\right)dx$$

Celkový příjem TR za období (t_1;t_2), jestliže funkce $f(t)$ vyjadřuje *intenzitu toku příjmu* (velikost renty) v čase t, se vypočte jako:

$$TR = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$$

Označme $D(Q)$ jako funkci poptávky, $S(Q)$ jako funkci nabídky, Q_E budiž rovnovážné množství a P_E rovnovážná cena. Přebytek spotřebitele a výrobce v podmínkách dokonalé konkurence se určí následovně:

Přebytek spotřebitele CS (customer surplus):

$$CS = \int_0^{Q_E} D(Q)dQ - Q_E P_E$$

Přebytek výrobce PS (*producer surplus*):

$$PS = Q_E P_E - \int_0^{Q_E} S(Q)dQ$$

7.2. ÚLOHY

7.1. Vypočtěte:

a) $\int_0^2 x^2 dx$ b) $\int_1^3 x^2 dx$

c) $\int_0^3 x^3 dx$ d) $\int_0^2 x^4 dx$

e) $\int_0^1 (x^2 + 2x)dx$ f) $\int_1^3 (x^2 - 2x + 4)dx$

g) $\int_1^5 \frac{1}{x} dx$ h) $\int_1^2 \frac{2}{x^2} dx$

i) $\int_0^1 e^x dx$ j) $\int_0^\pi \sin xdx$

7.2. Určete obsah ploch nad (pod) křivkou na daném intervalu:

a) $y = x^2,\ x \in (1,4)$ b) $y = x^2,\ x \in (-1,1)$

c) $y = x^3,\ x \in (0,2)$ d) $y = x^3,\ x \in (-1,2)$

e) $y = x^2 + 1,\ x \in (0,1)$

7.3. Určete obsah plochy sevřené křivkami:

a) $y = x^2,\ y = x$ b) $y = x^2,\ y = 2x$

c) $y = x^2,\ y = 3x$ d) $y = x^3,\ y = x$

e) $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$

7.4. Určete přebytek spotřebitele a výrobce v podmínkách dokonalé konkurence:

a) $D(Q) = 100 - Q$, $S(Q) = 40 + 3Q$ b) $D(Q) = 84 - 3Q$, $S(Q) = 20 + Q$

c) $D(Q) = 300 - 5Q$, $S(Q) = 200 + 5Q$

7.5. Určete celkový příjem, je-li intenzita toku příjmu $f(t) = 2t^2 + 50$, $t_1 = 0$, $t_2 = 10$.

VÝSLEDKY

7.1. a) 8/3, b) 26/3, c) 81/4, d) 32/5, e) 4/3, f) 26/3, g) ln5, h) 1, i) e-1, j) 2.

7.2. a) 21, b) 2/3, c) 4, d) 17/4, e) 4/3.

7.3. a) 1/6, b) 4/3, c) 9/2, d) 1/2, e) 1/3.

7.4. a) CS = 112,5, PS = 337,5, b) CS = 384. PS = 128, c) CS = 250, PS = 250.

7.5. 1167.

8 ČÍSELNÉ ŘADY

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Kapitola se věnuje nekonečným číselným řadám, problematice jejich konvergence a určování součtu řad, které jsou konvergentní.

CÍLE KAPITOLY

- Zavést pojem nekonečné číselné řady.
- Zavést konvergenci a divergenci řad.
- Demonstrovat ekonomické aplikace číselných řad.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Číselná řada, konvergence, divergence, součet řady.

8.1. ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY

Číselnou řadou nazýváme součet (reálných) čísel $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Je-li počet sčítanců konečný, mluvíme o *konečné číselné řadě*, je-li počet sčítanců nekonečný ($n \to \infty$), jedná se o *nekonečnou číselnou řadu*:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

V dalším výkladu se budeme až na výjimky zabývat nekonečnými číselnými řadami (krátce jen „řadami“).

Veličina $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ se nazývá *n-tý částečný součet řady*. Je to součet prvních n členů řady. *Součet řady s* je pak limitou posloupnosti částečných součtů s_n:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

Jestliže má daná řada konečný součet, nazývá se *konvergentní*. V opačném případě, to jest když je součet nekonečný anebo vůbec neexistuje, je řada *divergentní*.

Nekonečná geometrická řada je řada ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$.

Součet *nekonečné geometrické řady*:

$$s = \frac{a_1}{1-q}, \ |q| < 1 .$$

K určování konvergence/divergence číselných řad používáme kritéria konvergence, například *podílové kritérium*, *odmocninové kritérium* nebo *integrální kritérium*, podrobněji viz [1].

8.2. ÚLOHY

8.1. Určete součet geometrické řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n$

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n$

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$

8.2. Určitý film vydělal za první týden promítání v kinech 50 milionů dolarů. Producent filmu odhaduje, že každý následující týden budou tržby filmu klesat o a) 40 %, b) 30 %, c) 50 %. Odhadněte celkové tržby filmu.

8.3. Rozhodněte o konvergenci (divergenci) nekonečných řad:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n^3}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\ln n}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$

VÝSLEDKY

8.1. a) 2, b) 2/3, c) 1/3, d) divergentní, e) 1/4, f) $\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$, g) divergentní, h) 7/4, i) 5/2.

8.2. a) 125 mil., b) 167 mil., d) 100 mil.

8.3. a) divergentní, b) divergentní, c) konvergentní, d) konvergentní, e) divergentní, f) konvergentní, g) konvergentní, h) divergentní, i) divergentní.

9 FUNKČNÍ ŘADY

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Kapitola je věnována nekonečným funkčním řadám, které představují zobecnění nekonečných číselných řad, a problematice jejich konvergence.

CÍLE KAPITOLY

- Zavést pojem nekonečné funkční řady.
- Zavést pojem konvergence funkční řady a různých typů konvergence.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Funkční řada, konvergence, obor konvergence, interval konvergence, absolutní konvergence.

9.1. ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY

Nechť $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... je posloupnost funkcí. *Nekonečná funkční řada* je symbol:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$$

Součet funkční řady je funkce $s(x)$, kterou získáme (stejně jako u nekonečných číselných řad) jako limitu posloupnosti částečných součtů $s_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$$

Řada je *konvergentní*, jestliže funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ konverguje k funkci $s(x)$ na jisté množině *M*.

Pokud k $s(x)$ konverguje i řada absolutních hodnot $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, hovoříme o *absolutní konvergenci*.

Množina všech $x \in M$, pro které řada konverguje (konverguje absolutně), se nazývá *obor konvergence* (*obor absolutní konvergence*), a v dalším textu bude značen jako *OK* (*OAK*).

Mocninná řada má tvar: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n$. Interval konvergence mocninné řady $IK=(a-\rho, a+\rho)$, kde a je takzvaný střed řady a ρ je poloměr konvergence, se určí pomocí následujících limit:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad \text{nebo} \quad \rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

Geometrická řada má tento tvar: $\sum_{n=1}^{\infty} f^n(x)$.

Označíme-li $f(x) = q$, pak řada konverguje pro $|q| < 1$, a součet geometrické řady:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{f(x)}{1-f(x)}.$$

9.2. ÚLOHY

9.1. Určete *IK*, *OK* a *OAK* u následujících řad, u geometrických řad určete i jejich součet.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-5)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} e^n (x-1)^n$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-2)^n$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^n}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{5^n}$

VÝSLEDKY

9.1. a) geometrická (i mocninná) řada, $IK = OK = (-3,-1)$, $s = -\dfrac{x+2}{x+1}$, b) geometrická (i mocninná) řada, $IK = OK = (4,6)$, $s = \dfrac{x-5}{-x+6}$, c) mocninná řada, $IK = (-4,-2)$, $OK = \langle -4,-2)$, d) mocninná řada, $IK = OK = (0,2)$, e) mocninná řada, $IK = OK = (1-1/e, 1+1/\mathrm{e})$, f) mocninná řada, $IK = (3,5)$, $OK = \langle 3,5)$, g) geometrická, $OK = (-\infty,0)$, $s = \dfrac{1}{1-e^x}$, h) mocninná řada, $OK = \{2\}$, i) geometrická i mocninná, $IK = OK = (-6,-2)$, $s = -\dfrac{x+4}{x+2}$, j) geometrická i mocninná, $IK = OK = (-5,5)$, $s = \dfrac{x}{5-x}$, k) mocninná i geometrická, $OK = OAK = (-5,5)$, $s = \dfrac{-x}{x+5}$.

10 ÚVOD DO OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY

Kapitola je věnována úvodu do diferenciálních rovnic a základním metodám řešení diferenciálních rovnic.

CÍLE KAPITOLY

- Zavést pojem obyčejné diferenciální rovnice
- Zavést pojem obecného a partikulárního řešení.
- Demonstrovat základní metody řešení diferenciálních rovnic.

KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

Diferenciální rovnice, obecné řešení, partikulární řešení.

10.1. ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY

Mějme funkci jedné proměnné $y = f(x)$. Diferenciální rovnice je rovnice, která kromě x a y obsahuje i derivaci (derivace) funkce y. *Řád* diferenciální rovnice je určen nejvyšší derivací, mocnina u nejvyšší derivace určuje *stupeň* diferenciální rovnice.

Rozlišujeme tři druhy řešení diferenciální rovnice:

- *Obecné řešení* je funkce $y(x, C_i)$ vyhovující dané rovnici a obsahující (neurčité) konstanty C_i podobně jako u neurčitého integrálu.
- *Partikulární řešení* obdržíme z obecného řešení tak, že konstanty C_i nahradíme reálným číslem, případně mohou tyto konstanty vyplývat například z takzvaných počátečních nebo okrajových podmínek.
- *Singulární řešení* je řešení, které nelze získat z obecného řešení pro žádné hodnoty C_i,

Diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými má obecně tento tvar:

$$P(x) + Q(y)y' = 0 \text{ nebo } P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

kde $P(x)$ a $Q(y)$ jsou funkce (polynomy) proměnné x, respektive y.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu má následující tvar:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

kde $p(x)$ a $q(x)$ jsou dané funkce.

Řešíme ji metodou separace proměnných a variace konstanty.

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty má tento tvar:

$$y'' + ay' + c = p(x)$$

kde a a c jsou reálná čísla.

Řešení hledáme ve tvaru $y = Ce^{\lambda x}$, více viz [1].

10.2. Úlohy

10.1. Určete obecné a partikulární řešení diferenciální rovnice.

a) $y' = 2x + 5, y(0) = 1$

b) $y' = 1 - x^2, y(1) = 3$

c) $y' = \frac{2}{x} + 1, y(1) = 2$

d) $y' = x^3 - 3x^2, y(0) = 2$

e) $y' = x^2 + 5x + 3, y(2) = 2$

10.2. Určete obecné řešení diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými.

a) $y'y = 4x$

b) $x^2 dx - 2y dy = 0$

c) $y' = \frac{x^3}{y}$

d) $y'y^2 = x + 1$

e) $\frac{y'}{y} = x^2 + 1$

10.3. Určete obecné řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu s nenulovou pravou stranou.

a) $y' + xy = 2x$

b) $y' - (2x - 1)y = 1 - 2x$

c) $y' - 3x^2 y = x^2$

10.4. Určete obecné řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty.

a) $y'' + y' - 6y = 0$

b) $y'' + 7y' + 12y = 0$

c) $y'' + 2y' - 3y = 0$

d) $y'' - 4y' + 4y = 0$

e) $y'' + 3y' - 10y = 0$

VÝSLEDKY

10.1. a) obecné řešení: $y=x^2+5x+C$, partikulární řešení: $y=x^2+5x+1$, b) obecné řešení: $y=x-\frac{x^3}{3}+C$, partikulární řešení: $y=x-\frac{x^3}{3}+\frac{7}{3}$, c) obecné řešení: $y=2\ln|x|+x+C$, partikulární řešení: $y=2\ln|x|+x+1$, d) obecné řešení: $y=\frac{x^4}{4}-x^3+C$, partikulární řešení: $y=\frac{x^4}{4}-x^3+2$, e) obecné řešení: $y=\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}+3x+C$, partikulární řešení: $y=\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}+3x+\frac{50}{3}$.

10.2. a) $y^2=4x^2+C$, b) $\frac{x^3}{3}=y^2+C$, c) $\frac{y^2}{2}=\frac{x^4}{4}+C$, d) $\frac{y^3}{3}=\frac{x^2}{2}+x+C$,

e) $y=e^{\frac{x^3}{3}+x+C}$

10.3. a) $y=(2e^{\frac{x^2}{2}}+C)e^{-\frac{x^2}{2}}$, b) $y=(e^{x-x^2}+C)e^{x^2-x}$, c) $y=(-\frac{e^{-x^3}}{3}+C)e^{x^3}$

10.4. a) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$, b) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-4x}$, c) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$,

d) $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$, e) $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{2x}$.

ZÁVĚR

Studijní opora Sbírka úloh – Matematika v ekonomii je určená studentům prvního ročníku navazujícího studia na Obchodně podnikatelské fakultě Slezské univerzity. Jejím cílem je poskytnout studentům dodatečné množství úloh k osvojení a porozumění diferenciálnímu a integrálnímu počtu. Autor věří, že společně s dříve vydanou publikací Matematika v ekonomii tak studenti získají dostatečné množství učebního materiálu k úspěšnému absolvování tohoto předmětu.

LITERATURA

[1] MAZUREK, J. 2012. *Matematika v ekonomii*. SU OPF Karviná.

[2] GODULOVÁ, M., JANŮ, I., KOCURKOVÁ, R. 2002. *Matematika B*. Karviná: OPF.

Název:	**Sbírka úloh - Matematika v ekonomii**
Autor:	**Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D.**
Vydavatel:	Slezská univerzita v Opavě
	Obchodně podnikatelská fakulta v Karviné
Určeno:	studentům SU OPF Karviná
Počet stran:	52

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou.