INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Slezská univerzita v Opavě
Obchodně podnikatelská fakulta v Karviné

MATEMATIKA V EKONOMII

Pro prezenční i kombinovanou formu studia

Jiří Mazurek

Karviná 2013

Projekt OP VK č. CZ.1.07/2.2.00/28.0017
„Inovace studijních programů na Slezské univerzitě,
Obchodně podnikatelské fakultě v Karviné“

Obor: Matematika, Ekonomie.

Anotace:

Matematika v ekonomii je opora určená studentům prezenční i kombinované formy navazujícího magisterského studia na Obchodně podnikatelské fakultě v Karviné pro stejnojmenný jednosemestrální předmět, který svým obsahem navazuje na předmět Kvantitativní metody vyučovaný v prvním ročníku. Cílem Matematiky v ekonomii je prohloubit znalosti studentů především v oblasti matematické analýzy, a demonstrovat její užití v různých oblastech ekonomie. Opora zahrnuje reálné funkce jedné a více proměnných, průběh funkce, nekonečné řady, diferenciální a integrální počet, a diferenciální rovnice. Aplikace matematické analýzy v oblasti ekonomie zahrnuje hledání extrémů (maxima a minima) ekonomických funkcí, jako jsou náklady, příjmy, zisk, užitek, produkce, apod., analýzu vlastností těchto funkcí a jejich vzájemných vztahů, a také matematické modelování ekonomických situací.

Klíčová slova: Diferenciální počet, funkce, integrální počet, mikroekonomie, optimalizace.

Autor: **Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D.**

Recenzenti: prof. RNDr. Jaroslav Ramík, CSc.
RNDr. Danuše Bauerová, Ph.D.

ISBN **978-80-7248-837-7**

OBSAH

ÚVOD

Studijní opora *Matematika v ekonomii* je určena posluchačům prezenční i kombinované formy navazujícího magisterského studia na Obchodně podnikatelské fakultě Slezské univerzity v Karviné. Její obsah odpovídá sylabu stejnojmenného jednosemestrálního předmětu, tedy *Matematice v ekonomii*. Do roku 2012 byl tento předmět vyučován pod názvem *Matematika*.

Obsahem *Matematiky v ekonomii* je diferenciální a integrální počet funkce jedné a více reálných proměnných, a jeho aplikace v ekonomické oblasti. Protože je opora určena studentům s často jen základními znalostmi matematické analýzy (předpokladem je absolvování základního kurzu matematiky pro fakulty s ekonomickým zaměřením), je její text formulován tak, aby byl pro čtenáře co nejvíce srozumitelný. Proto v textu chybí v matematické literatuře obvyklá struktura Definice-Věta-Důkaz, stejně jako důkazy matematických vět. Matematický formalismus je používán jen v nezbytně nutné míře, věty a definice jsou často zjednodušeny (ovšem při zachování jejich formální správnosti) a opatřeny vysvětlujícími komentáři.

Studijní opora je členěna do dvanácti kapitol. Každá kapitola obsahuje nové matematické pojmy, věty a příslušné matematické výsledky, ilustrační obrázky, úlohy a postupy při jejich řešení, ekonomické aplikace a v závěru každé kapitoly najde čtenář soubor úloh k procvičení s výsledky. Samotný výklad učiva je založen na velkém množství řešených příkladů různé obtížnosti.

Tvorba opory byla financována z projektu OPVK č. CZ.1.07/2.2.00/28.0017: „Inovace studijních programů na Slezské univerzitě, Obchodně podnikatelské fakultě v Karviné“.

1 FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

1.1 POJEM FUNKCE

Stěžejním pojmem matematiky (a také ekonomie) je pojem *funkce*. Funkcí rozumíme předpis, který každému číslu x z jedné množiny (definičního oboru) přiřadí právě jedno číslo y z druhé množiny (oboru hodnot). Důležité je spojení „právě jedno“, které vyjadřuje, že každému číslu x je přiřazeno přesně jedno y. Pokud by některému x bylo přiřazeno více y, nejednalo by se už o funkci, ale jen o relaci.

Funkci obvykle značíme písmenem f (g, h, ...), definiční obor funkce jako $D(f)$ nebo D_f a obor hodnot $H(f)$ nebo H_f. Funkční předpis se značí $y = f(x)$, například $y = x^2 + 1$. Proměnná x se nazývá *nezávislá proměnná* (*argument*), proměnná y je *závislá proměnná*. Uzavřený interval bude dále označován $\langle a, b \rangle$, otevřený interval (a, b) a souřadnice bodu $[a_1, a_2]$.

Je-li možné upravit funkci na tvar $y = f(x)$, nazývá se taková funkce *explicitní*. Některé funkce však takto vyjádřit nelze, příkladem může být například funkce $y = x + \ln y$. U této funkce není možné osamostatnit y na levé straně. Takové funkce nazýváme *implicitní*, a zapisujeme je ve tvaru $f(x, y) = 0$.

Funkce vyjadřují závislost jedné veličiny na jiné veličině. V ekonomii se nejčastěji setkáváme s funkcemi poptávky, nabídky, příjmů, nákladů, užitku, produkce, atd.

Funkce mohou být definovány pro různé číselné obory (mohou to být čísla přirozená, celá, reálná, komplexní, reálná kladná, apod.). V ekonomii se však s komplexními čísly obvykle nesetkáme, proto se budeme zabývat pouze reálnými funkcemi reálné proměnné (kde x i y jsou reálná čísla, která značíme symbolem $\boldsymbol{R}$), přičemž přívlastek „reálný“ bude dále kvůli jednoduchost vyjadřování vynecháván.

V odstavcích výše jsme zavedli pojem *funkce jedné proměnné*. Obecně však může jedna veličina (například z) záviset na více veličinách (x, y, u, ...). To je v ekonomii častý jev. Například produkce Q závisí na kapitálu K a práci L (viz Cobb-Douglasova funkce). Takovéto funkce se označují jako *funkce více proměnných*, a je jim věnována Kapitola 4.

V následujících kapitolách se budeme věnovat základním pojmům a vlastnostem funkcí jedné reálné proměnné, k opakování této problematiky lze doporučit například učebnici Polák (2008).

1.2 GRAF FUNKCE

Grafem funkce $y = f(x)$ nazýváme množinu všech bodů o souřadnicích $[x, f(x)]$, kde $x \in D(f)$. Grafem lineární funkce je přímka, kvadratické funkce parabola, nepřímé úměrnosti hyperbola, atd.

Vybrané grafy základních funkcí (lineární, kvadratické, mocninné, nepřímé úměrnosti, logaritmické a exponenciální) lze najít na následujících stránkách. Grafy těchto funkcí by měl znát každý student ekonomie.

Užitečnost grafu funkce spočívá v tom, že přehledně znázorňuje závislost x na y, a je možné z něj vyčíst vlastnosti funkce (například zda funkce v daném intervalu klesá nebo roste, kde nabývá maxima a minima, apod.). Průsečíky grafu funkce s grafem jiné funkce jsou body, kde jsou si obě funkce rovny, což bývá v ekonomické teorii interpretováno jako stav rovnováhy (například mezi poptávkou a nabídkou).

1.3 VLASTNOSTI FUNKCE

Mezi nejdůležitější vlastnosti funkce patří:

Definiční obor funkce $D(f)$: je množina všech *x*, pro něž má smysl funkční předpis $y = f(x)$. Smysl určování definičního oboru spočívá ve vymezení hodnot *x*, pro které je (respektive není) předpis $y = f(x)$ definován. V ekonomii platí, že většina veličin může nabývat pouze kladných hodnot, neboť například záporná poptávka, nabídka, cena nebo produkce postrádají ekonomický smysl, podobně jako například v geometrii nemá smysl záporná délka nebo objem.

Je užitečné si pamatovat, že funkce ve tvaru polynomu (např. $y = x^3 + 2x^2 - 6x + 4$) a exponenciální funkce mají definiční obor vždy rovný ***R***. Pak existují funkce, kde se definiční obor obecně nerovná ***R***, a mezi ně patří především tyto:

- racionální lomené funkce (zlomky s proměnnou *x* ve jmenovateli): jmenovatel nesmí být roven nule,
- logaritmické funkce: výraz v logaritmu musí být kladný,
- odmocninné funkce: výraz pod odmocninou musí být nezáporný,
- tangens a cotangens: výraz ve jmenovateli (tedy cosinus, resp. sinus) nesmí být roven nule.
- arcsinus a arccosinus: definičním oborem je interval $\langle -1,1 \rangle$.

Příklad 1.1. Určete definiční obor funkcí:

a) *f*: $y = \sqrt{3x - 1}$

b) *f*: $y = \dfrac{x+5}{x^2 - 1}$

c) *f*: $y = \log\left(4 - x^2\right)$

d) *f*: $y = \sqrt{x^2 - x - 2} + \dfrac{1}{x-2}$

Řešení:

a) Výraz pod odmocninou musí být nezáporný:

$3x - 1 \geq 0$,

odtud po úpravě obdržíme $x \geq \frac{1}{3}$, a tedy $D(f) = \left\langle \frac{1}{3}, \infty \right)$.

b) Jmenovatel zlomku se nesmí rovnat 0:

$x^2 - 1 \neq 0$,

Upravíme na součinový tvar podle vzorce: $x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \neq 0$,

A dostáváme: $x_1 \neq -1$ a $x_2 \neq 1$. Do definičního oboru tedy patří všechna reálná čísla kromě –1 a 1, což zapíšeme takto: $D(f) = R - \{-1,1\}$.

c) Výraz v logaritmu musí být kladný:

$4 - x^2 > 0$,

Tuto kvadratickou nerovnici upravíme na součinový tvar podle vzorce:

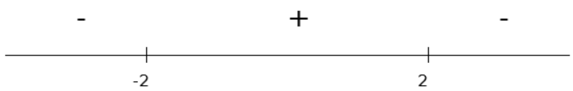
$(2 + x)(2 - x) > 0$

Tuto nerovnici vyřešíme *znaménkovou metodou*. Najdeme nulové body obou závorek:

–2 a 2, a naneseme je na číselnou osu, viz Obr. 1.1. Tím získáme tři intervaly (bez nulových bodů): $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$ a $(-2,\infty)$.

Zvolíme libovolné číslo z prvního intervalu, například –10, dosadíme je do nerovnice $(2+x)(2-x)>0$, a zjistíme znaménko výrazu na levé straně: znaménko je kladné. Nad interval si napíšeme „–". Podobně najdeme znaménka i pro další dva intervaly: prostřední interval má znaménko „+" a pravý interval „–". Nulové body –2 a 2 do definičního oboru nepatří, neboť v nerovnici $(2+x)(2-x)>0$ není rovnost. Definiční obor zadané funkce tvoří ty intervaly, nad kterými je znaménko plus, tedy prostřední interval.

Definiční obor $D(f)=(-2,2)$.



Obr. 1.1.

d) $y=\sqrt{x^2-x-2}+\dfrac{1}{x-2}$

Daná funkce obsahuje dvě dílčí funkce: odmocninu a zlomek. Nejprve se budeme zabývat odmocninou. Výraz pod odmocninou musí být nezáporný:

$x^2-x-2\geq 0$

Tuto kvadratickou rovnici upravíme na součinový tvar:

$(x-2)(x+1)\geq 0$

Závorky výše buď uhádneme, nebo je vytvoříme tak, že píšeme: (*x* – první kořen)(*x* – druhý kořen).

Dále postupujeme znaménkovou metodou stejně jako v předchozím příkladě: nulové body jsou –1 a 2, které nám opět rozdělí číselnou osu na tři intervaly se znaménky postupně „+", „–" a „+". Krajní body tentokrát do definičního oboru patří.

Z druhé části zadané funkce, zlomku $\dfrac{1}{x-2}$, dostáváme $x\neq 2$, proto výsledný definiční obor je: $D(f)=(-\infty,-1\rangle\cup(2,\infty)$. ■

Obor hodnot $H(f)$: je množina všech *y*, které získáme z funkčního předpisu $y=f(x)$ pro všechna *x* z definičního oboru. Je-li funkce $y=f(x)$ omezená (viz níže), je rovněž obor hodnot omezený.

Monotónnost: funkce je na intervalu $I\subseteq R$ monotónní, pokud je na tomto intervalu rostoucí, klesající, nerostoucí nebo neklesající.

Funkce je na intervalu *I*:

- rostoucí, pokud pro všechna $x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$, platí: $f(x_1)<f(x_2)$,
- klesající, pokud pro všechna $x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$, platí: $f(x_1)>f(x_2)$,
- nerostoucí, pokud pro všechna $x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$, platí: $f(x_1)\geq f(x_2)$,
- neklesající, pokud pro všechna $x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$, platí: $f(x_1)\leq f(x_2)$.

Příklad 1.2. Určete obor hodnot a monotónnost funkce $y = x^2$.

Řešení:

Daná funkce má obor hodnot $H(f) = \langle 0,\infty)$, je rostoucí na intervalu $(0,\infty)$ a klesající na intervalu $(-\infty,0)$. ■

Poznámka: monotónnost určujeme vzhledem k proměnné *x*, ne *y*!

Extrémy funkce: extrémy funkce je souhrnné označení pro maxima a minima funkce. Rozlišujeme extrémy *globální* (největší, resp. nejmenší hodnota funkce na celém definičním oboru) a *lokální* (největší, resp. nejmenší hodnota funkce jen na části definičním oboru).

Funkce má v bodě *a globální maximum*, jestliže pro všechna *x* ($x \neq a$) z definičního oboru je $f(a) \geq f(x)$.

Funkce má v bodě *a globální minimum*, jestliže pro všechna *x* ($x \neq a$) z definičního oboru je $f(a) \leq f(x)$.

Funkce má v bodě *a lokální maximum*, jestliže pro všechna *x* ($x \neq a$) z nějakého okolí bodu *a* je $f(a) \geq f(x)$.

Funkce má v bodě *a lokální minimum*, jestliže pro všechna *x* ($x \neq a$) z nějakého okolí bodu *a* je $f(a) \leq f(x)$.

Okolím bodu *a* nazýváme otevřený interval $(a-\delta, a+\delta)$. Platí-li v předešlých vztazích ostrá nerovnost (“>” nebo “<”), je extrém ostrý, v opačném případě neostrý.

K určení extrému se využívají první a druhé derivace funkce (viz Kapitola 2). Zjišťování extrémů funkce má značný ekonomický význam, neboť je žádoucí snažit se například minimalizovat náklady či maximalizovat příjmy (zisk). Na závěr poznamenejme, že funkce nemusí mít žádný extrém. Například funkce $y = 2x + 1$ nemá maximum ani minimum, neboť maximum i minimum „mizí“ v nekonečnu.

Omezenost funkce: funkce je *omezená shora*, jestliže existuje takové reálné číslo *h*, že $f(x) \leq h$ pro všechna *x* z definičního oboru funkce. Podobně, funkce je *omezená zdola*, jestliže existuje takové reálné číslo *d*, že $f(x) \geq d$ pro všechna *x* z definičního oboru funkce. Pokud je funkce omezená shora i zdola, říkáme krátce, že je *omezená*. Hodnotě *h* se také říká *horní závora*. Je-li funkce omezená shora, existuje těchto horních závor nekonečně mnoho, a ta nejmenší se nazývá *supremum* (značí se *sup*). Supremum je zobecněním pojmu maximum, neboť některé množiny nemusí mít maximum, jako například otevřený interval $A = (0,1)$, ale supremum existuje vždy (v uvedeném případě je sup $A = 1$). Hodnotě *d* se též říká *dolní závora*. Je-li funkce omezená zdola, existuje těchto dolních závor nekonečně mnoho, a ta největší se nazývá *infimum* (značí se *inf*). Infimum je zobecněním pojmu minimum, neboť některé množiny nemusí mít minimum, jako například otevřený interval $A = (0,1)$, ale infimum existuje vždy (v uvedeném případě je inf $A = 0$).

V ekonomii jsou všechny funkce omezené, neboť produkce, příjmy, náklady, práce, kapitál či zdroje surovin nejsou nekonečné.

Funkce $y = f(x)$ se nazývá *prostá*, jestliže platí:

$$\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2).$$

Tento formální zápis říká, že pro všechny různé hodnoty *x* z definičního oboru musí být hodnoty *y* různé (žádná hodnota *y* se nesmí opakovat). Prostou funkcí je například funkce

$y = 2x + 1$ nebo $y = x^3$, příkladem funkce, která prostá není, je $y = x^2$. Význam prostých funkcí tkví v tom, že k nim existují funkce *inverzní* (opačné).

Příklad 1.3. Určete, zda je funkce $y = \log x$ omezená.

Řešení:
Tato funkce není omezená (roste ve směru osy *y* do plus i mínus nekonečna), jak se lze snadno přesvědčit na jejím grafu (viz Obr. 1.8). ■

1.4 ALGEBRAICKÉ FUNKCE

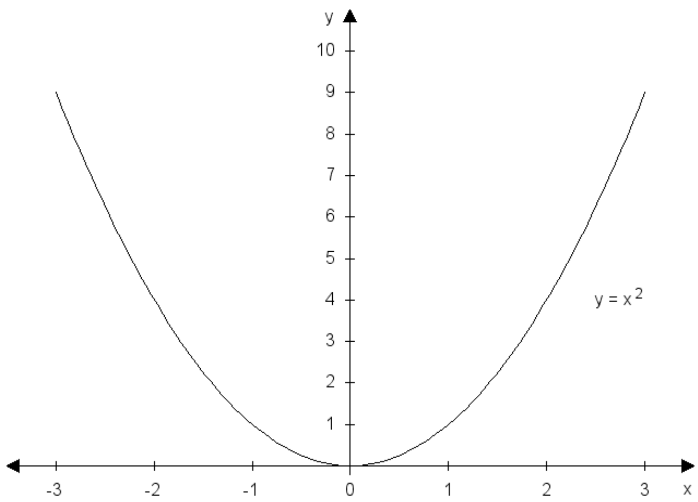
Algebraické funkce lze vyjádřit ve tvaru polynomu. *Lineární funkce* má předpis $y = ax + b$, jejím grafem je přímka (řecky *linea* je přímka). Koeficient *a* se nazývá směrnice přímky, neboť udává sklon (směr) přímky vzhledem k ose *x*. Koeficient *b* udává průsečík grafu funkce s osou *y*. Je užitečné si pamatovat, že:

- Pro $a > 0$ je funkce rostoucí.
- Pro $a < 0$ je funkce klesající.
- Pro $a = 0$ je funkce konstantní.

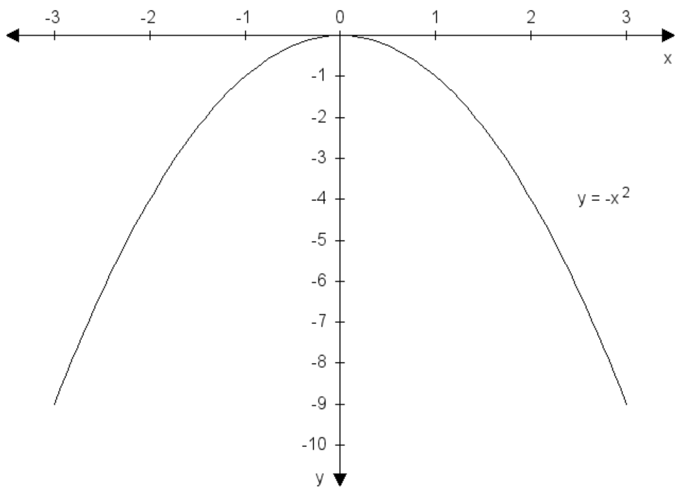
Lineární funkce mají definiční obor rovný *R* (nejsou omezené) a nemají maximum ani minimum (výjimkou je funkce konstantní, která nabývá svého maxima resp. minima v každém bodě *x*).

Kvadratická funkce má předpis $y = ax^2 + bx + c$. Grafem je parabola.

Pro $a > 0$ je graf funkce (parabola) orientovaná „nahoru“, pro $a < 0$ „dolů“, viz Obr. 1.2 a 1.3. Koeficienty *b* a *c* v předpisu funkce posouvají parabolu ve směru osy *x* nebo *y*. Vrchol paraboly lze najít buď pomocí první derivace (hledáme maximum resp. minimum funkce), nebo úpravou zvanou „doplnění na čtverec“, viz následující příklad.



Obr. 1.2. Graf funkce $y = x^2$.



Obr. 1.3. Graf funkce $y = -x^2$.

Příklad 1.4. Najděte vrchol paraboly $y = x^2 - 2x + 4$.

Řešení:
Rovnici paraboly upravíme doplněním na čtverec:

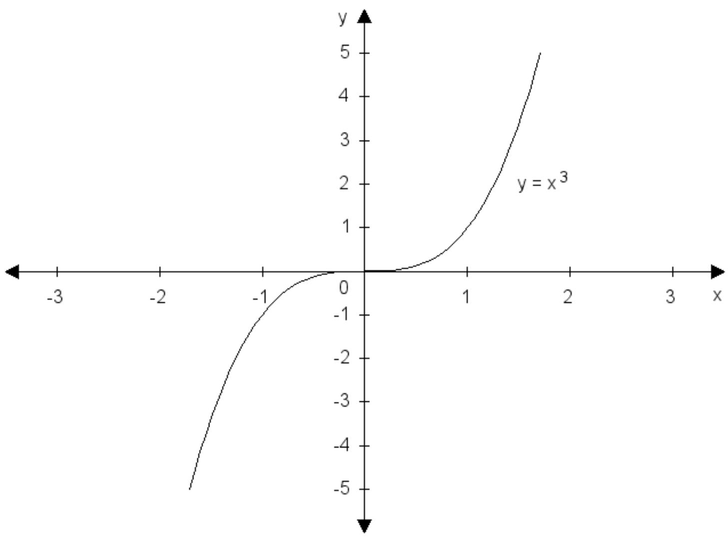
$$y = x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 - 1 + 4$$

Při této úpravě nejprve vytvoříme závorku s x a číslem, které je rovno polovině koeficientu u x na prvou, a umocníme ji na druhou: $(x - 1)^2$. V závorce nyní máme: $x^2 - 2x + 1$. Za závorkou přebytečnou 1 odečteme a opíšeme 4 ze zadání. Nakonec vše sečteme:

$$y = x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3.$$

Vrchol paraboly má souřadnice [1,3]. ■

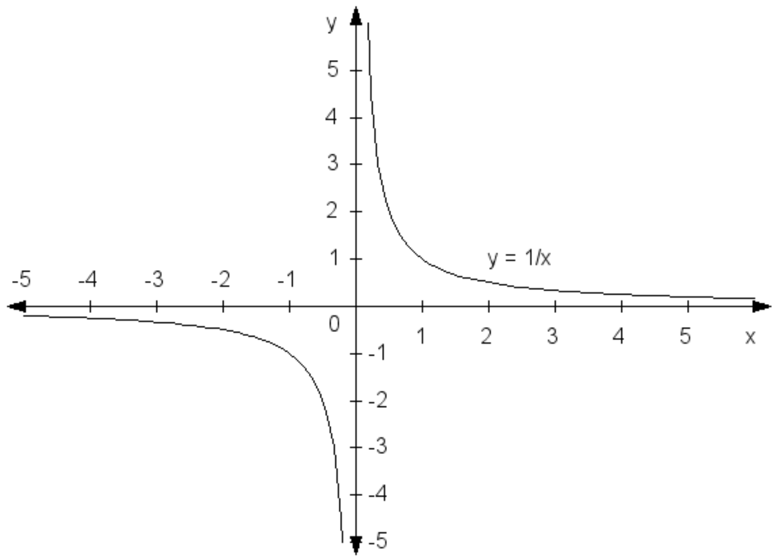
Mocninná funkce má předpis $y = x^n$, kde n je celé číslo. Na základě toho, jestli je n kladné/záporné a liché/sudé má mocninná funkce jeden ze 4 typů grafů. Na Obr. 1.4. je pro ilustraci graf kubické funkce $y = x^3$.



Obr. 1.4. Graf funkce $y = x^3$.

Racionální lomená funkce má tvar zlomku, kde v čitateli i jmenovateli je polynom (mnohočlen) $P(x)$ respektive $Q(x)$: $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Grafem racionální funkce bývají obvykle složité křivky, viz Kapitola 3.

Nejjednodušším případem racionální lomené funkce je *nepřímá úměrnost*. Je to funkce tvaru $y=\dfrac{k}{x}$, kde k je kladná konstanta. Nepřímá úměrnost popisuje vztah dvou veličin, pro které platí: kolikrát je větší jedna veličina, tolikrát je druhá veličina menší. Grafem nepřímé úměrnosti je *hyperbola*, viz Obr 1.5.



Obr. 1.5. Graf funkce $y = 1/x$.

Lineární lomené funkce je případem racionální lomené funkce, kde oba polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ jsou lineární: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ pro $cx+d\neq 0$ a $ax+b\neq k(cx+d)$. Grafem lineární lomené funkce je rovněž hyperbola.

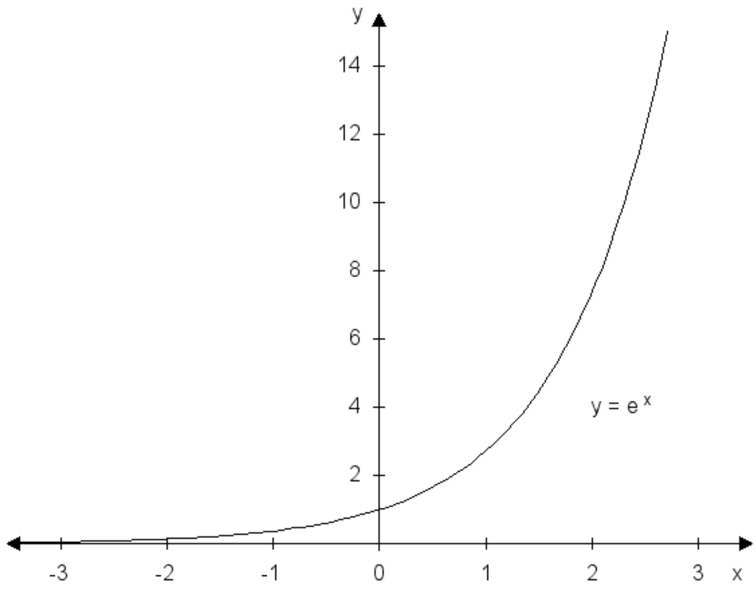
1.5 TRANSCENDENTNÍ FUNKCE

Funkce, které nejsou algebraické, se označují jako *transcendentní*. Mezi transcendentní funkce patří především funkce exponenciální, logaritmické a goniometrické.

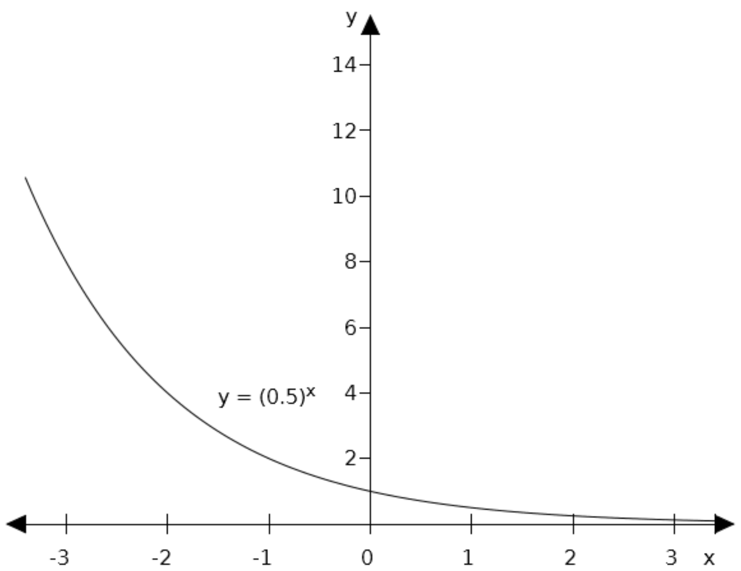
Exponenciální funkce má předpis $y=a^x, a>0, a\neq 1$. Číslo a je základ mocniny a musí být kladné a různé od 1, x je exponent. Vlastnosti exponenciální funkce závisí na základu a:

- Je-li $a>1$, funkce je rostoucí, viz Obr. 1.6.
- Je-li $a<1$, funkce je klesající, viz Obr. 1.7.

Graf (základní) exponenciální funkce vždy prochází bodem 1 na ose y, obor hodnot $H(f)=R^+$ a funkce je omezená zdola osou x. Nejčastěji používanou exponenciální funkcí je $y=e^x$, kde konstanta $e = 2{,}718...$ se nazývá Eulerova konstanta, a jedná se o iracionální číslo, podobně jako π.



Obr. 1.6. Graf funkce y = e^x.

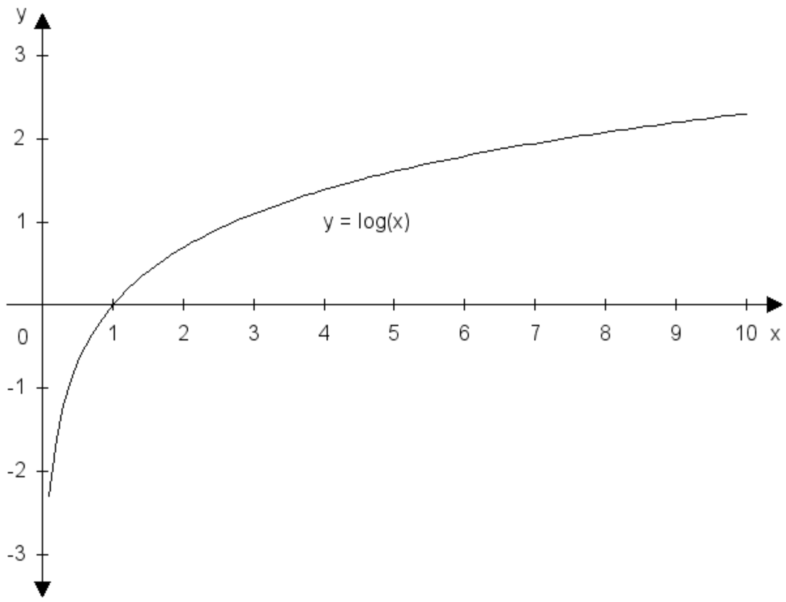


Obr. 1.7. Graf funkce y = (0,5)^x.

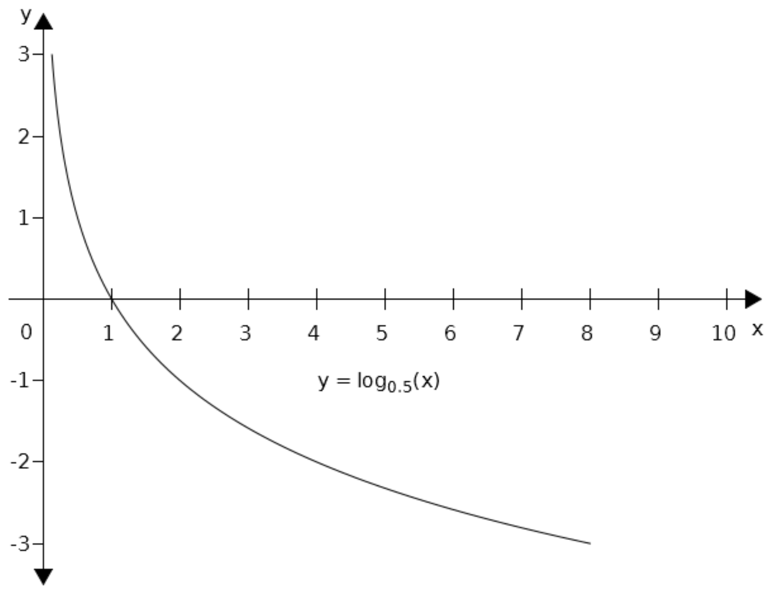
Logaritmická funkce má předpis $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$. Číslo a se nazývá *základ logaritmu* a musí být kladné a různé od 1. Pro a = 10 se logaritmus nazývá *dekadický* (značka log$x$, pro $a = e = 2{,}718...$ *přirozený logaritmus* (značka ln$x$). Logaritmická funkce je inverzní funkcí k funkci exponenciální, což znamená, že definiční obor logaritmické funkce je roven oboru příslušné inverzní exponenciální funkce a naopak.

- Je-li $a > 1$, funkce je rostoucí, viz Obr. 1.8.
- Je-li $a < 1$, funkce je klesající, viz Obr. 1.9.

Graf (základní) logaritmické funkce vždy prochází bodem 1 na ose *x*, definiční obor je $H(f) = R^+$ a funkce není omezená.



Obr. 1.8. Graf funkce *y* = log*x*.



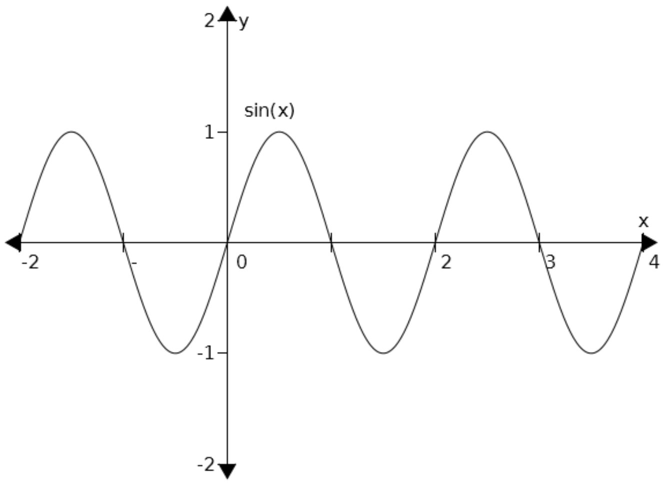
Obr. 1.9. Graf funkce $y = \log_{0,5} x$.

O dalších transcendentních funkcích se již zmíníme jen velmi krátce, neboť nemají v ekonomii takový význam jako v přírodních a technických vědách. Čtenáři jsou jistě známy *goniometrické funkce* definované v jednotkové kružnici: sinus, kosinus, tangens a kotangens.

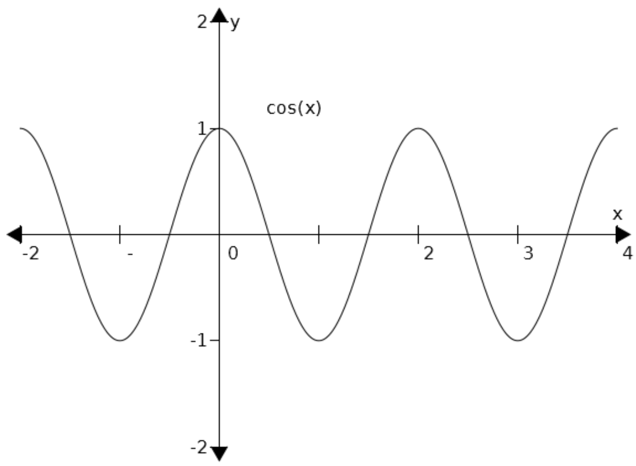
Definičním oborem funkcí *y* = sin*x* a *y* = cos*x* je *R*, oborem hodnot interval $\langle -1,1 \rangle$. Definičním oborem funkcí *y* = tg*x* respektive *y* = cotg*x* je $R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ resp. $R - \{ k\pi \}$. Oborem hodnot je *R*. Grafy těchto funkcí jsou na Obrázcích 1.10 až 1.13.

Cyklometrické funkce jsou inverzní funkce k goniometrickým funkcím, mají předponu arcus(arc): arcsin$x$, arccos$x$, arctg$x$ a arcotg$x$.

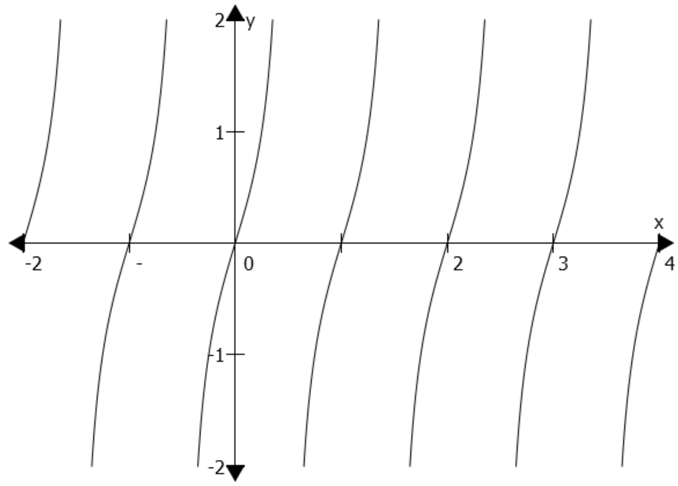
Na kalkulačkách jsou značeny jako $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ a tg^{-1}. Ani cyklometrické funkce nemají v ekonomii významnější využití. Grafy cyklometrických funkcí lze nalézt například v Bartsch (2008) nebo Rektorys (1995).



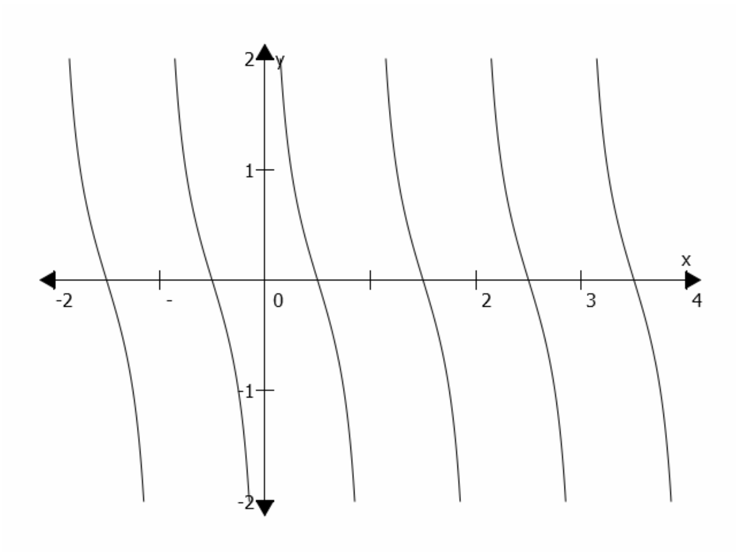
Obr. 1.10. Graf funkce y = sin$x$.



Obr. 1.11. Graf funkce y = cos$x$.



Obr. 1.12. Graf funkce y = tg$x$.



Obr. 1.13. Graf funkce y = cotg$x$.

1.6 SLOŽENÁ FUNKCE

V některých případech může být argumentem funkce jiná funkce. V tom případě hovoříme o *složené* funkci.

Definice 1.1. *Nechť jsou dány funkce $y = f(x)$ a $y = g(x)$, a nechť pro $x \in M \subseteq D(g)$ platí, že $g(x) \in D(f)$. Potom funkci $y = f(g(x))$ nazýváme složenou funkcí. Funkce $f(x)$ je vnější funkce a funkce $g(x)$ je vnitřní funkce.*

Typickým příkladem složené funkce je například $y = \log(x^2 + 1)$ nebo $y = \sqrt{2x+5}$.

Příklad 1.5. Jsou dány funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = x^2$. Určete $y = f(g(x))$ a $y = g(f(x))$.

Řešení:
Obě zadané funkce mají definiční obor R, proto můžeme přejít k předpisu složené funkce. Nejprve určíme $y = f(g(x))$. Vnější funkcí má být sinus, vnitřní funkcí druhá mocnina: $y = \sin x^2$.

Analogicky pro druhou složenou funkci obdržíme: $y = \sin^2 x$. ■

1.7 POLYNOMY

Důležitým pojmem algebry je *polynom* (česky *mnohočlen*). Polynomem řádu n nazýváme výraz $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. Je-li n = 0, je polynom roven konstantě a_0; je-li n = 1, je polynom lineární: $a_0 + a_1 x$; pro n = 2 je polynom kvadratický: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, atd.

Nulovým bodem (*kořenem*) polynomu je takové číslo x_0, pro které platí $P_n(x) = 0$. Například nulovým bodem polynomu $x^2 + 8x + 15$ je číslo –3, jak se lze snadno přesvědčit dosazením. Nulové body umožňují rozklad polynomu na *součin kořenových činitelů*, například: $x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5)$.

Rozklad polynomu na součin lze využít při zjednodušování algebraických výrazů krácením nebo při integraci metodou parciálních zlomků (viz Kapitola 6). V oboru reálných čísel nelze některé polynomy druhého stupně (kvadratické) rozložit, což poznáme tak, že nám vyjde záporný diskriminant při řešení příslušné kvadratické rovnice. V oboru komplexních čísel má však každý polynom n-tého stupně n (komplexních) kořenů (Gaussova základní věta algebry).

Příklad 1.6. Určete nulové body polynomu:
a) $x^2 - x + 5$
b) $x^4 - 4x^2$

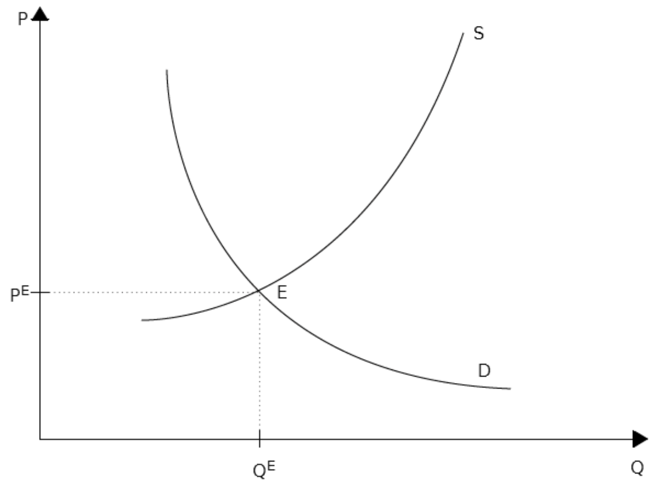
Řešení:
a) Daný kvadratický polynom nemá žádné nulové body, protože nejde rozložit na součin kvadratických činitelů (diskriminant je záporný).
b) Mnohočlen 4. řádu upravíme vytýkáním a úpravou podle vzorce:
$$x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x+2)(x-2)$$
Z posledního tvaru vidíme, že daný polynom má 4 nulové body: 0 (dvojnásobný nulový bod), –2 a 2. ■

1.8 FUNKCE NABÍDKY, POPTÁVKY A ROVNOVÁHA NA TRHU V PODMÍNKÁCH DOKONALÉ KONKURENCE

Funkce poptávky D (angl. *demand*) vyjadřuje vztah mezi cenou výrobku P (*price*) a poptávaným množstvím Q (*quantity*): $Q = D(P)$ resp. $P = D(Q)$. Tato funkce je vždy klesající, což znamená, že s rostoucí cenou P klesá poptávané množství Q. Funkce poptávky může být v principu libovolná klesající funkce, tedy lineární, kvadratická, mocninná, exponenciální, logaritmická, apod., ale v praxi se využívají především lineární a kvadratické funkce poptávky.

Dále pro funkci poptávky platí, že veličiny P i Q musí být nezáporné, neboť záporné množství ani záporná cena nemají v této situaci smysl. Rovněž P ani Q nemohou růst do nekonečna, proto říkáme, že jsou omezené.

Funkce nabídky (angl. *supply*) vyjadřuje vztah mezi cenou výrobku p (*price*) a nabízeným množstvím Q (*quantity*): $Q = S(P)$ resp. $P = S(Q)$. Tato funkce je vždy rostoucí, což znamená, že s rostoucí cenou P roste nabízené množství Q. K vyjádření funkce nabídky se nejčastěji využívají lineární nebo kvadratické funkce. Typický tvar křivky poptávky a nabídky je znázorněn na Obr. 1.14. Při grafickém znázornění obou křivek je zvykem nanášet na osu x množství Q a na osu y cenu p.



Obr. 1.14. Typický tvar křivek funkce poptávky a nabídky s rovnovážným bodem *E*.

Lineární funkce poptávky je dána vztahem: $Q_D = a - bP$, kde a a b jsou konstanty, pro které platí: $a \geq 0$, $b > 0$.

Lineární funkce nabídky je dána vztahem: $Q_S = c + dP$, kde c a d jsou konstanty, pro které platí: $c \geq 0$, $d > 0$.

V ekonomice volného trhu se poptávka a nabídka vzájemně ovlivňují (neviditelná ruka trhu podle Adama Smithe), a výsledkem je *rovnováha*, při které se poptávané množství na trhu rovná množství nabízenému. Z rovnosti funkcí poptávky a nabídky lze vypočítat rovnovážné množství Q_E a rovnovážnou cenu P_E (index E je z anglického *equilibrium* – rovnováha). Pro rovnovážný bod E platí, že se v něm poptávka rovná nabídce: $D(Q) = S(Q)$ (grafy obou funkcí se protínají), platí tedy: $a - bP = c + dP$.

Odtud můžeme určit rovnovážnou cenu P_E:

$$P_E = \frac{a-c}{b+d} \tag{1.1}$$

A z rovnovážné ceny lze stanovit rovnovážné množství Q_E:

$$Q_E = a - bP_E = a - b\frac{a-c}{b+d} = \frac{ab+ad-ab+bc}{b+d} = \frac{ad+bc}{b+d}\ .$$

$$Q_E = \frac{ad+bc}{b+d} \tag{1.2}$$

Výrazy (1.1) a (1.2) jsou dobře definovány, neboť jejich jmenovatele se nemohou rovnat nule, jelikož $b > 0$ a zároveň $d > 0$.

Příklad 1.7 (Zimka, 1999). Zahrádkář chce na trhu prodat celou svou úrodu jahod, tedy 300 kg. Pokud by zahrádkář nabízel 1 kg jahod za 30 Kč, prodal by všechny jahody.

Za každé další zvýšení ceny 1 kg o 1 Kč prodá o 6 kg jahod méně. Najděte lineární funkci poptávky, která je modelem popsané situace.

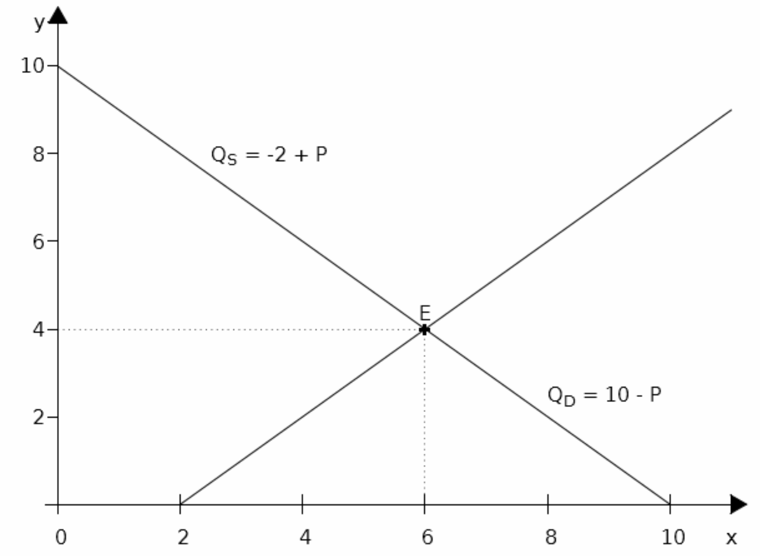
Řešení:
Poptávka je lineární funkcí, je tedy $Q = a - bP$. Neznámé koeficienty a a b vypočteme ze dvou rovnic, které získáme z údajů o množství a ceně ze zadání:
Víme, že při ceně P = 30 Kč/kg se prodá množství Q = 300 kg jahod: $300 = a - 30b$
Dále víme, že pro P = 31 Kč/kg je Q = 294 kg jahod: $294 = a - 31b$.
Tuto soustavu rovnic vyřešíme: $a = 480, b = 6$.
Dostáváme tedy rovnici poptávky: $Q = 480 - 6P$, resp. $P = 80 - \frac{Q}{6}$. ■

Příklad 1.8 (Chen, 2007). Předpokládejme, že $Q_D = 10 - P$ a $Q_S = -2 + P$. Najděte rovnováhu mezi poptávkou a nabídkou.

Řešení:
Rovnováha mezi poptávkou a nabídkou nastane, když $Q_D = Q_S$:

$$10 - P = -2 + P ,$$

Odtud dostaneme $P_E = 6$ a $Q_E = 4$ (k řešení můžeme použít i vztahy (1.1) a (1.2), které jsou však v tomto případě zbytečně komplikované).
Celkový příjem $TR = P_E \cdot Q_E = 6 \cdot 4 = 24$ jednotek. Grafické řešení je znázorněno na Obr. 1.15.
Nyní nechť je vládou stanovena nejnižší cena 8 jednotek za jednotku množství. Pak ovšem $Q_D = 10 - P = 2$ a $Q_S = -2 + P = 6$, nenastává tedy rovnováha, a celkový příjem $TR = P \cdot Q_D = 8 \cdot 2 = 16$. Celkový příjem se tedy vládním zásahem snížil. Je možné ukázat, že vládní zásahy do tržní rovnováhy vždy vedou ke snížení příjmu. ■



Obr. 1.15. Rovnováha mezi poptávkou a nabídkou.

Příklad 1.9. Nechť funkce poptávky je dána jako $D(P) = 24 - 2P$ a funkce nabídky $S(P) = 4P + 6$. Najděte rovnovážnou cenu a množství.

Řešení:

$$D(P) = S(P)$$
$$24 - 2P = 4P + 6$$
$$P = 3$$

A tedy $P_E = 3$, $Q = D(P) = S(P) = 18$. ■

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1. Načrtněte dané funkce. Z náčrtku určete jejich definiční obor a obor hodnot.

a) $y = x^2 - 3$,

[$D(f) = R, H(f) = \langle -3, \infty)$]

b) $y = \dfrac{4}{x}$,

[$D(f) = H(f) = R - \{0\}$]

c) $y = x^2 + 2x + 4$,

[$D(f) = R, H(f) = \langle 3, \infty)$]

d) $y = x^3 + 2$,

[$D(f) = H(f) = R$]

e) $y = e^{x-3}$,

[$D(f) = R, H(f) = (0, \infty)$]

f) $y = -e^x$,

[$D(f) = R, H(f) = (-\infty, 0)$]

g) $y = \ln(x-3)$

[$D(f) = (3, \infty), H(f) = R$]

2.) Určete vrchol paraboly $y = x^2 + 4x - 1$.

[V = [–2,5].]

3. Jsou dány funkce $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ a $g(x) = \sqrt{x}$. Určete složené funkce $g[f(x)]$ a $f[g(x)]$ a jejich definiční obory.

[$f(g(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$, $D(f) = R - \{1\}, g(f(x)) = \sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$ $H(f) = (1, \infty)$]

4. Najděte nulové body polynomů, upravte polynomy na součin:

a) $x^2 - 3x - 4$

[nulové body: –1 a 4, $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$]

b) $x^3 + 3x^2 - 10x$

[nulové body: –5, 0 a 2, $x^3 + 3x^2 - 10x = x(x+5)(x-2)$]

5. Určete definiční obor funkcí:

a) $y = \dfrac{4}{x-2} + \sqrt{2x-3}$

[$D(f) = \left\langle \dfrac{3}{2}, 2\right) \cup (2, \infty)$]

b) $y = \log(1-x)$

[$D(f) = (-\infty, 1)$]

c) $y = \sqrt{16 - x^2}$

[$D(f) = \langle -4, 4\rangle$]

d) $y = \ln \dfrac{x+3}{x-3}$

[$D(f) = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$]

e) $y = \sqrt{x^2 - 4x}$

[$D(f) = (-\infty, 0\rangle \cup \langle 4, \infty)$]

f) $y = \dfrac{4}{\sqrt{-x^2 - 5x - 6}}$

[$D(f) = (-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$]

g) $y = \sqrt{e^x - 1}$

[$D(f) = \langle 0, \infty)$]

h) $y = \arccos \dfrac{5}{x+1}$

[$D(f) = (-1, 4\rangle$]

6. Najděte rovnovážnou cenu a množství, je-li funkce poptávky: $D(P) = 83 - 3P$ a funkce nabídky: $S(P) = 2P + 3$. Úlohu řešte početně i graficky.
[P_E = 16, Q_E = $S(P)$ = $D(P)$ = 35]

2 ÚVOD DO DIFERENCIÁLNÍHO POČTU FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

2.1 DERIVACE FUNKCE

Mějme funkci $y = f(x)$. *Změnu (přírůstek) hodnot* funkce $y = f(x)$ značíme Δy, změnu argumentu x pak Δx. Podíl $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ udává *průměrnou změnu y* připadající na jednotkovou změnu x na intervalu Δx.

Pokud je y například cena akcie firmy ABC a x čas, a během časového období $\Delta x = 3$ měsíce je změna ceny akcie $\Delta y = +120$ Kč, potom podíl $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{120}{3} = 40$ Kč/měsíc vyjadřuje, že průměrně se cena akcie za dané období zvýšila o 40 Kč za 1 měsíc.

Pokud se bude Δx zmenšovat k nule ($\Delta x \to 0$), získáme změnu veličiny y v daném bodě (tedy její okamžitou změnu). Výraz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y'$$

nazýváme *derivací funkce* $y = f(x)$.

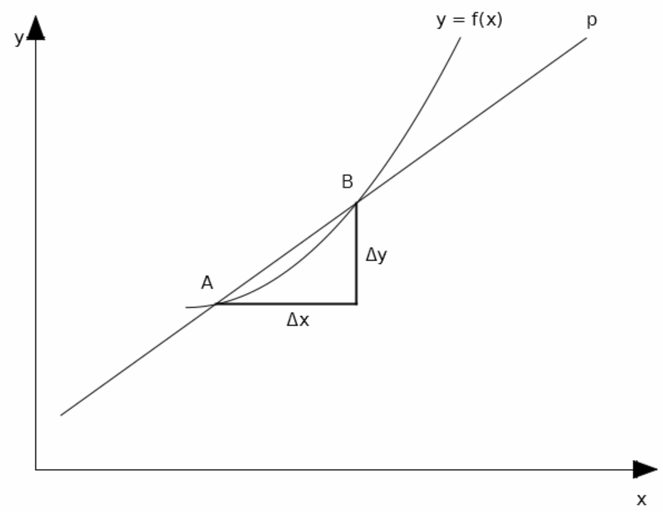
Geometrický význam derivace je patrný z Obrázku 1.1. Přímka $p = AB$ je sečna. Bude-li se však x_2 blížit k x_1 (bod B k bodu A), tj. Δx se bude blížit nule, přejde zmíněná sečna v tečnu. Derivace v daném bodě má tedy názorný geometrický význam: je rovna směrnici tečny v tomto bodě.

Definice 2.1 *(derivace funkce): Nechť funkce y = f(x) je spojitá na intervalu* $J \subseteq R$ *a* $x_0 \in J$. *Dále nechť existuje podíl* $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, *kde h značí (malý) přírůstek argumentu x. Pak derivací funkce* $y = f(x)$ *v bodě* x_0 *nazýváme následující limitu:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

(Index 0 u x_0 *se na pravé straně obvykle vynechává).*

Derivaci funkce je zvykem značit čárkou: y', $f'(x)$, nebo psát jako podíl diferenciálů: $\frac{dy}{dx}$ (čteme *dy* podle *dx*), $\frac{df}{dx}$ (čteme *df* podle *dx*). Pokud derivujeme podle času, označuje se derivace tečkou místo čárky.



Obr. 1.1. Geometrický význam derivace funkce.

Poznámka: Derivací funkce je obecně opět nějaká funkce. Derivaci v konkrétním bodě *x* (např. *x* = 2) určíme tak, že za toto *x* do derivace dosadíme.

Příklad 2.1. Určete derivaci funkce $y = x^3 + 2x$ v bodě *x* = 2.

Řešení:

Derivací funkce $y = x^3 + 2x$ je funkce $y' = 3x^2 + 2$. Dosazením *x* = 2 dostaneme: $y'(2) = 14$. Výsledek je možné interpretovat tak, že v bodě *x* = 2 je poměr změny *y* ku změně *x* roven 14, nebo ještě jinak: pro $\Delta x = 1$ v bodě *x* = 2 bude $\Delta y = 14$. ■

Poznámka: Poslední tvrzení předešlého příkladu však platí pouze přibližně, neboť derivace vyjadřuje (přesně) změnu funkce v daném bodě, ale jen přibližně změnu funkce v blízkosti daného bodu (na nějakém intervalu). Čím jsme od daného bodu dále (čím delší interval použijeme), tím je nepřesnost větší. Tečna v bodě x_0 se s rostoucí vzdáleností od x_0 více a více odchyluje od grafu dané funkce.

Příklad 2.2. Určete rovnici tečny ke křivce $y = x^2$ v bodě [2,4].

Řešení:

Rovnice tečny má tvar $y = kx + q$, kde *k* a *q* jsou hledaná neznámá reálná čísla. Víme, že derivace v daném bodě (nyní máme bod *x* = 2) je rovna směrnici tečny v tomto bodě, a tedy $k = y'(2)$. Funkce $y = x^2$ má derivaci $y' = 2x$. Derivace v bodě *x* = 2: $y'(2) = 2x = 2 \cdot 2 = 4$. Směrnice tečny v bodě [2,4] je tedy rovněž 4: *k* = 4.

Rovnice tečny má nyní tvar: $y = 4x + q$.

Zbývá určit *q*. Protože je dán tečný bod [2,4], který leží na dané křivce i na hledané tečně, musí jeho souřadnice splňovat rovnici tečny $y = 4x + q$. Dosazením *x* = 2 a *y* = 4 vyjde *q* = –4.

Tečna má rovnici: $y = 4x - 4$. ■

Příklad 2.3. Užitím definice derivace odvoďte derivaci funkce $y = x^2$.

Řešení:

$$\left(x^2\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\left(x+h\right)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{+2hx+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x\ . \blacksquare$$

Protože je výpočet derivací pomocí definice derivace často zdlouhavý, používáme pro derivování základních funkcí již odvozené vzorce, které najdete v Tabulce 2.1.

Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají derivaci na intervalu $J \subseteq R$. K výpočtu derivací součtu, rozdílu, součinu a podílu těchto funkcí používáme následující pravidla:

i) $\left[c\cdot f(x)\right]' = c\cdot f'(x)$

ii) $\left[f(x)\pm g(x)\right]' = f'(x)\pm g'(x)$

iii) $\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

iv) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$, $g(x)\neq 0$

v) $\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Pravidlo i) říká, že koeficient c před funkcí se při derivování pouze opíše, pravidlo ii) říká, že můžeme derivovat „člen po členu“, pravidlo iii), že součin dvou funkcí provedeme tak, že první funkci derivujeme a druhou opíšeme, napíšeme plus, a postupujeme obráceně. Pravidlo iv) okamžitě plyne z pravidla iii), když si uvědomíme, že dělit výrazem $g(x)$ je totéž jako násobit výrazem $\dfrac{1}{g(x)}$.

Pravidlo v) se týká derivace složené funkce. Složenou funkcí je například funkce $y = \ln\left(x^2+1\right)$. Tato funkce obsahuje vnitřní funkci (závorku) a vnější funkci (logaritmus). Pravidlo v) říká, že v takovém případě derivujeme nejprve vnější funkci (jako logaritmus), a pak ji násobíme derivací vnitřní (kvadratické) funkce.

Body i) až v) je samozřejmě možné zobecnit pro tři a více funkcí. Ilustrace výše uvedených pravidel je obsahem následujícího příkladu.

Příklad 2.4. Derivujte následující funkce:

a) $y = 4x - 1$

b) $y = x^2 + 5x$

c) $y = 6x^3$

d) $y = 4x^5 + \sin x + 2x$

e) $y = x^2\cdot e^x$

f) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

g) $y = \ln\left(x^2+1\right)$

Řešení:
Využijeme pravidla i) až v) výše a Tabulku 2.1 základních derivací.
a) Derivujeme nejprve člen 4*x* (derivace je 4) a pak konstantu –1 (derivace konstanty je nula). Proto dostáváme: $y' = 4$.

b) Derivujeme nejprve člen x^2: exponent napíšeme dopředu, a pak exponent o jedničku zmenšíme, a dostaneme 2*x*. Pak derivujeme člen 5*x* na 5. Obdržíme tak: $y' = 2x + 5$.

c) $y' = 18x^2$.

d) $y' = 20x^4 + \cos x + 2$.

e) Derivujeme jako součin funkcí podle pravidla iii): $y' = 2xe^x + x^2e^x = \left(x^2 + 2x\right)e^x$.

f) Derivujeme jako podíl funkcí podle pravidla iv): $y' = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

g) Derivujeme jako složenou funkci podle pravidla v), nejprve vnější funkci (logaritmus), potom vnitřní funkci (kvadratickou): $y' = \dfrac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$. ■

Tabulka 2.1. Přehled derivací elementárních funkcí.

$f(x)$	$f'(x)$
konstanta	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{cotg}\, x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccotg}\, x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

2.2 DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

Derivací funkce získáme další funkci, kterou opět můžeme derivovat. Takto můžeme vypočítat první, druhou, třetí a další derivace. Derivace vyšších řádů se značí počtem čárek: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ atd. Význam mají především první a druhá derivace, užití vyšších derivací je v ekonomii spíše výjimečné.

Jestliže první derivace vyjadřuje změnu dané veličiny (např. vyjadřuje růst inflace), pak druhá derivace udává, jak se mění tato změna (růst inflace se může zvyšovat nebo snižovat).

Příklad 2.5. Vypočtěte první, druhou a třetí derivaci funkce $y = x^3 + 4x^2 - 1$.

Řešení:
Derivujeme člen po členu podle pravidla o derivaci mocniny:

$y' = 3x^2 + 8x$,

$y'' = 6x + 8$,

$y''' = 6$. ■

Historická poznámka: Americký prezident R. Nixon použil v roce 1972 v jednom televizním přenosu v rámci prezidentské kampaně následující argument: „Tempo růstu inflace zpomaluje."

Jistý komentátor to okomentoval: „Je to poprvé v historii, co americký prezident použil pro své znovuzvolení argument obsahující třetí derivaci."

Je tomu opravdu tak: Pokud inflaci považujeme za danou veličinu (y), pak její růst je první derivace, tempo tohoto růstu druhá derivace a zpomalování tohoto tempa pak představuje třetí derivaci.

Podobně můžeme z televizní obrazovky slýchat, že „růst nezaměstnanosti zpomaluje" nebo „pokles stavební výroby zrychluje", což jsou vlastně druhé derivace.

2.3 DIFERENCIÁL FUNKCE

Diferenciálem funkce $y = f(x)$ nazýváme funkci $df(x) = f'(x)\,dx$. Diferenciál funkce závisí na x a dx, a vyjadřuje přibližně přírůstek funkce df při změně argumentu x o dx v bodě x. (Toto přibližné vyjádření je tím přesnější, čím menší je dx).

Příklad 2.6. Určete přírůstek funkce $y = x^3$ v bodě x = 3 pro přírůstek argumentu dx = 0,2 pomocí diferenciálu funkce.

Řešení:
Nejprve vypočteme derivaci zadané funkce: $y' = 3x^2$, odtud derivace v bodě x = 3: $y' = 3 \cdot 3^2 = 27$. Je tedy $df = f'(x)dx = 27 \cdot 0{,}2 = 5{,}4$. Přírůstek funkce v bodě x = 3 pro změnu argumentu x o dx = 0,2 činí 5,4 jednotek.
Podívejme se ještě, jaká je *přesná* změna funkce mezi body x = 3 a x = 3,2: $\Delta f = f(3{,}2) - f(3) = 3{,}2^3 - 3^3 = 5{,}768$. Tento výsledek není příliš odlišný od dříve vypočteného přírůstku 5,4 jednotek. ■

2.4 LOGARITMICKÁ DERIVACE

Některé funkce není možné derivovat pomocí pravidel uvedených v Tabulce 2.1. Typickým příkladem jsou funkce ve tvaru $y = f(x)^{g(x)}$, tedy funkce, v nichž se proměnná

x nachází jak v základu mocniny, tak v exponentu. Nemůžeme použít pravidla pro derivaci mocniny ani exponenciální funkce (daná funkce není ani jedno, ani druhé).

Můžeme však využít následující dva speciální postupy:

i) Použijeme úpravu $y = f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ a derivujeme jako exponenciální funkci.

ii) Funkci y nejprve logaritmujeme: $y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = \ln f(x)^{g(x)}$
$\Rightarrow \ln y = g(x)\ln f(x)$,

a pak derivujeme: $\dfrac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + g(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Příklad 2.7. Derivujte: $y = x^x$.

Řešení si ukážeme oběma způsoby.

První způsob: nejprve upravme zadanou funkci na exponenciální: $y = x^x = e^{x\cdot\ln x}$, a pak derivujeme jako složenou funkci: $y' = e^{x\cdot\ln x}\cdot\left(1\cdot\ln x + x\cdot\dfrac{1}{x}\right) = x^x\cdot(\ln x + 1)$.

Druhý způsob: danou funkci logaritmujeme a upravíme:

$\ln y = \ln x^x \rightarrow \ln y = x\cdot\ln x$. Nyní derivujeme obě strany: $\dfrac{y'}{y} = 1\cdot\ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$,

a rovnici vynásobíme y: $y' = y\cdot(\ln x + 1) = x^x\cdot(\ln x + 1)$.

Výsledek je samozřejmě stejný. ■

2.5 DERIVACE IMPLICITNÍ FUNKCE

U některých funkcí se může stát, že y nejde vyjádřit jako funkci x. Například u funkce $f(x,y) = xy^2 + \log(x - y)$ není možné vyjádřit (osamostatnit vlevo) y. V takovém případě hovoříme o *implicitní funkci* (pokud lze vyjádřit y jako funkci x, pak hovoříme o *explicitních funkcích*). Implicitní funkce derivujeme podle Věty 2.1.

Věta 2.1*. Nechť $f(x,y) = 0$ je implicitní funkce, která má v bodě C konečné parciální derivace* $\dfrac{\partial f(C)}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial f(C)}{\partial y}$, a nechť $\dfrac{\partial f(C)}{\partial y} \neq 0$. *Derivace implicitní funkce v bodě C je pak definována takto:*

$$y'(C) = \frac{-\dfrac{\partial f(C)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(C)}{\partial y}} \tag{2.1}$$

Symboly $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ve vztahu (2.1) označují *parciální derivace*, kterými se budeme podrobněji věnovat v Kapitole 4. Nyní jen zmíníme, že parciální derivace není nic jiného než obyčejná derivace aplikovaná na vybranou proměnnou.

Příklad 2.8. Derivujte funkci $f(x,y) = \sin y + 2xy$.

Řešení:

Nejdříve musíme ověřit splnění podmínek Věty 2.1. Poté derivujeme podle *x* a *y*:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos y + 2x\,,$$

Derivování podle *x* (respektive *y*) provádíme tak, že *x* (*y*) považujeme za proměnnou, zatímco *y* (*x*) za konstantu. Ze vztahu (2.1) nakonec obdržíme výslednou derivaci:

$$y' = \frac{-2y}{\cos y + 2x}, \text{ pro } \cos y + 2x \neq 0$$ ■

2.6 Taylorova a Maclaurinova řada

Složité funkce, které mají derivace až do *n*-tého řádu, můžeme přibližně nahradit (aproximovat) *Taylorovou řadou* (Taylorovým polynomem) stupně *n* v okolí zvoleného bodu *a*. Vyjádření funkce pomocí polynomu (mnohočlenu) je jednodušší a usnadňuje výpočty. V ekonomii se tento postup často používá například ke zjednodušení nelineárních funkcí na funkce lineární.

Taylorův polynom funkce $f(x)$ v bodě *a* je definován takto:

$$T_n(f,a,x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \;\ldots\; + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \qquad (2.2)$$

kde $R_n(x)$ se nazývá *zbytek řady*.

Pokud zvolíme *a* = 0, dostaneme *Maclaurinovu řadu*:

$$T_n(f,0,x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \;\ldots\; + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x) \qquad (2.3)$$

Ne každou funkci lze vyjádřit pomocí jejího Taylorova rozvoje. Funkce musí splňovat dvě podmínky:

1.) Musí mít derivace všech řádů až do řádu *n* v okolí bodu *a*.

2.) Zbytek $R_{n+1}(x)$ musí konvergovat k nule pro *n* jdoucí do nekonečna.

Například funkci $y = \sqrt{x}$ není možné vyjádřit Maclaurinovou řadou v bodě *a* = 0, neboť tato funkce není definována na levém okolí bodu 0 (nesplňuje podmínku 1).

Maclaurinův rozvoj vybraných funkcí je uveden v Tabulce 2.2 i s příslušným oborem konvergence odpovídající funkční řady.

Tabulka 2.2. Mocninné rozvoje vybraných funkcí.

Funkce	Maclaurinův rozvoj	Obor konvergence
$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...$	$(-\infty,\infty)$
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...$	$(-\infty,\infty)$
e^x	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$	$(-\infty,\infty)$
$\ln(x+1)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...$	$(-1,1\rangle$

V následující úloze si ukážeme, jak určit Maclaurinův rozvoj funkce.

Příklad 2.9. Určete Maclaurinův rozvoj funkce *f*: a) $y=e^x$, b) $y=\sqrt{x+1}$.

Řešení:
a) Nejdříve vypočteme hodnotu dané funkce v bodě x = 0: $f(0)=1$, a pak první a vyšší derivace, které jsou v tomoto případě všechny shodné:
$f'(x)=f''(x)=f'''(x)=...=e^x$
Do derivací dosadíme za x nulu (neboť a = 0) a získáme:
$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=...=1$.

Výsledek dosadíme do (2.3): $e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+...$

b) Vypočteme hodnotu dané funkce v bodě x = 0: $f(0)=1$, a pak první a vyšší derivace:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{(x+1)^3}}$$

$$f'''(x)=\frac{3}{8\sqrt{(x+1)^5}}\text{, atd.}$$

Do derivací dosadíme za x nulu (neboť a = 0) a získáme:
$f'(0)=\frac{1}{2}$, $f''(0)=-\frac{1}{4}$, $f'''(0)=\frac{3}{8}$.

Dosadíme do (2.3): $\sqrt{x+1}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{3x^3}{48}+...$

Nakonec si můžeme ukázat, jak je tato aproximace odmocniny mocninnou řadou přesná. Zvolme například x = 0,3. Pro tuto hodnotu je $f(0,3)=\sqrt{0,3+1}=1,140$, zatímco z řady výše dostáváme pro její první čtyři členy:

$\sqrt{x+1} \doteq 1+\frac{0,3}{2}-\frac{0,9}{8}+\frac{0,81}{48}=1{,}054$. Rozdíl tedy činí 0,085. Větší přesnosti bychom dosáhli tím, že bychom sečetli více členů řady. ■

Derivace funkce se využívá k především určení vlastností funkcí (viz Kapitola 3). Dále lze derivaci funkce využít k přibližnému určení růstu funkce – *diferenciálu funkce*.

V následujících kapitolách se zaměříme na ekonomické aplikace derivace funkce. Jak již bylo zmíněno, v ekonomii používáme derivaci k výpočtu všech veličin s přívlastkem *mezní* (*marginální*), jakou jsou například *mezní příjmy*, *mezní náklady*, z celkových veličin, viz např. Fuchs a Tuleja (2004), Mezník (2011) nebo Holman (2011). Závisí-li nějaká veličina na čase, například kapitál, pak derivací kapitálu podle času získáme jeho *tok* (či *intenzitu*). Dalším významným ekonomickým užitím derivace je problém *optimalizace*, tedy nalezení maxima (například maxima zisku), nebo minima (např. minima nákladů) jisté účelové funkce.

V dalším textu bude preferováno značení ekonomických funkcí a veličin dle publikace Mezník (2011), tedy celkový příjem bude označován jako *TR*, apod. K zopakování ekonomických pojmů lze doporučit všechny výše zmíněné publikace.

2.7 ELASTICITA FUNKCE

Mějme funkci $y=f(x)$. Nyní nás bude zajímat, jak změna proměnné *x* ovlivňuje změnu proměnné *y*. Zavedeme poměrnou (proporcionální) změnu veličiny *x*: $\frac{\Delta x}{x}$ a poměrnou (proporcionální) změnu veličiny *y*: $\frac{\Delta y}{y}$. Podíl poměrných změn:

$$\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{x}{y}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2.4}$$

se nazývá *průměrná poměrná změna y*.

Nyní provedeme ve výrazu (2.4) limitní proces $\Delta x \to 0$, a dostaneme *elasticitu funkce*:

$$E(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{y}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}y' \tag{2.5}$$

Elasticita funkce udává přibližnou procentní změnu *y* odpovídající jednotkové procentní změně *x* (Mezník, 2011). Kladná změna znamená růst, záporná pokles.

Příklad 2.10. Určete elasticitu funkce $y=x^2$ v bodě *x* = 3.

Řešení:

Nejprve vypočteme hodnotu *y*: $y=3^2=9$, a pak derivaci funkce *y* v bodě *x* = 3: $y'(3)=2\cdot 3=6$

Nyní už dosadíme do vztahu (2.5) pro elasticitu funkce: $E(3)=\frac{3}{9}\cdot 6=2$.

Výsledek interpretujeme takto: vzroste-li *x* o 1 % (z hodnoty *x* = 3), vzroste *y* o 2 %. ■

2.8 CENOVÁ ELASTICITA POPTÁVKY A NABÍDKY

Elasticitu funkce zavedenou v předchozí kapitole můžeme aplikovat ke zkoumání *cenové elasticity poptávky* nebo *nabídky*. Snížení nebo zvýšení ceny totiž vede ke změně poptávaného respektive nabízeného množství zboží.

Nechť poptávané množství jistého zboží Q závisí na jeho ceně P. *Cenovou elasticitu poptávky*, krátce *elasticita poptávky* (*price elasticity of demand*) definujeme takto:

$$E(P) = -\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP} \tag{2.6}$$

$E(P)$ udává, o kolik procent se změní poptávané množství, jestliže se cena změní o 1 %. Znaménko mínus ve vztahu (2.6) se zavádí proto, aby výsledná elasticita byla kladné číslo.

Příklad 2.11. Je dána funkce poptávky $Q(P) = 80 - 4P$. Určete elasticitu poptávky obecně a pak v bodě $P = 5$.

Řešení:

Použijeme vztah (2.6): $E(P) = -\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP} = -\frac{P}{80-4P}\cdot(-4) = \frac{4P}{80-4P}$.

Pro hodnotu $P = 5$ dostáváme: $E(5) = \frac{4\cdot 5}{80 - 4\cdot 5} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$.

Výsledek si přeložíme takto: když se při ceně $P = 5$ jednotek zvýší cena o 1 %, pak se poptávané množství sníží (množství se mění obráceně než cena) o 1/3 procenta. ■

Podle hodnoty elasticity poptávky při dané ceně P rozlišujeme poptávku:

- elastickou, je-li $E(P) > 1$,
- jednotkově elastickou, je-li $E(P) = 1$,
- neelastickou, je-li $E(P) < 1$.

V příkladě výše se jednalo o poptávku neelastickou. Obecně platí, že s rostoucí cenou elasticita poptávky roste.

Cenová elasticita nabídky, krátce *elasticita nabídky* (*price elasticity of supply*) se definuje podobně jako cenová elasticita poptávky:

$$E(P) = \frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}, \tag{2.7}$$

kde $Q = S(P)$ je funkce nabídky. Protože funkce nabídky je rostoucí a P a Q jsou kladné, neobjevuje se ve vztahu (2.7) znaménko mínus.

Nabídku dělíme na elastickou, jednotkově elastickou a neelastickou analogicky jako poptávku. Podobně platí, že s rostoucí cenou elasticita nabídky roste.

Příklad 2.12. Je dána nabídka $Q = 0{,}5P^2 + 120$. Určete elasticitu nabídky obecně a pro $P = 40$. Dále ověřte (například náčrtkem), že funkce $E(P)$ je rostoucí.

Řešení:

Elasticitu nabídky vypočteme ze vztahu (2.7):

$$E(P) = \frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP} = \frac{P}{0{,}5P^2 + 120}\cdot P = \frac{P^2}{0{,}5P^2 + 120}.$$

Pro P = 40 dostáváme: $E(40)=\dfrac{40^2}{0,5\cdot 40^2+120}=\dfrac{1600}{920}=1,74$.
Při zvýšení ceny o 1 % (při ceně P = 40) se nabídka zvýší o 1,74 %.
Náčrtkem nebo pomocí první derivace (viz Příklad 3.1) lze snadno ověřit, že funkce $E(P)=\dfrac{P^2}{0,5P^2+120}$ je rostoucí. ■

2.9 ELASTICITA PRODUKČNÍ FUNKCE

Elasticita produkční funkce $y=f(x)$ je definována jako relativní změna produkce (y) ku relativní změně množství výrobního faktoru (x), a udává, o kolik procent se zvýší produkce, jestliže se množství výrobního faktoru změní o jedno procento:

$$E(x,y)=y'\cdot\frac{x}{y}$$

Tento vztah je totožný se vztahem (2.5).

Příklad 2.13. Je dána produkční funkce $y=3x^2$, určete elasticitu v bodě [10, 300].

Řešení:
Nejprve vypočteme derivaci funkce: $y'=6x$, dosadíme za x = 10: $y'(10)=6\cdot 10=60$

Poté dosadíme do (2.5): $E(10,300)=60\cdot\dfrac{10}{300}=2$.

Jestliže se tedy x zvětší o 1 % (z 10 na 10,1 jednotek), zvětší se y o 2 % (z 300 na 306 jednotek). ■

Podrobněji se budeme produkčními funkcemi zabývat v následující kapitole a v Kapitole 4.

2.10 PRODUKČNÍ FUNKCE, MEZNÍ A PRŮMĚRNÝ PRODUKT PRÁCE

Uvažujme produkci v krátkém časovém intervalu, kdy můžeme zanedbat změny kapitálu. Pak je produkce Q závislá pouze na práci L: $Q=Q(L)$.

Grafem *produkční funkce* je *produkční křivka*.

Mezní produkt práce (*marginal product of labour*) MP_L je derivace funkce produkce podle práce:

$$MP_L=\frac{dQ}{dL}=Q'(L) \qquad (2.8)$$

Mezní produkt práce udává, jak se (přibližně) změní produkce při dané práci L, pokud se práce zvětší o 1 jednotku (jednoho pracovníka) na L + 1.

Příklad 2.14. Je dána produkce $Q=12L^2-L^3$. Určete mezní produkt práce MP_L obecně a pro L = 2 resp. L = 8.

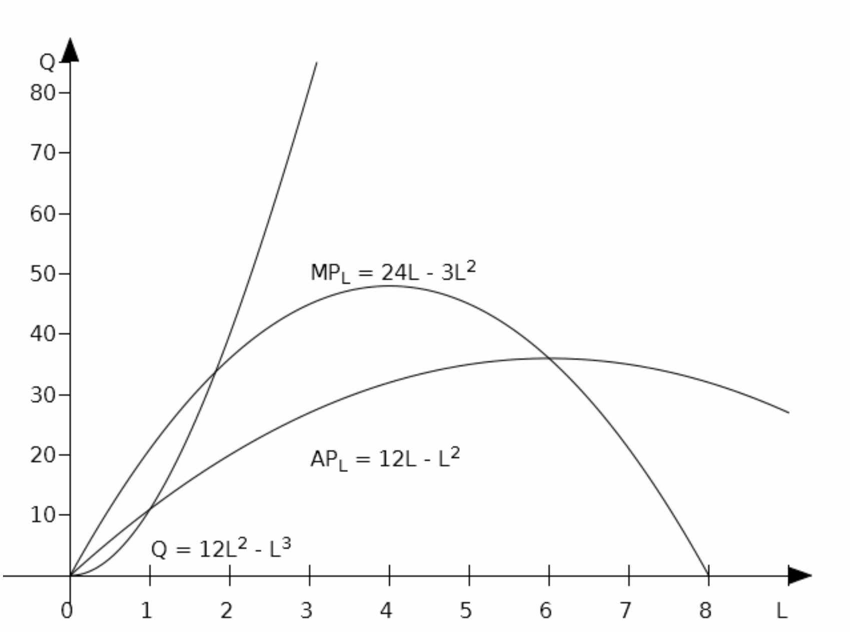
Řešení:

MP_L vypočteme ze vztahu (2.8): $MP_L=\dfrac{dQ}{dL}=24L-3L^2$.

Nyní dosadíme *L* = *2*: $MP_L(2) = 24 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 = 48 - 12 = 36$.

Nyní dosadíme *L* = *8*: $MP_L(8) = 24 \cdot 8 - 3 \cdot 8^2 = 192 - 192 = 0$.

Výsledek MP_L = 36 interpretujeme tak, že při zvýšení práce z *L* = 2 o 1 jednotku na *L* = 3 se přibližně zvýší produkce o 36 jednotek. Výsledek MP_L = 0 interpretujeme tak, že při zvýšení práce z *L* = 8 o 1 jednotku na *L* = 9 se produkce nezmění (zvýšení počtu pracovníků nevede k vyšší produkci). Funkce *Q*, MP_L a AP_L jsou znázorněny v Obrázku 2.2. ■



Obr. 2.2.

Na rozdíl od křivky elasticity, která je stále rostoucí, dochází u křivky produkce v jistém bodu k poklesu a MP_L mění znaménko z kladného na záporné. Tato skutečnost se charakterizuje jako *zákon klesajících výnosů*: *Roste-li některý ze vstupů, budou přírůstky výstupu od jistého bodu klesat*.

Průměrný produkt práce AP_L (*average product of labour*) se vypočte jako podíl produkce *Q* a práce *L*:

$$AP_L = \frac{Q}{L} \qquad (2.9)$$

Lze ukázat, že v bodě maxima AP_L platí:

$$AP_L = MP_L \qquad (2.10)$$

Vztah (2.10) se nazývá *princip maximalizace průměrného produktu práce*. V bodě maxima AP_L se tedy křivky MP_L a AP_L protínají, viz též Obrázek 2.2.

Příklad 2.15. Dokažte platnost vztahu (2.10).

Řešení:

Derivujeme (2.9) jako podíl: $AP_L' = \dfrac{Q'L - Q}{L^2}$.

Dále nechť $AP_L' = \dfrac{Q'L - Q}{L^2} = 0$, což platí, pokud je $Q'L - Q = 0$

Poslední rovnici upravíme: $Q'L = Q$
Nyní si uvědomíme, že $Q' = MP_L$ a $Q = AP_L \cdot Q$, a dosadíme:
$MP_L \cdot L = AP_L \cdot L$.
Z posledního vztahu po zkrácení nenulovým výrazem *L* plyne požadovaná rovnost. ■

2.11 CELKOVÝ, PRŮMĚRNÝ A MEZNÍ PŘÍJEM, MAXIMALIZACE PŘÍJMU

Celkový příjem TR (*total revenue*) je součinem množství *Q* a ceny za jednotku množství *P*:

$$TR = Q \cdot P \tag{2.11}$$

V podmínkách dokonalé konkurence je tržní cena *P* neměnná, v opačném případě je funkcí poptávky, $P = D(Q)$, a v tom případě je celkový příjem dán jako:

$$TR = Q \cdot D(Q) \tag{2.12}$$

Křivka celkového příjmu prochází počátkem, a pokud je funkce poptávky lineární, má tvar paraboly, kde vrchol paraboly je maximem celkového příjmu.

Příklad 2.16. Najděte maximum celkového příjmu, je-li dána poptávka $D(Q) = 60 - 3Q$.

Řešení:
Nejdříve vyjádříme celkový příjem: $TR(Q) = (60 - 3Q) \cdot Q = 60Q - 3Q^2$.
Funkci *TR* derivujeme: $\dfrac{dTR(Q)}{dQ} = 60 - 6Q$.
V bodě extrému (v našem případě maxima) je první derivace rovna nula: $60 - 6Q = 0$, odkud dostáváme $Q_{\max} = 10$. Celkový příjem tedy bude maximální ($TR_{\max} = 300$) pro množství *Q* = 10. ■

Průměrný příjem AR (*average revenue*) je podíl celkového příjmu a množství:

$$AR = \frac{TR(Q)}{Q} \tag{2.13}$$

Snadno lze ukázat, že průměrný příjem se rovná poptávce:

$$AR = \frac{TR(Q)}{Q} = \frac{D(Q) \cdot Q}{Q} = D(Q)$$

Mezní příjem MR (*marginal revenue*) je definován jako derivace celkového příjmu:

$$MR = \frac{dTR(Q)}{dQ} \tag{2.14}$$

Mezní příjem vyjadřuje (přibližně), jak se změní celkový příjem, jestliže se množství *Q* změní o jednotku.

Příklad 2.17. Celkový příjem je $TR(Q) = -2Q^2 + 80Q$. Určete mezní příjem:
a) obecně,
b) pro $Q = 10$.

Řešení:

a) $MR(Q) = \dfrac{dTR(Q)}{dQ} = -4Q + 80$

b) $MR(10) = 40$.

Výsledek úlohy b) můžeme interpretovat tak, že při zvýšení množství o 1 (z 10 na 11), se celkový příjem zvýší (přibližně) o 40 jednotek. Pro úplnost: přesné zvýšení celkového příjmu je 38 jednotek, neboť $TR(11) = 638$ a $TR(10) = 600$. ■

Příklad 2.18. Celkový příjem je $TR(Q) = -0{,}5Q^2 + 25Q$. Určete:
a) průměrný a mezní příjem obecně,
b) průměrný a mezní příjem pro $Q = 10$,
c) hodnotu Q, pro kterou je TR maximální.

Řešení:

a) $AR(Q) = \dfrac{TR(Q)}{Q} = -0{,}5Q + 25$

$MR(Q) = \dfrac{dTR(Q)}{dQ} = -Q + 25$

b) dosadíme $Q = 10$:

$AR(10) = -0{,}5 \cdot 10 + 25 = 20$

$MR(10) = -10 + 25 = 15$

c) $TR'(Q) = -Q + 25$, odkud snadno získáme maximum TR pro $Q = 25$. ■

2.12 Celkové, průměrné a mezní náklady, minimalizace nákladů

Celkové náklady TC (*total cost*) jsou všechny náklady nutné pro realizaci Q jednotek. Celkové náklady lze rozložit na *celkové variabilní náklady TVC* (*total variable cost*) a *fixní náklady FC* (*fixed cost*):

$$TC(Q) = TVC(Q) + FC$$

Fixní náklady nezávisí na množství Q, zatímco variabilní náklady ano.
Průměrné náklady AC (*average cost*) jsou podílem celkových nákladů a množství Q:

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} = \frac{FC}{Q} + \frac{TVC}{Q}$$

Průměrné náklady můžeme opět rozložit na *průměrné fixní náklady* (*AFC*) a *průměrné variabilní náklady* (*AVC*):

$$AFC = \frac{FC}{Q}, \quad AVC(Q) = \frac{TVC(Q)}{Q}$$

Mezní náklady MC (*marginal cost*) jsou derivací celkových nákladů:

$$MC = \frac{dTC}{dQ}$$

Racionální chování firem předpokládá minimalizaci nákladů. *Princip minimalizace průměrných nákladů* se formuluje takto:

V bodě minima průměrných nákladů je AC = MC.

Obdobné tvrzení platí i pro průměrné variabilní náklady:

V bodě minima průměrných variabilních nákladů je AVC = MC.

Příklad 2.19. Jsou dány celkové náklady $TC(Q) = 50 + 2Q - 5Q^2 + Q^3$. Určete *FC*, *TVC*, *AC*, *AVC*, *AFC* a *MC*.

Řešení:
Fixní náklady jsou ta část funkce $TC(Q)$, která nezávisí na *Q*, tedy 50: $FC = 50$.
Zbylé náklady závisejí na *Q*, a jsou tedy variabilní (proměnlivé):
$TVC(Q) = 2Q - 5Q^2 + Q^3$.

Průměrné celkové náklady jsou: $AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} = \frac{50}{Q} + 2 - 5Q + Q^2$.

Průměrné variabilní náklady: $AVC(Q) = 2 - 5Q + Q^2$

Průměrné fixní náklady: $AFC(Q) = \frac{50}{Q}$.

Mezní náklady: $MC(Q) = 2 - 10Q + 3Q^2$.

Můžeme si všimnout, že průměrné fixní náklady se s rostoucím množstvím *Q* zmenšují (v limitě k nule). Funkce *TC* a *TVC* bývají v ekonomii obvykle kubické a *AFC* má tvar hyperboly, křivka *MC* protíná křivky *AC* a *AVC* v jejich minimech (viz např. Obr. 2.2).
■

Příklad 2.20. Jsou dány celkové náklady $TC(Q) = 54 - 6Q + Q^3$. Minimalizujte průměrné náklady.

Řešení:

Vyjádříme průměrné náklady: $AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} = \frac{54 - 6Q + Q^3}{Q} = \frac{54}{Q} - 6 + Q^2$.

K určení minima funkci *AC* derivujeme: $AC'(Q) = -\frac{54}{Q^2} + 2Q$, a najdeme nulové body první derivace (body podezřelé z extrému): $AC'(Q) = -\frac{54}{Q^2} + 2Q = 0$, odkud je $\frac{54}{Q^2} = 2Q$ a nakonec $Q = 3$. Pro *Q* = 3 jsou průměrné náklady *AC* minimální a rovny 21.
■

Příklad 2.21. Ověřte, že pro celkové náklady z předchozího příkladu platí princip minimalizace průměrných nákladů.

Řešení:
Máme ověřit, že v bodě minima průměrných nákladů je $AC = MC$.

Vyjádříme AC a dosadíme $Q = 3$: $AC(3) = \frac{54}{3} - 6 + 3^2 = 30$.

Vypočteme mezní náklady: $MC(Q) = -6 + 3Q^2$

A dosadíme do MC za $Q = 3$: $MC(3) = -6 + 3 \cdot 3^2 = 30$.

Platí tedy, že $AC = MC$. ■

2.13 Zisk, maximalizace zisku

Zisk PR (*profit*) se vypočte jako rozdíl celkového příjmu a celkových nákladů:

$$PR(Q) = TR(Q) - TC(Q)$$

Bod, v němž se vyrovnají celkové příjmy a celkové náklady (a zisk je tedy nulový), se nazývají *body zvratu*. Geometricky lze najít body zvratu jako průsečíky křivek TR a TC, výpočtem pak jako řešení rovnice:

$$PR = TR - TC = 0$$

Racionálním chováním firem je *maximalizovat zisk*. Maximální zisk lze určit z funkce $PR(Q)$ pomocí první (druhé) derivace, nebo pomocí *principu maximalizace zisku*:

V bodě maxima zisku je $MR = MC$.

V maximu tedy platí, že mezní příjem je roven mezním nákladům.

Příklad 2.22. Jsou dány celkové náklady $TC(Q) = Q^2 + 5Q + 4$ a celkové příjmy $TR(Q) = 45Q - Q^2$. Určete:
a) maximum zisku,
b) ověřte, že v bodě maxima je MR = MC.

Řešení:
a) Vyjádříme funkci zisku:
$PR(Q) = TR(Q) - TC(Q) = 45Q - Q^2 - (Q^2 + 5Q + 4) = -2Q^2 + 40Q - 4$.
Pomocí první derivace najdeme „bod podezřelý z extrému“: $PR'(Q) = -4Q + 40 = 0$, odkud dostáváme $Q = 10$. Pomocí druhé derivace (která vyjde záporně) ověříme, že se jedná skutečně o maximum. Maximální zisk má hodnotu: $PR(10) = 196$.
b) Vypočteme mezní příjem a mezní náklady:
$MR(Q) = 45 - 2Q$
$MC(Q) = 2Q + 5$
Nyní do obou mezních veličin dosadíme $Q = 10$:
$MR(10) = 45 - 20 = 25$

$MC(Q) = 20 + 5 = 25$

Tím jsme danou rovnost ověřili. ■

Příklad 2.23. Určete maximální zisk firmy, jestliže celkové příjmy jsou popsány funkcí $TR = 200Q - 40$ a celkové náklady funkcí $TR = 100 + 0,2Q^2$.

Řešení:
Zisk firmy:
$PR(Q) = TR(Q) - TC(Q) = 200Q - 40 - (100 + 0,2Q^2) = -0,2Q^2 + 200Q - 140$
Nyní budeme hledat maximum této funkce pomocí první derivace:
$PR'(Q) = -0,4Q + 200$
V maximu (minimu) je první derivace nulová: $-0,4Q + 200 = 0$, a tedy Q = 500. Pomocí druhé derivace, která je záporná (–0,4) ověříme, že se jedná skutečně o maximum. Firma dosáhne maximálního zisku, pokud vyrobí 500 ks daného výrobku, a tento zisk je 49 860 peněžních jednotek (například korun). ■

2.14 JINÉ ÚLOHY NA MAXIMUM A MINIMUM FUNKCE

Maximum (minimum) funkce nemusíme hledat jen u ekonomických funkcí, ale také v mnoha situacích z „běžného života“. Dva takové příklady jsou řešeny níže.

Příklad 2.24. Zahrádkář má k dispozici 120 metrů pletiva a chce oplotit pozemek ve tvaru obdélníka (případně čtverce) tak, aby měl maximální rozlohu. Najděte tvar pozemku tak, aby měl maximální plochu.

Řešení:
Obvod pozemku je 120 m. Označme jednu stranu (délku) pozemku x a druhou stranu (šířku) y. Obdélník má tedy obvod $o = 120 = 2x + 2y$, a odtud získáme $y = 60 - x$. Plocha S obdélníka: $S = x \cdot y = x \cdot (60 - x) = 60x - x^2$. S je tedy funkcí x, maximum najdeme derivací S podle x: $S' = 60 - 2x$.
V maximu je první derivace nulová, a tedy $x = 30$ m. Pro y dostáváme: $y = 60 - x = 30$ m. Pozemek bude mít maximální plochu, pokud bude čtvercový se stranou 30 m, a maximální plocha bude 900 m^2.
Ještě bychom měli ověřit, že nalezený extrém je skutečně maximum. Vypočteme druhou derivaci S: $S'' = -2 < 0$, a jde tedy opravdu o maximum. ■

Příklad 2.25. Určete rozměry bazénu se čtvercovým dnem tak, aby plocha dláždění jeho stěn a dna byla minimální. Bazén má mít objem 64 m^3.

Řešení:

Označme stranu bazénu jako x a jeho hloubku y. Objem bazénu V vypočteme jako plochu dna krát výšku (hloubku): $V = S \cdot v = x^2 \cdot y = 64$. Plocha S k vydláždění zahrnuje 4 stěny (každá má plochu $S_{stěna} = x \cdot y$) a dno ($S_{dno} = x^2$): $S = 4x \cdot y + x^2$. Máme tedy najít minimum S za podmínky že $x^2 \cdot y = 64$.

Vyjádříme y ze vztahu pro V: $y=\frac{64}{x^2}$, a dosadíme do S:

$S=4x\cdot\frac{64}{x^2}+x^2=\frac{256}{x}+x^2$. Nyní už můžeme derivovat S podle x:

$S'=-\frac{256}{x^2}+2x=\frac{-256+2x^3}{x^2}$. První derivace S' je rovna nula, když je roven nule čitatel: $-256+2x^3=0$, a odtud $x=\sqrt[3]{128}=5{,}04\,\text{m}$. Pro hloubku bazénu y máme: $y=\frac{64}{x^2}=\frac{64}{\sqrt[3]{128}}=2{,}54\,\text{m}$. Pro ověření, že se jedná o minimum, stačí ukázat, že druhá derivace S je pro x = 5,04 kladná (zkuste si sami). ■

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1. Derivujte:

a) $y=1+x+x^2+x^3+x^4$

[$y'=1+2x+3x^2+4x^3$]

b) $y=24x^5-3x^2+8x-4$

[$y'=120x^4-6x+8$]

c) $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$

[$y'=-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^4}$]

d) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

[$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}+\frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$]

e) $y=\frac{3}{x^4}-2\sqrt[3]{x}+\frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}$

[$y'=-\frac{12}{x^5}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}+-\frac{3}{\sqrt[4]{x^7}}$]

f) $y=2\ln x+5\sin x-\cos x+e^x$

[$y'=\frac{2}{x}+5\cos x+\sin x+e^x$]

g) $y=3^x+2\log x+\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}$

[$y'=3^x\cdot\ln 3+\frac{2}{x\ln 10}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$]

h) $y=4tgx-\cot gx$

[$y'=\frac{4}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}$]

i) $y=2arctgx+5arc\sin x$

[$y' = \frac{2}{1+x^2} + \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}$]

2. Derivujte součin funkcí:

a) $y = x \cdot e^x$

[$y' = (x+1)e^x$]

b) $y = (x^2+1) \cdot e^x$

[$y' = (x^2+2x+1)e^x$]

c) $y = x^3 \cdot \ln x$

[$y' = 3x^2 \ln x + x^2$]

d) $y = (x^2+4) \cdot \sin x$

[$y' = 2x \sin x + (x^2+4)\cos x$]

e) $y = x^2 \cdot arctgx$

[$y' = 2x \cdot arctgx + \frac{x^2}{1+x^2}$]

3. Derivujte podíl funkcí:

a) $y = \frac{2x^2-3x+1}{x}$

[$y' = \frac{2x^2-1}{x^2}$]

b) $y = \frac{x}{\ln x}$

[$y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$]

c) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

[$y' = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$]

d) $y = \frac{\sin x}{\cos x}$

[$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$]

e) $y = \frac{e^x+3}{e^x}$

[$y' = -\frac{3}{e^x}$]

4. Derivujte složené funkce:

a) $y = \sqrt{x^2+4x}$

[$y' = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$]

b) $y = \ln\left(4x+1\right)$

[$y' = \dfrac{4}{4x+1}$]

c) $y = 3\sin^2(2x+3)$

[$y' = 12\sin(2x+3)\cos(2x+3)$]

d) $y = e^{1-\sin x}$

[$y' = -e^{1-\sin x}\cdot\cos x$]

e) $y = \left(x^2+2\right)^6$

[$y' = 12x\left(x^2+2\right)^5$]

f) $y = \dfrac{5}{\left(2x+4\right)^3}$

[$y' = -\dfrac{30}{\left(2x+4\right)^4}$]

g) $y = tg^3 4x$

[$y' = \dfrac{12tg^2 4x}{\cos^2 4x}$]

h) $y = \ln^n x^2$

[$y' = \dfrac{2nx\ln^{n-1}x^2}{x^2}$]

5. Derivujte (pomocí logaritmické derivace):

a) $y = x^{\ln x}$

[$y' = \dfrac{2\ln x}{x}\cdot x^{\ln x}$]

b) $y = \left(\sin x\right)^{\ln x}$

[$y' = \left(\sin x\right)^{\ln x}\cdot\left(\dfrac{\ln\sin x}{x}+\ln x\cdot\cot gx\right)$]

6. Je dána funkce $y = x^3 - 3x^2$. Vyjádřete její diferenciál (obecně). Spočtěte přírůstek (úbytek) této funkce v bodě x = 4 pro $\Delta x = 0,2$.

[$df = (3x^2 - 6x)dx$, $df = 4,8$]

7. Určete Maclaurinovu řadu (zvolte n = 3, tedy první 4 členy) funkce: $y = \dfrac{1}{x+1}$

Porovnejte hodnotu této funkce s hodnotou její Maclaurinovy řady v bodě x = 0,5. Jak dobrá je tato aproximace?

[$T_3(f,0,x) = 1 - \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{6}{3!}x^3 = 1 - x + x^2 - x^3$, pro x = 0,5 je y = 2/3, z řady dostáváme T = 0,625. Rozdíl tedy činí pouze 0,042.].

8. Zapište Taylorovu řadu funkce $y = e^x$ v bodě a = 3.

[$T(e^x,3,x) = e^3 + \frac{e^3}{1!}(x-3) + \frac{e^3}{2!}(x-3)^2 + \ldots$]

9. Vypočtěte elasticitu funkce $y = 2x^3$ v bodě x = 2.

[$E(x) = \frac{6x^3}{y}, E(2) = 3$]

10. Je dána poptávka $Q = 90 - 3P$. Určete:
a) elasticitu poptávky obecně,
b) elasticitu poptávky pro P = 10, P = 15 a P = 20, rozhodněte, zda je poptávka při těchto hodnotách elastická, jednotkově elastická nebo neelastická.
c) načrtněte křivku poptávky i křivku elasticity.

[a) $E(P) = \frac{P}{30-P}$, b) $E(10) = \frac{1}{2}$, neelastická; $E(15) = 1$, jednotkově elastická; $E(20) = 2$, elastická.]

11. Je dána nabídka $Q = P^2 + 2P$. Určete:
a) elasticitu nabídky obecně,
b) elasticitu nabídky pro P = 5, P = 15 a P = 30, rozhodněte, zda je nabídka při těchto hodnotách elastická, jednotkově elastická nebo neelastická.
c) načrtněte křivku nabídky i křivku elasticity.

[a) $E(P) = \frac{2P+2}{P+2}$, b) $E(5) = \frac{12}{7}$, elastická; $E(15) = \frac{32}{17}$, elastická; $E(30) = \frac{31}{16}$, elastická.]

12. Je dána poptávka $D(Q) = 100 - 5Q$. Najděte *TR*, *MR* a *AR*.

[$TR(Q) = 100Q - 5Q^2, MR(Q) = 100 - 10Q, TR(Q) = 100 - 5Q$]

13. Je dán celkový příjem $TR(Q) = -5Q + Q^2 - 2Q^3$. Určete: a) *MR* a *AR*, b) body, v nichž *MR* = *AR*.

[a) $MR(Q) = -5 + 2Q - 6Q^2$, $AR(Q) = -5 + Q - 2Q^2$, b) Q = 0 a Q = 1/4.]

14. Jsou dány celkové náklady $TC(Q) = 60 + 3Q - 9Q^2 + 2Q^3$. Určete *FC*, *TVC*, *AC*, *AVC*, *AFC* a *MC*.

[$FC = 60, TC(Q) = 3Q - 9Q^2 + 2Q^3$
$, AC = \frac{60}{Q} + 3 - 9Q + 2Q^2, AVC = 3 - 9Q + 2Q^2, AFC = \frac{60}{Q}, MC = 3 - 18Q + 6Q^2$]

15. Jsou dány celkové náklady $TC(Q) = 32 - 2Q + 2Q^3$. Minimalizujte průměrné náklady.
[Minimum *AC* nastává pro *Q* = 2]

16. Jsou dány celkové náklady $TC(Q) = 8Q + 12$ a celkové příjmy $TR(Q) = -2Q^2 + 22Q$. Najděte: a) body zvratu, b) hodnotu *Q*, pro kterou je zisk maximální.
[a) *Q* = 1 a *Q* = 6, b) *Q* = 3,5]

17. Určete maximální zisk firmy, jestliže celkové příjmy jsou popsány funkcí $TR(Q) = 150Q - 80$ a náklady funkcí $TC(Q) = 120 + 0{,}3Q^2$.
[*Q* = 250]

3 PRŮBĚH FUNKCE

Určit *průběh funkce* znamená určit všechny důležité vlastnosti dané funkce, mezi něž patří definiční obor, monotónnost, extrémy, konvexnost, konkávnost, apod. K určení těchto vlastností využíváme především první a druhé derivace.

3.1 MONOTÓNNOST FUNKCE, EXTRÉMY, KONKÁVNOST A KONVEXNOST

Pro ilustraci vztahu mezi monotónností a první derivací se nejprve zabývejme funkcí $y = x^2$. Tato funkce je rostoucí na intervalu $(0, \infty)$, klesající na intervalu $(-\infty, 0)$, má minimum v bodě $x = 0$, a je na celém definičním oboru konvexní.

Derivace této funkce je $y' = 2x$ a víme, že se rovná směrnici tečny k dané křivce, v tomto případě parabole. Pro x z intervalu $(0, \infty)$, kde je funkce $y = x^2$ rostoucí, je derivace $y' = 2x$ kladná. Pro x z intervalu $(-\infty, 0)$, kde je funkce $y = x^2$ klesající, je derivace $y' = 2x$ záporná. Pro $x = 0$ nastává extrém (minimum).

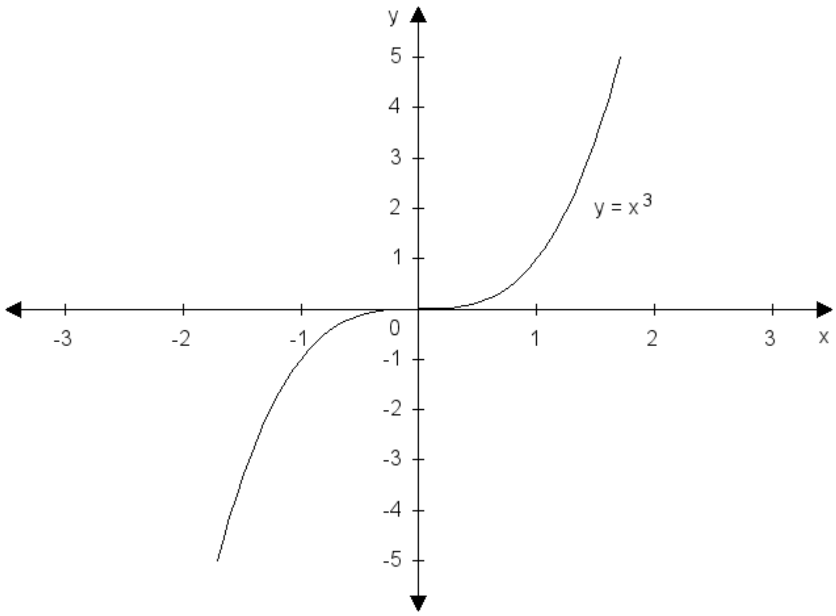
Pozorování výše je důsledkem obecnějšího tvrzení:

- Nechť má funkce $y = f(x)$ v každém bodě x z intervalu (a, b) *kladnou* derivaci, pak je na tomto intervalu *rostoucí*.
- Nechť má funkce $y = f(x)$ v každém bodě x z intervalu (a, b) *zápornou* derivaci, pak je na tomto intervalu *klesající*.
- Je-li v bodě $x = a$ maximum nebo minimum funkce, a první derivace v tomto bodě existuje, pak je $f'(a) = 0$.

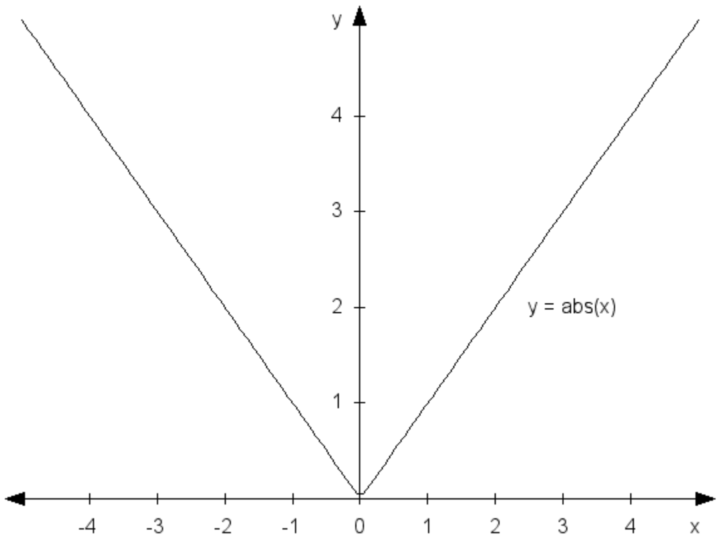
Poslední tvrzení je ošidné v tom, že opačné tvrzení neplatí: je-li v nějakém bodě první derivace nulová, ještě to nemusí být extrém! Může se jednat o tzv. *inflexní* (sedlový) *bod*. Tato situace je ukázána na Obrázku 3.1., kde je graf funkce $y = x^3$. V bodě $x = 0$ je první derivace ($y' = 3x^2$) nulová, ale jedná se o sedlo funkce.

Body, pro které platí, že je v nich první derivace nulová, se označují jako *stacionární body*, nebo též „body podezřelé z extrému“. Mezi nimi pak hledáme maxima a minima.

Funkce může mít extrém ještě v bodech, v nichž první derivace neexistuje a také v krajních bodech definičního oboru. Typickým příkladem prvně jmenovaného případu je funkce $y = |x|$, jejíž graf je na Obrázku 3.2. Tato funkce má minimum v bodě $x = 0$, ale v tomto bodě derivace neexistuje, neboť daná funkce má v $x = 0$ „hrot“.



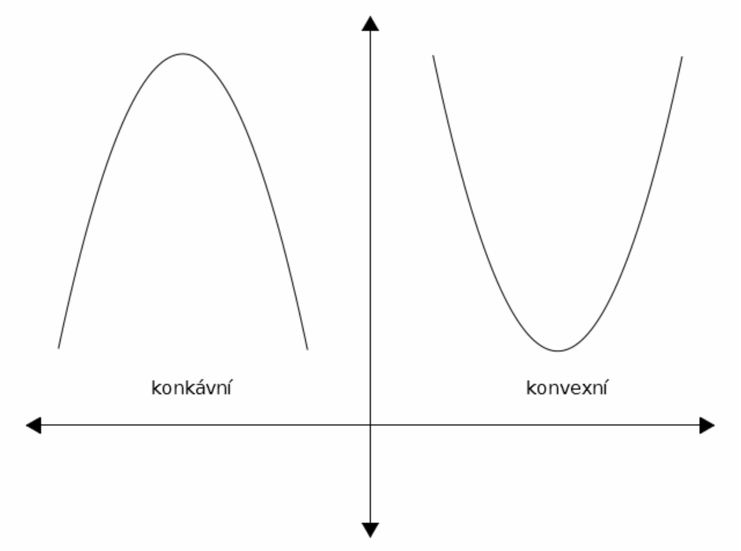
Obr. 3.1. Graf funkce $y = x^3$.



Obr. 3.2. Graf funkce $y = |x|$.

Funkce je *konvexní*, jestliže tečna ke grafu funkce leží vždy pod grafem funkce. Příkladem může být funkce $y = x^2$ (mnemotechnická pomůcka: x^2 je konveXní). V opačném případě je funkce *konkávní*. Ještě jinak: konvexní funkce má tvar „údolí“, zatímco konkávní tvar „kopce“, viz Obr 3.3. *Inflexní bod* je bod, v němž se konkávnost mění v konvexnost nebo naopak, a tečna přechází z jedné strany grafu na druhou.

- Nechť má funkce $y = f(x)$ v každém bodě x z intervalu (a,b) *kladnou* druhou derivaci, pak je na tomto intervalu *konvexní*.
- Nechť má funkce $y = f(x)$ v každém bodě x z intervalu (a,b) *zápornou* druhou derivaci, pak je na tomto intervalu *konkávní*.



Obr. 3.3. Konkávní a konvexní funkce

Můžeme si všimnout, že v okolí maxima je funkce konkávní, zatímco v okolí minima je funkce konvexní. Pomocí druhé derivace tedy můžeme rozhodnout, zda daný stacionární bod je maximem nebo minimem funkce:

- Nechť je v bodě $x = a$ $f'(a) = 0$ a navíc $f''(a) > 0$, pak je v $x = a$ lokální minimum.
- Nechť je v bodě $x = a$ $f'(a) = 0$ a navíc $f''(a) < 0$, pak je v $x = a$ lokální maximum.
- Pokud je v bodě $x = a$ $f'(a) = 0$ a navíc $f''(a) = 0$, neumíme podle druhé derivace rozhodnout, zda se jedná o extrém nebo inflexní bod.

Příklad 3.1. Dokažte, že cenová elasticita $E(P) = \dfrac{P^2}{0{,}5P^2 + 120}$ je rostoucí funkce pro kladné hodnoty *P*.

Řešení:

Funkci derivujeme jako podíl: $E'(P) = \dfrac{2P(0{,}5P^2 + 120) - P^2 \cdot P}{\left(0{,}5P^2 + 120\right)^2}$

A upravíme: $E'(P) = \dfrac{240P}{\left(0{,}5P^2 + 120\right)^2}$

Protože je *P* kladné (*P* je cena, a ta je vždy kladná), je i $E'(P)$ kladné. ■

Příklad 3.2. Určete extrémy funkce:

a) $y = x^2 - 6x$

b) $y = x^3 - 4x^2$

c) $y = e^x + 1$

Řešení:

a) Funkci derivujeme: $y' = 2x - 6$.

Najdeme nulové body první derivace: $y' = 2x - 6 = 0$, a tedy x = 3. Pomocí druhé derivace ověříme, že se jedná o minimum.

b) $y = x^3 - 4x^2$

Funkci derivujeme: $y' = 3x^2 - 8x = x(3x-8)$.

Najdeme nulové body první derivace: $x_1 = 0$, $x_2 = 8/3$. Pomocí druhé derivace ověříme, že v bodě $x_1 = 0$ je maximum a v bodě $x_2 = 8/3$ minimum dané funkce.

c) $y = e^x + 1$

Funkci derivujeme: $y' = e^x$. Nulové body první derivace však neexistují (e^x je vždy kladné), a proto daná funkce nemá žádný extrém. ■

Příklad 3.3. Určete hodnotu práce *L*, pro kterou dosahuje funkce produkce $Q = 12L^2 - L^3$ svého maxima.

Řešení:

V maximu funkce platí, že první derivace je nulová. Danou produkční funkci derivujeme:

$Q' = 24L - 3L^2$

A položíme rovnu nule:

$24L - 3L^2 = 3L(8-L) = 0$

Odtud máme dva nulové body první derivace (body podezřelé z extrému):

$L_1 = 0$ a $L_2 = 8$.

Pomocí druhé derivace ($Q'' = 24 - 6L$) ověříme, že bod L = 0 je bodem minima produkční funkce (protože $Q''(0) = 24 > 0$), zatímco druhý bod L = 8 je bodem maxima (protože $Q''(8) = -24 < 0$).

Pro L = 8 dosáhne produkce svého maxima Q = 256 jednotek. ■

3.2 ASYMPTOTY FUNKCE

Asymptotami funkce $y = f(x)$ nazýváme přímky, pro které platí, že jejich vzdálenost od grafu funkce se pro *x* jdoucí do nekonečna blíží nule. Představu o asymptotách si můžeme vytvořit na příkladu grafu funkce $y = \frac{1}{x}$. Vidíme, že hodnoty této funkce se v nekonečnu blíží k ose *x*, která je tedy vodorovnou asymptotou dané funkce, a zároveň pro *x* jdoucí k nule se hodnoty funkce blíží do plus (mínus) nekonečna, a tedy osa *y* je svislou asymptotou.

Asymptoty existují svislé, vodorovné a šikmé. Svislou asymptotu určíme z definičního oboru. Je-li daná funkce například $y = \frac{x}{x-1}$, pak $x \neq 1$ a právě přímka x = 1 je svislou asymptotou dané funkce. Vodorovnou asymptotu lze považovat za speciální případ šikmé asymptoty (směrnice je nulová).

Šikmá asymptota má obecnou rovnici stejnou jako lineární funkce (je to přímka!), tedy $y = ax + b$. Koeficienty *a* a *b* se vypočtou pomocí následujících limit:

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \text{ resp. } a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (3.1)$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right] \text{, resp. } b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right] \qquad (3.2)$$

Výpočet asymptot funkce je ilustrován v následující kapitole věnované průběhu funkce

3.3 POSTUP PŘI URČOVÁNÍ PRŮBĚHU FUNKCE

Při určování průběhu funkce obvykle postupujeme podle následující osnovy:

1. *D*(*f*), sudost, lichost, periodičnost.
2. Limity (jednostranné) v bodech nespojitosti a v nevlastních bodech.
3. Průsečíky s osami *x* a *y*, znaménka funkčních hodnot.
4. První derivace, její nulové body.
5. Lokální extrémy a intervaly monotónnosti.
6. Druhá derivace a její nulové body.
7. Inflexní body, konkávnost, konvexnost.
8. Asymptoty.
9. Omezenost funkce, *H*(*f*).
10. Graf funkce.

Vyšetřování průběhu funkce si ukážeme na několika příkladech.

Příklad 3.4. Určete průběh funkce *f*: $y=x^3-6x^2+9x$.

Řešení:

1. Protože *f* je mocninná, je D(*f*) = R. (Připomínáme, že definiční obor není roven R jen u funkcí obsahujících neznámou ve jmenovateli, pod odmocninou, v logaritmu, a u funkcí arcsin a arccos. Daná funkce nepatří do žádné zmíněné kategorie).
Ověříme sudost funkce: musí platit rovnost $f(x)=f(-x)$ pro všechna *x* z definičního oboru, a tedy:
$x^3-6x^2+9x=(-x)^3-6(-x^2)+9(-x)$,
což upravíme takto: $x^3-6x^2+9x=-x^3-6x^2-9x$.
Vidíme, že pravá strana se nerovná levé (nejsou stejná znaménka), funkce sudá není.
Podobně ověříme lichost funkce: musí platit $f(x)=-f(-x)$ pro všechna *x* z definičního oboru, což znamená, že všechny členy na levé a pravé straně rovnice musí mít opačné znaménko. Využijeme výsledek z předešlého odstavce:
$x^3-6x^2+9x=-x^3-6x^2-9x$.
Člen u 6*x* nemá opačné znaménko, proto funkce není lichá.
Periodická funkce *f* není, periodické jsou pouze goniometrické funkce.
2. Body nespojitosti funkce nemá, proto spočteme limity pouze v nevlastních bodech, tedy v $\pm\infty$:
$\lim_{x\to+\infty} x^3-6x^2+9x=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} x^3-6x^2+9x=-\infty$
Při výpočtu těchto limit jsem využili faktu, že o výsledku rozhodne největší člen, tedy x^3, který pro *x* rostoucí do plus nekonečna roste rovněž do plus nekonečna, zatímco u druhé limity pro *x* jdoucí do mínus nekonečna je x^3 záporné.
3. Průsečíky grafu funkce s osami *x* a *y* určujeme tak, že nejprve položíme *x* = 0, a dopočítáme z předpisu funkce *y* (tím určíme průsečík s osou *y*), a pak položíme *y* = 0 a dopočítáme *x* (průsečík s osou *x*):

$x = 0$: dosazením vyjde okamžitě $y = 0$. Máme tedy první průsečík P_1 [0,0]. Graf funkce prochází počátkem soustavy souřadnic.

$y = 0$: dosazením získáme rovnici třetího stupně $0 = x^3 - 6x^2 + 9x$, kterou musíme vyřešit. Nejprve vytkneme x a upravíme:

$0 = x(x^2 - 6x + 9) = x\left(x-3\right)^2$

Z posledního tvaru rovnice obdržíme kořeny: $x_1 = 0$ a $x_{2,3} = 3$. Našli jsme tedy průsečíky s osou x: P_2 [0,0] a P_3 [3,0]. Avšak průsečíky P_1 a P_2 splývají. Máme tedy jen dva různé průsečíky. Jak uvidíme vzápětí, bod P_3 [3,0] nebude průsečíkem, ale pouze dotykovým bodem grafu funkce a osy x.

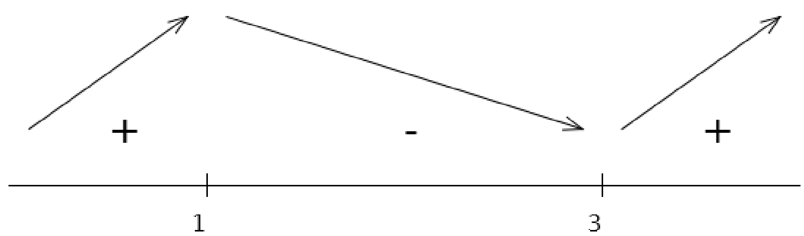
Ještě musíme určit znaménka funkčních hodnot pro zadanou funkci: nulové body $x = 0$ a $x = 3$ naneseme na číselnou osu, která se tím rozdělí na tři intervaly. Z každého intervalu vybereme jedno libovolné číslo, pomocí kterého zjistíme znaménko dané funkce:

V intervalu $\left(-\infty, 0\right)$ vybereme například $x = -10$, dosadíme do předpisu funkce $y = x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x-3\right)^2$ a vyjde záporná hodnota (–1690). Nad interval $\left(-\infty, 0\right)$ napíšeme znaménko "–". U intervalů (0, 3) a $(3, \infty)$ zjistíme znaménko "+". Můžeme tak učinit závěr, že pro kladná x nabývá daná funkce kladných hodnot, pro záporná x je funkce záporná a pro $x = 0$ je rovněž $y = 0$. Proto musí být bod P_3 [3,0] dotykový bod, a ne průsečík.

4. První derivace funkce *f*: $y' = 3x^2 - 12x + 9$.

Nulové body první derivace, což jsou „body podezřelé z extrému", najdeme řešením kvadratické rovnice $0 = 3x^2 - 12x + 9$: $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$ (řešíme pomocí diskriminantu nebo rozkladem na součin kořenových činitelů: $0 = 3x^2 - 12x + 9 = 3\left(x-1\right)\left(x-3\right)$.

5. Body $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$ naneseme na číselnou osu, čímž získáme tři intervaly (bez nulových bodů): $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$ a $(3, \infty)$, viz Obr. 3.4. Nyní rozhodneme o znaménku první derivace v každém intervalu tak, že zvolíme libovolné číslo z daného intervalu a dosadíme ho do 1. derivace. Postupně obdržíme znaménka "+" "–" a "+". Víme, že pokud je první derivace v nějakém intervalu kladná, pak je daná funkce na tomto intervalu rostoucí. Proto nad intervaly se znaménkem "+" načrtneme šipku směrem vzhůru. Obdobně nad intervaly se znaménkem "–" načrtneme šipku směrem dolů, což symbolizuje, že daná funkce na tomto intervalu klesá, viz Obr. 3.4.



Obr. 3.4. Znaménka první derivace.

Z „šipkového" schématu okamžitě vidíme, že v bodě $x = 1$ má funkce maximum, zatímco v bodě $x = 3$ je minimum. Další extrémy funkce nemá.

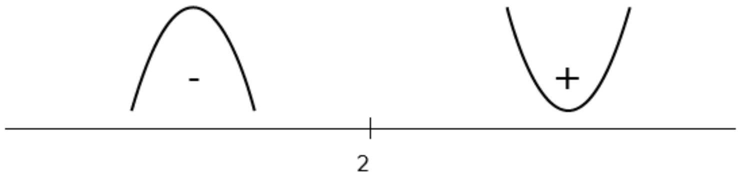
Pro monotónnost platí:

Pro $x \in (1, 3)$ je funkce klesající,

Pro $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ je funkce rostoucí.

6. Druhá derivace: $y'' = 6x - 12$, nulový bod druhé derivace: $x = 2$.

7. Nulový bod druhé derivace, tedy $x = 2$, může být inflexním bodem dané funkce, pokud se v něm mění konvexnost na konkávnost nebo obráceně. To ověříme pomocí znaménka druhé derivace: na číselné ose opět vyznačíme nulový bod $x = 2$, čímž dostaneme dva intervaly: $(-\infty, 2)$ a $(2, \infty)$, viz Obr. 3.5. V prvním intervalu zvolíme například $x = 0$, druhá derivace vyjde záporná (–12). Nad interval zapíšeme "–". U druhého intervalu zvolíme například $x = 10$, druhá derivace vyjde kladná (+48). Nad interval zapíšeme "+". Protože v bodě $x = 2$ se mění znaménko druhé derivace, je tento bod inflexním bodem. V intervalu $(-\infty, 2)$ je funkce konkávní, v intervalu $(2, \infty)$ konvexní (podívejte se na graf této funkce níže!).



Obr. 3.5. Znaménka druhé derivace.

8. Asymptoty:
Svislou asymptotu určíme z definičního oboru: protože D(*f*) = R, svislá asymptota neexistuje.

Šikmou asymptotu vypočteme ze vztahů (3.1) a (3.2). Protože je daná funkce spojitá, stačí vypočítat limity do plus nekonečna. V našem případě obdržíme:

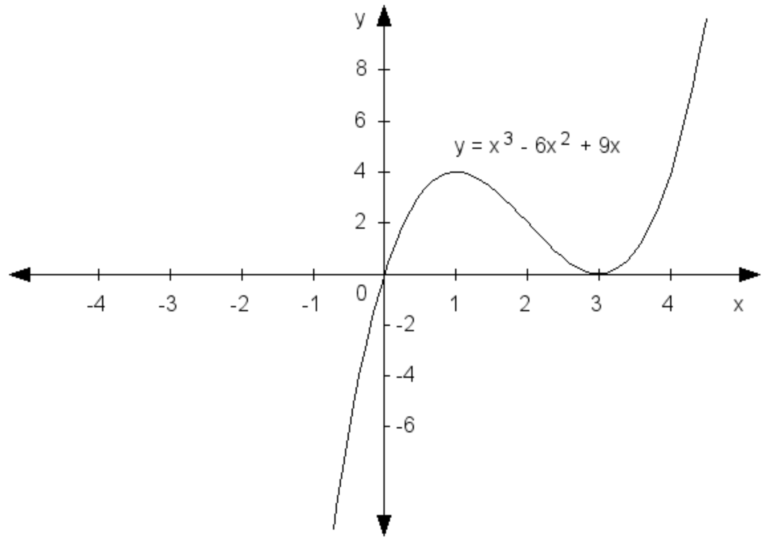
$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x^2 - 6x + 9\right) = +\infty .$$

Pokud nám vyjde koeficient *a* nebo *b* nekonečný, znamená to, že šikmá asymptota neexistuje. Koeficient *b* už nemusíme počítat.

9. Funkce není omezená, a $H(f) = R$.

10. Graf viz Obrázek 3.6. ■

Poznámka: graf funkce je lepší kreslit průběžně. Vždy, když o funkci něco zjistíme (například polohu lokálního maxima), je vhodné si tento fakt zakreslit do grafu, neboť tak získáme lepší představu o dané funkci již během určování průběhu funkce.



Obr. 3.6. Graf funkce $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Příklad 3.5. Určete průběh funkce $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Řešení:

1. Začneme definičním oborem: jsou to všechna reálná čísla bez 1 (nulový bod jmenovatele), což zapíšeme $D(f) \in R - \{1\}$, nebo jednoduše $x \neq 1$.

Ověříme sudost: $f(x) = f(-x)$

$$\frac{x^2}{x-1} \neq \frac{x^2}{-x-1}$$

Funkce tedy sudá není.
Ověříme lichost:
$f(x) = -f(-x)$

$$\frac{x^2}{x-1} \neq -\frac{x^2}{-x-1}$$

Funkce není ani lichá.
Dále funkce není periodická, neboť periodické jsou pouze goniometrické funkce.

2. Vypočteme limitu v bodě nespojitosti, a to limitu zleva i zprava:

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty \ , \ \lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

Vypočteme limity v nevlastních bodech:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty \, , \ \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

3. Průsečíky funkce s osami *x* a *y*:

Průsečík s osou *y* najdeme tak, že položíme *x* = 0: $y = \dfrac{0^2}{0-1} = 0$.

Průsečík s osou x najdeme tak, že položíme $y = 0$: $0 = \frac{x^2}{x-1}$, a tedy $x = 0$.
Oba průsečíky splývají, funkce prochází počátkem soustavy souřadnic.

Kladnost/zápornost funkce: ze zadání je zřejmé, že pokud zvolíme $x > 1$, bude funkce kladná, a pro $x < 1$ záporná.

4. První derivace:

$$y' = \frac{x^2}{x-1} = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

Nulové body první derivace:

$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0$ pro $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$. Tyto body jsou stacionární (podezřelé z extrému).

5. K určení, o jaké body jde, nám pomůže monotónnost (nebo 2. derivace, viz další bod postupu). Vyneseme oba body $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$ na číselnou osu a určíme monotónnost první derivace v každém ze tří intervalů. Vybereme libovolné číslo z pravého intervalu, například 10, a dosadíme ho do první derivace. Vyjde číslo kladné (80/81), nad interval nakreslíme „+“. Podobně určíme další dvě znaménka. Nad interval se znaménkem „+“ nakreslíme šipku nahoru, která znázorňuje, že zde funkce roste. Nad interval se znaménkem „–“ nakreslíme šipku dolů, která znázorňuje, že zde funkce klesá. Nyní je už jasné, že v bodě $x_1 = 0$ je maximum, protože do tohoto bodu funkce roste. Podobně v bodě $x_2 = 2$ je minimum.

Monotónnost funkce:

Pro $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ je funkce rostoucí,

Pro $x \in (0,1) \cup (1,2)$ je funkce klesající.

6. Druhá derivace:

$$y'' = \frac{(2x-2) \cdot (x-1)^2 - (x^2 - 2x) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

7. Nulový bod druhé derivace: $x = 1$.

Pro $x \in (-\infty, 1)$ je funkce konkávní,

Pro $x \in (1, \infty)$ je funkce konvexní.

Funkce nemá inflexní bod (bod $x = 1$ je bodem nespojitosti funkce).

8. Svislou asymptotu určíme z definičního oboru: protože $x \neq 1$, dostáváme svislou asymptotu $x = 1$.

Šikmou asymptotu vypočteme ze vztahů (3.1) a (3.2):

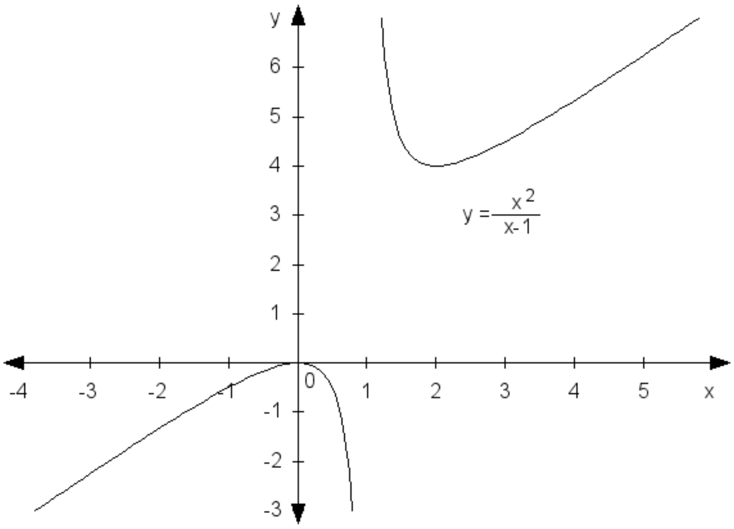
$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x \cdot (x-1)} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = 1 .$$

Šikmá asymptota má tedy rovnici $y = x + 1$.

9. Obor hodnot: $H(f) = (-\infty, 0\rangle \cup \langle 4, \infty)$.

10. Graf funkce je na Obrázku 3.7. ■



Obr. 3.7. Graf funkce $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Příklad 3.6. Určete průběh funkce $y = \dfrac{x^2}{e^x}$.

Řešení:
1. Definiční obor: protože ve jmenovateli nemůže být 0 pro žádné x, je $D(f) = R$.

Sudost a lichost: $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$, $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{e^{-x}} = \dfrac{x^2}{e^{-x}}$. Odtud vidíme, že oba výrazy si nejsou rovny ani se neliší o znaménko, proto daná funkce není lichá, ani sudá.
Periodičnost: periodické jsou pouze goniometrické funkce.
2. Body nespojitosti nejsou, limity funkce v nevlastních bodech:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$ (protože jmenovatel roste rychleji než čitatel, také je možné použít L´Hospitalovo pravidlo)

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = +\infty$ (protože pro záporná *x* se člen e^x posune do čitatele a jeho hodnota roste do nekonečna)
3. Průsečíky:
$x = 0$: $y = 0 \rightarrow P_1$ [0,0].
$y = 0$: $x = 0 \rightarrow P_2$ [0,0].
Oba průsečíky splývají. Jak uvidíme dále, tento průsečík je ve skutečnosti pouze dotykovým bodem osy *x*.

Znaménka funkčních hodnot: protože x^2 i e^x jsou pro všechna x kromě 0 kladné, je i daná funkce všude kladná s výjimkou $x = 0$, kde je rovna 0. Tento výjimečný bod je zmíněným dotykovým bodem P. Graf funkce tedy bude ležet všude nad (na) osou x.

4. První derivace (derivujeme jako podíl):

$$y' = \frac{2x - x^2}{e^x} = \frac{x(2-x)}{e^x}$$

Nulové body první derivace: zlomek je roven nule, když je čitatel roven nule, a tedy: $x(2-x) = 0$

Odtud $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$.

5. Vyneseme „podezřelé“ body $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$ na číselnou osu (nakreslete si!) a znaménkovou metodou zjistíme monotónnost:

funkce je rostoucí pro $x \in (0, 2)$

funkce je klesající pro $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

Z monotónnosti (nakreslete si šipky) odvodíme extrémy:

Maximum: $\left[2, \frac{4}{e^2}\right]$

Minimum: [0,0]

6. Druhá derivace: $y' = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{e^x}$

Nulové body druhé derivace vypočteme z rovnice $x^2 - 4x + 2 = 0$ (čitatel zlomku musí být 0):

$x_1 = 2 - \sqrt{2}$ a $x_1 = 2 + \sqrt{2}$.

7. Vyneseme oba body $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ a $x_1 = 2 + \sqrt{2}$ na číselnou osu (nakreslete si!) a znaménkovou metodou rozhodneme o kladnosti (zde je funkce konvexní) respektive zápornosti (zde je funkce konkávní) druhé derivace:

Konvexní je funkce pro $x \in \left(-\infty, 2 - \sqrt{2}\right) \cup \left(2 + \sqrt{2}, \infty\right)$

Konkávní pro $x \in \left(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\right)$.

Body $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ a $x_1 = 2 + \sqrt{2}$ jsou inflexní body.

8. Asymptoty: svislá asymptota neexistuje, šikmá asymptota:

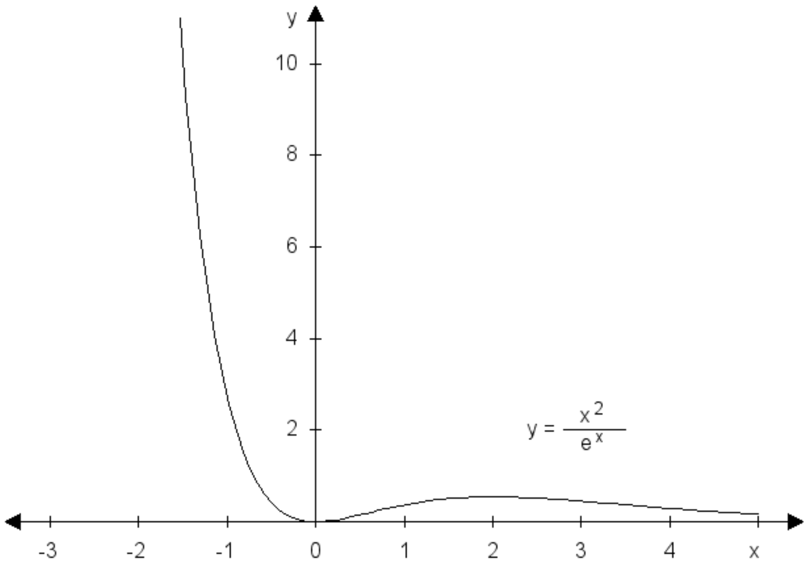
$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{e^x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ resp. } a = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2}{e^x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} = +\infty$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{e^x} - 0x\right] = 0 \text{, resp. } b = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{x^2}{e^x} - 0x\right] = +\infty$$

Nekonečné hodnoty však nemají smysl, proto máme $a = b = 0$. Rovnice (vodorovné) asymptoty tedy je: $y = 0$. Asymptotou je tedy osa x (v kladném směru).

9. Funkce je omezená zdola, $H(f) = \langle 0, \infty)$.

10. Graf funkce viz Obrázek 3.8. ■



Obr. 3.8. Graf funkce $y = \frac{x^2}{e^x}$.

3.4 EKONOMICKÉ APLIKACE: EXTRÉMY FUNKCE PŘÍJMŮ, NÁKLADŮ A ZISKU

Znalost průběhu funkce (produkční, příjmů, nákladů, zisku, apod.) je v ekonomii užitečná při hledání maxima produkce, příjmů a zisku, nebo naopak k určení minima nákladů.

Zvláštností ekonomických funkcí je, že ekonomické veličiny, jako je například cena, práce, kapitál, množství apod., obvykle nemohou být záporné, a proto se vyšetřování průběhu funkce omezuje pouze na první kvadrant soustavy souřadnic. V dalším výkladu se zaměříme pouze na vyšetřování nejdůležitějších vlastností ekonomických funkcí: extrémů a monotónnosti, a to pomocí první (druhé) derivace. Samozřejmě by bylo možné určit i zbývající vlastnosti, ale ty již většinou nemají ekonomický význam. Je vhodné nakreslit si k dané ekonomické funkci její graf, neboť z grafu jsou okamžitě patrné její vlastnosti.

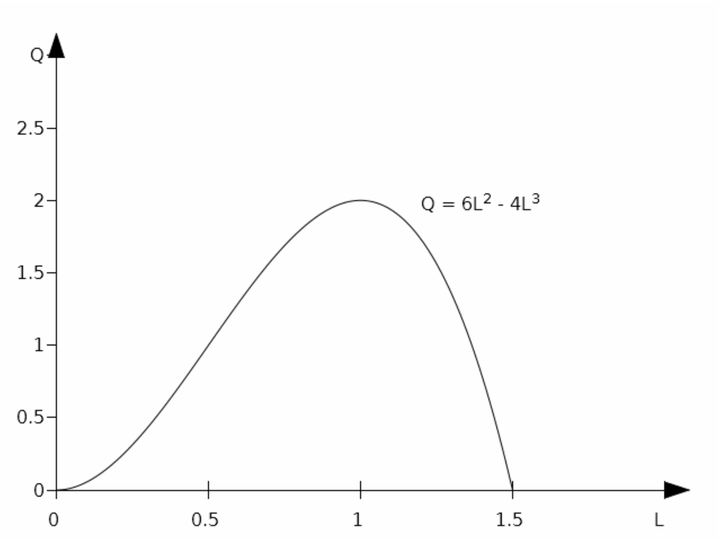
Příklad 3.7. Je dána produkční funkce $Q = 6L^2 - 4L^3$. Určete její extrémy a monotónnost, funkci načrtněte. Nezapomeňte, že u ekonomických funkcí předpokládáme, že hodnoty Q i L jsou nezáporné.

Řešení:

Funkci derivujeme: $Q' = 12L - 12L^2$

Najdeme nulové body první derivace: $Q' = 12L - 12L^2 = 0$.

To jsou hodnoty L = 0 a L = 1. Pomocí znaménkové metody (nebo pomocí druhé derivace) zjistíme povahu těchto podezřelých bodů: v bodě L = 0 je minimum a v bodě L = 1 je maximum. Funkce $Q = 6L^2 - 4L^3$ má ovšem ještě jedno minimum, a to v bodě L = 1,5, který je krajním bodem definičního oboru! Funkce je rostoucí pro $x \in (0,1)$ a klesající pro $x \in (1, \infty)$. Graf funkce viz Obrázek 3.9. ■



Obr. 3.9. Graf funkce $Q = 6L^2 - 4L^3$.

Příklad 3.8. Je dána funkce nákladů $TC(Q) = 2Q^3 - 6Q^2 + 30Q + 5$. Určete *Q*, pro které jsou mezní náklady *MC*(*Q*) minimální. Načrtněte průběh funkce *MC*(*Q*).

Řešení:
Vypočteme mezní náklady jako první derivaci celkových nákladů: $MC(Q) = 6Q^2 - 12Q + 30$
Mezní náklady derivujeme a položíme rovny nule: $MC'(Q) = 12Q - 12 = 0$, odkud získáme nulový bod *Q* = 1. V tomto bodě je minimum mezních nákladů (*MC* = 24). Grafem mezních nákladů je parabola s vrcholem v bodě [1,24]. ■

Příklad 3.9. Je dána funkce celkových příjmů $PR(Q) = -2Q^4 + 400Q^2$. Určete maximum této funkce.

Řešení:
Funkci derivujeme a položíme rovnu nule: $PR'(Q) = -8Q^3 + 800Q = -8Q(Q^2 - 100) = 0$.
Obdržíme tři kořeny: Q_1 = 0, Q_2 = –10, Q_3 = 10. Pouze třetí kořen má ekonomický smysl. Znaménkovou metodou nebo pomocí druhé derivace ($PR''(10) = -1600$) zjistíme, že v bodě *Q* = 10 nastává maximum. ■

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1.) Vypočtěte první derivaci funkce a určete monotónnost funkce v zadaném bodě:

a) $f(x) = x^2$, $f'(4) = ?$
[$f'(x) = 2x$, $f'(4) = 2 \cdot 4 = 8$, funkce je v bodě *x* = 4 rostoucí]

b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $f'(3) = ?$
[$f'(x) = 4x - 3$, $f'(3) = 4 \cdot 3 - 3 = 9$, funkce je v bodě *x* = 4 rostoucí]

c) $f(x) = \dfrac{4}{x}$, $f'(-2) = ?$

[$f'(x) = -\frac{4}{x^2}$, $f'(-2) = 1$, funkce je v bodě $x = -2$ rostoucí]

d) $f(x) = 3\ln x + 1,\ f'(-1) = ?$

[$f'(x) = \frac{3}{x}$, $f'(-1) = -3$, funkce je v bodě $x = -1$ klesající]

2. Určete lokální maxima a minima funkce:

a) $f(x) = x^2 - 8x + 4$

[minimum: $x = 4$]

b) $f(x) = -2x^2 + 12x$

[maximum: $x = 3$]

c) $f(x) = x \cdot e^x$

[minimum: $x = -1$]

d) $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$

[maximum: $x = 1$]

d) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

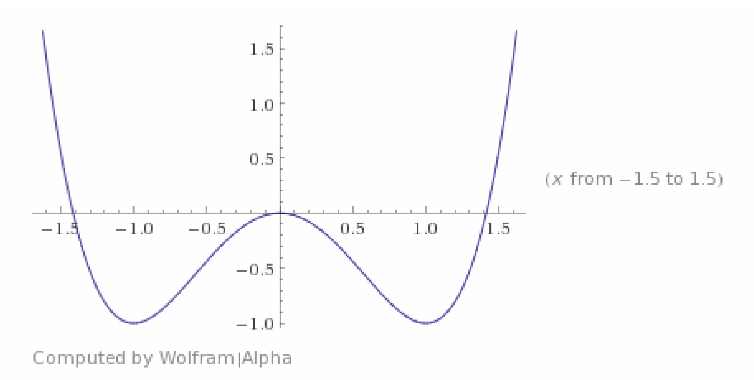
[maximum: $x = 0$, minimum: $x = 2$]

3.) Určete průběh funkce:

a) $y = x^4 - 2x^2$

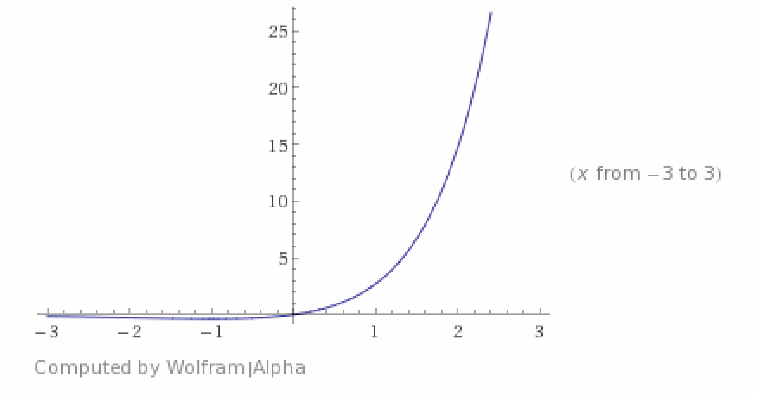
[1. $D(f) = R$, sudá, 2. $\lim_{x\to\pm\infty} x^4 - 2x^2 = +\infty$, 3. průsečíky s osami: [0,0] a $\left[\pm\sqrt{2},0\right]$, funkce je kladná: $x \in \left(-\infty,-\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2},\infty\right)$, záporná: $x \in \left(-\sqrt{2},0\right) \cup \left(0,\sqrt{2}\right)$, 4. $y' = 4x^3 - 4x$, 5. max: [0,0], min: [-1,-1] a [1,-1], rostoucí: $x \in (-1,0) \cup (1,\infty)$, klesající: $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$. 6. $y'' = 12x^2 - 4$, 7. inflexní body $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, konvexní: $x \in \left(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{3}},\infty\right)$, konkávní: $x \in \left(-\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, 8. asymptoty nejsou,

9. $H(f) = \langle -1,\infty)$, omezená zdola]

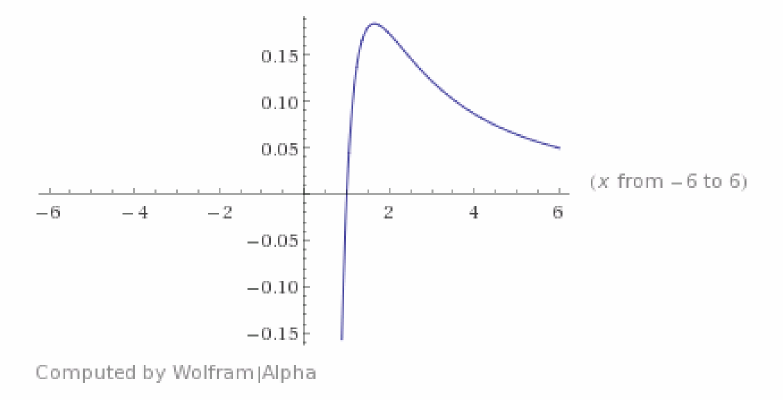


b) $y = x \cdot e^x$

[1. $D(f) = R$, ani sudá, ani lichá, 2. $\lim_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$, 3. průsečíky s osami: [0,0], funkce je kladná: $x \in (0, \infty)$, záporná: $x \in (-\infty, 0)$, 4. $y' = (x+1)e^x$,
5. min: [–1,–1/e], maximum není, rostoucí: $x \in (-1, \infty)$, klesající: $x \in (-\infty, -1)$.
6. $y'' = (x+2)e^x$, 7. inflexní body $x = -2$, konvexní: $x \in (-2, \infty)$, konkávní: $x \in (-\infty, -2)$, 8. vodorovná asymptota y = 0, 9. $H(f) = \langle -1/e, \infty)$, omezená zdola].



4. Využijte znalosti průběhu funkce k načrtnutí grafu funkce $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$.



5. Určete maximum celkových příjmů $TR(Q) = -1400 + 80Q - Q^2$.
[Q = 40]

6. Určete minimum celkových nákladů $TC(Q) = 100 - 60Q + Q^2$
[Q = 30]

7. Určete maximum zisku $PR(Q) = 100 + 64Q - 4Q^2$
[Q = 8]

4 REÁLNÁ FUNKCE DVOU REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

Dosud jsme se zabývali situacemi, kdy jedna veličina závisela pouze na jedné jiné veličině (*y* záviselo na *x*). V mnoha reálných situacích však jedna veličina může záviset na více veličinách. Například Cobb-Douglasova produkční funkce *Q* závisí na práci *L* a kapitálu *K*. Celkový zisk firmy (*PR*) závisí na celkovém příjmu (*TR*) a celkových nákladech (*TC*). Částka naspořená na účtu v bance závisí na výši vkladu, úrokové míře a počtu úrokovacích období, atd.

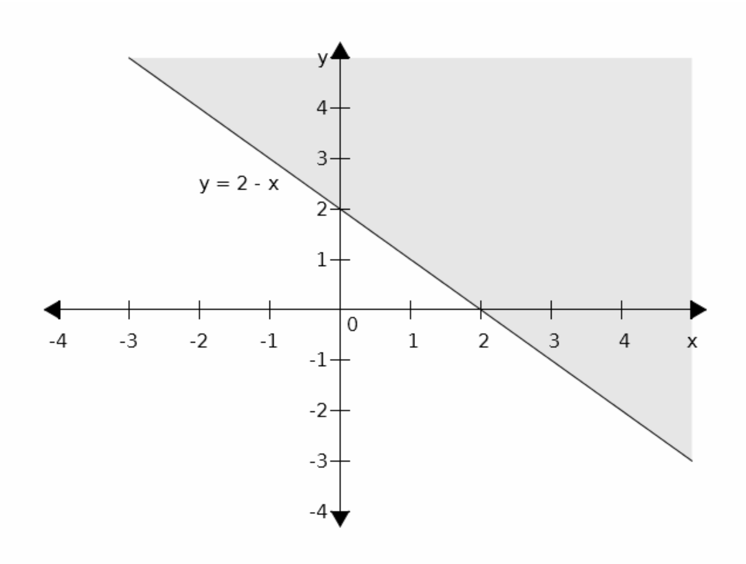
My se omezíme pouze na problematiku funkcí dvou reálných proměnných. Teorie funkcí více než dvou proměnných je vybudována analogicky k teorii funkcí dvou proměnných.

4.1 DEFINIČNÍ OBOR FUNKCÍ DVOU PROMĚNNÝCH

Definičním oborem funkce $f(x,y)$ proměnných *x* a *y* rozumíme všechny uspořádané dvojice $[x,y] \in R^2$, pro které má daná funkce smysl. Definiční obor obvykle znázorňujeme graficky v pravoúhlé soustavě souřadnic jako (vyšrafovanou) část roviny. Typickým funkcemi, u kterých je nutné určit definiční obor, jsou odmocniny, logaritmus, racionální lomené funkce, arcsin a arccos.

Příklad 4.1. Určete definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{x+y-2}$.

Řešení:
Definiční obor zadané funkce zjistíme z podmínky pro odmocninu: výraz pod odmocninou musí být nezáporný: $x + y - 2 \geq 0$.
Řešením této nerovnice o dvou neznámých je polorovina s hraniční přímkou $x + y - 2 = 0$ (rovnici přímky můžeme upravit na častěji používaný tvar $y = -x + 2$).
Načrtneme tuto přímku (viz Obr. 4.1). Přímka nám rozděluje rovinu na dvě poloroviny, z nichž jedna představuje definiční obor funkce, a druhá ne. Mezi oběma polorovinami se rozhodneme takto: zvolíme si libovolný bod, o kterém s jistotou víme, ve které polorovině se nachází. Můžeme použít například bod $[0,0]$, který leží v „levé“ polorovině. Dosadíme souřadnice zvoleného bodu do nerovnice $x + y - 2 \geq 0$ a dostaneme $-2 \geq 0$, což je nepravdivý výrok. Bod $[0,0]$ nesplňuje podmínku $x + y - 2 \geq 0$ pro definiční obor, leží proto v nesprávné polorovině. Definičním oborem je tedy „pravá“ polorovina, kterou vyšrafujeme (v Obrázku 4.1 je tato polorovina znázorněna šedým stínováním). Díky znaménku „=“ v podmínce $x + y - 2 \geq 0$ patří do definičního oboru i samotná hraniční přímka. Graficky příslušnost k definičnímu oboru vyznačíme tak, že přímku obtáhneme plnou čarou. Pokud by přímka do definičního oboru nepatřila, nakreslili bychom ji čarou přerušovanou. ■

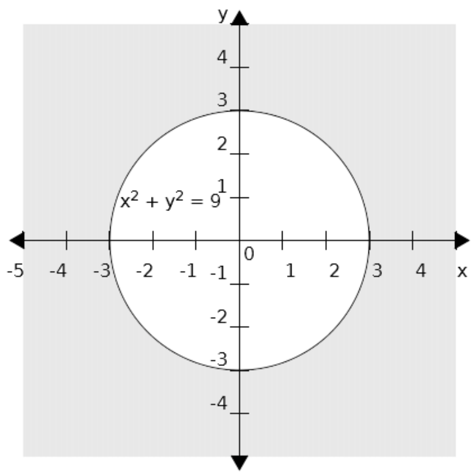


Obr. 4.1.

Příklad 4.2. Určete definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$.

Řešení:

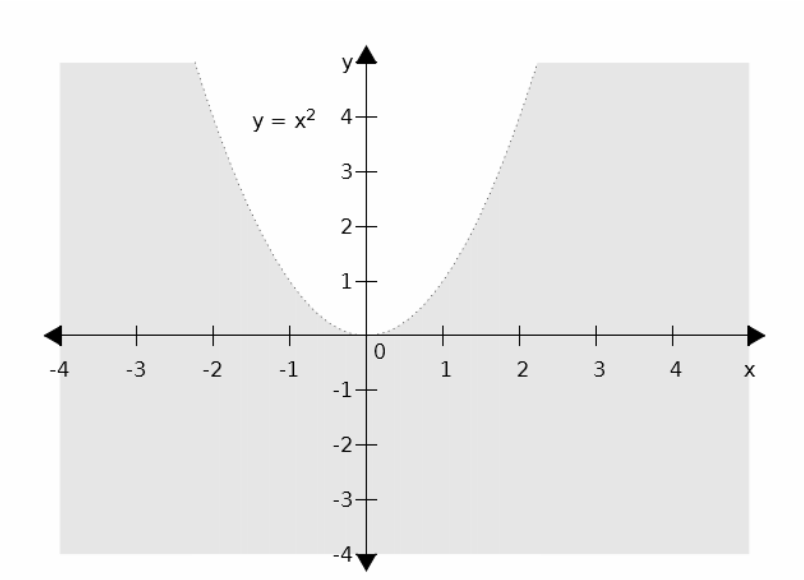
Podmínka nezápornosti výrazu pod odmocninou je: $x^2 + y^2 - 9 \geq 0$. Řešením této nerovnice o dvou neznámých je část roviny ohraničená hraniční křivkou $x^2 + y^2 - 9 = 0$. Touto křivkou je tentokrát kružnice se středem v bodě $[0,0]$ a poloměrem r = 3. Tato kružnice nám vymezuje dvě části roviny: vnitřek kružnice a oblast vně kružnice. O tom, která z těchto oblastí je definičním oborem zadané funkce, opět rozhodneme pomocí jednoho vhodně zvoleného bodu. Tímto bodem může být opět bod $[0,0]$, který leží uvnitř kružnice. Dosazením tohoto bodu do nerovnice $x^2 + y^2 - 9 \geq 0$ zjistíme, že $-9 \geq 0$, což není pravda, a tedy bod $[0,0]$ neleží v definičním oboru dané funkce. Definičním oborem je tedy oblast vně kružnice včetně samotné kružnice (díky znaménku „=“ v nerovnici), viz Obr. 4.2. ■



Obr. 4.2.

Příklad 4.3. Určete definiční obor funkce $f(x,y) = \log\left(x^2 - y\right)$.

Řešení:
Pro výraz uvnitř logaritmu máme podmínku: $x^2 - y > 0$ (logaritmus je definován jen pro kladné hodnoty). Hraniční křivka má rovnici $x^2 - y = 0$, v níž po úpravě na tvar $y = x^2$ poznáme parabolu s vrcholem v počátku soustavy souřadnic. Tato parabola nám opět vymezuje v rovině dvě oblasti pro definiční obor („pod“ a „nad“ parabolou), mezi kterými musíme rozhodnout. Zvolíme například bod $[0,1]$, který očividně leží nad parabolou a je tedy reprezentantem této oblasti. Bod $[0,1]$ však nesplňuje nerovnost $x^2 - y > 0$, a proto je definičním oborem dané funkce oblast „pod“ parabolou. Samotnou parabolu obtáhneme přerušovanou čarou, neboť do definičního oboru nepatří (v podmínce $x^2 - y > 0$ není obsažena rovnost). Výsledek viz Obr. 4.3. ■



Obr. 4.3.

Příklad 4.4. Určete definiční obor funkce $f(x,y) = \arcsin\left(x - y\right)$.

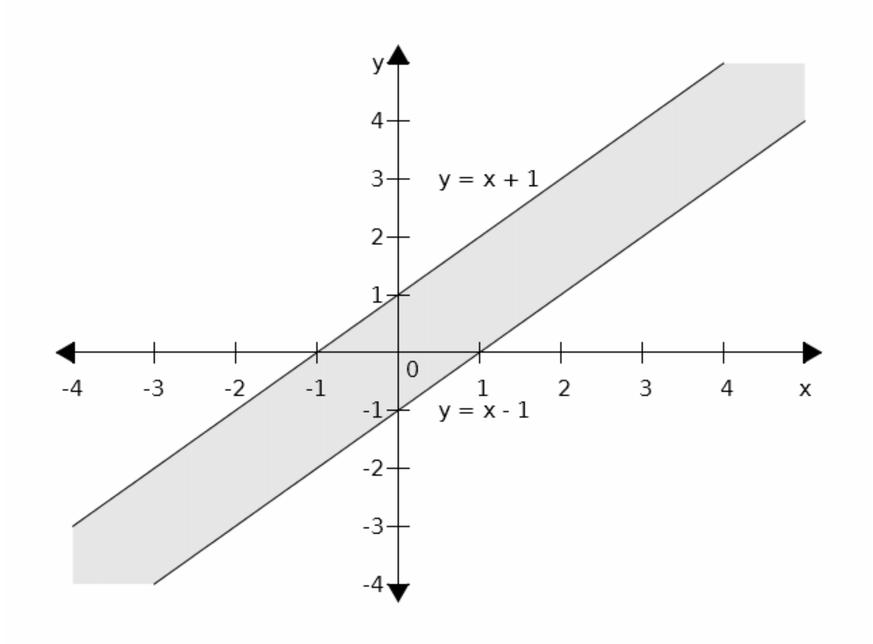
Řešení:
Pro výraz uvnitř funkce *arcsinus* máme podmínku: $-1 \le x - y \le 1$ (tato podmínka plyne z oboru hodnot inverzní funkce k *arcsinus*, a to funkce *sinus*). Tuto nerovnici rozdělíme na dvě jednodušší nerovnice:

I. $-1 \le x - y$

II. $x - y \le 1$

Nerovnice I. představuje polorovinu s hraniční přímkou $-1 = x - y$, po úpravě $y = x + 1$, obsahující bod [0,0].

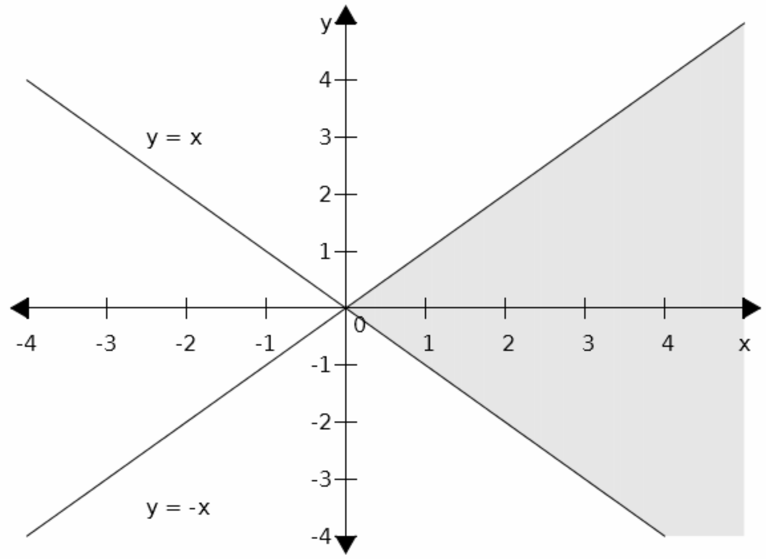
Rovněž nerovnice II. představuje polorovinu s hraniční přímkou $x-y=1$, po úpravě $y=x-1$, která obsahuje bod [0,0].
Obě hraniční přímky vytáhneme plnou čarou, neboť patří do definičního oboru (protože podmínka $-1\leq x-y\leq 1$ obsahuje rovnost).
Definičním oborem zadané funkce je pak část roviny ve tvaru pásu, která je průnikem obou polorovin, viz Obrázek 4.4. ■



Obr. 4.4.

Příklad 4.5. Určete definiční obor funkce $f(x,y)=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$.

Řešení:
Z první odmocniny obdržíme podmínku $x+y\geq 0$, z druhé odmocniny podmínku $x-y\geq 0$. Obě podmínky vymezují v pravoúhlé soustavě souřadnic poloroviny s hraničními přímkami $x+y=0$ a $x-y=0$. První z obou přímek je osou 2. a 4. kvadrantu, druhá přímka je osou 1. a 3. kvadrantu. Opět zvolíme jeden vhodný bod a pomocí něj rozhodneme, která polorovina tvoří definiční obor. Protože definiční obor zadané funkce musí splňovat obě podmínky zároveň, je řešením ta část roviny, která je průnikem obou řešení (část roviny, v níž se nám obě šrafování překryjí). Výsledek je zobrazen na Obrázku 4.5. ■



Obr. 4.5.

4.2 DERIVACE FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

Nechť funkce $f(x, y)$ je funkcí dvou proměnných x a y. Derivaci funkce dvou proměnných podle jedné z nich nazýváme *parciální derivace*. Pro parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x respektive y užíváme následující značení:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad f_x'(x,y), \quad f_x' \text{ , respektive } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \quad f_y'(x,y), \quad f_y'$$

Definice parciálních derivací se zavádí obdobně jako derivace funkce jedné proměnné:

$$f_x'(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

$$f_y'(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

Při výpočtu parciální derivace podle x postupujeme tak, že y považujeme za konstantu (pouze ji opisujeme) a funkci $f(x, y)$ derivujeme podle x. Při výpočtu parciální derivace podle y postupujeme přesně opačně.

Příklad 4.6. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x,y) = x^2 y + 2y^3$.

Řešení:

Derivujeme nejprve podle x: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy$ a poté podle y: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + 6y^2$. ■

Příklad 4.7. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x,y) = x^2e^y + \ln(xy)$.

Řešení:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xe^y + \frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2e^y + \frac{x}{y} \blacksquare$$

Význam parciálních derivací spočívá v tom, že udávají změnu hodnoty funkce $f(x,y)$ spojenou se změnou (pouze) proměnné *x*, respektive (pouze) *y*. Ekonomický význam parciální derivace pro Cobb-Douglasovu produkční funkci je ilustrován v Kapitole 4.5.

Geometrický význam parciálních derivací je následující: Mějme funkci $z = f(x,y)$ definovanou na množině $M \subseteq R^2$. Každému bodu o souřadnicích $[x,y] \in M$ je tedy přiřazen bod *z*. Graf funkce $z = f(x,y)$ je dvojrozměrný objekt, který si můžeme představit jako „krajinu“ nad vodorovnou rovinou (viz Obr. 4.6). Souřadnice *z* má roli výšky nad touto rovinou. Při parciální derivaci podle *x* považujeme *y* za konstantu, což znamená, že vedeme (daným bodem *y*) svislý řez rovnoběžně s osou *x*, řezem získáme křivku závislosti *z* na *x*, a příslušná derivace udává sklon této křivky. Budeme-li měnit *y*, bude se samozřejmě tato křivka i její sklon změnit. Význam parciální derivace podle *y* je analogický.

4.3 DRUHÉ DERIVACE FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

První derivace funkce dvou proměnných můžeme znovu derivovat (pokud jsou druhé derivace definovány). Druhé parciální derivace značíme takto:

Druhá derivace podle *x*: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

Druhá derivace podle *y*: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Smíšená derivace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ respektive $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

U smíšené derivace nezáleží na pořadí derivovaní, platí tedy: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Příklad 4.8. Vypočtěte druhé parciální derivace funkce $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 5$.

Řešení:

Nejprve vypočteme první derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6x$$

A poté druhé derivace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6$$

Smíšené derivace se samozřejmě rovnají. ■

Důležitost prvních a druhých parciálních derivací spočívá v tom, že pomocí nich můžeme určit extrémy (maxima a minima funkce), což má značný ekonomický význam. Proto je této problematice věnována celá následující Kapitola 5.

4.4 COBB-DOUGLASOVA PRODUKČNÍ FUNKCE

Cobb-Douglasova[1] produkční funkce udává závislost produkce Q na práci L a kapitálu K:

$$Q = AK^a L^b \tag{4.1}$$

Ve vztahu (4.1) jsou A, a, b kladné konstanty. Konstanta A souvisí s technologickým pokrokem: při stejném K a L vyšší A znamená, že je produkce vyšší (ze stejného množství kapitálu a práce se vyprodukuje více díky efektivnějším technologiím). Konstanty musí být určeny empiricky (výzkumem). Podle hodnoty $a + b$ říkáme o produkční funkci, že má:

- konstantní výnosy z rozsahu, je-li $a + b = 1$
- rostoucí výnosy z rozsahu, je-li $a + b > 1$
- klesající výnosy z rozsahu, je-li $a + b < 1$.

Předchozí tři body si vysvětlíme pomocí vztahu (4.1). Nechť se kapitál K zvýší p krát na pK a práce L se zvýší rovněž p krát na pL. Potom dosazením do (4.1) dostaneme:

$$Q = A(pK)^a \cdot (pL)^b = Ap^a K^a p^b L^b = p^{a+b} \cdot AK^a L^b$$

Jestliže se tedy zvýší vstupy – práce a kapitál – p krát, potom se zvýší výstup, tedy produkce, p^{a+b} krát. Jestliže je $a + b = 1$, pak při p násobném zvýšení vstupů (například dvojnásobnému) dojde k stejnému p násobnému (v naše příkladě tedy dvojnásobnému) zvýšení výstupů. Pro $a + b > 1$ by při dvojnásobném zvýšení vstupů byl výstup více než dvojnásobný, zatímco v případě $a + b < 1$ méně než dvojnásobný. Ve druhém případě tedy je výhodné produkci zvyšovat navyšováním práce a kapitálu, zatímco ve třetím případě ne.

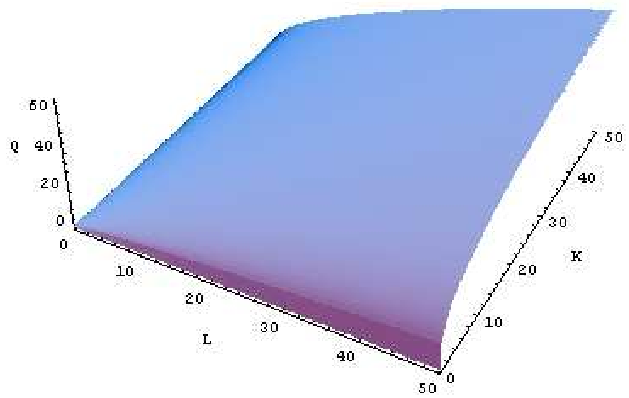
Pokud je $a + b = 1$, lze vztah (4.1) upravit následovně:

$$Q = AK^a L^{1-a} \tag{4.2}$$

Grafické znázornění Cobb-Douglasovy funkce viz Obr. 4.6.

Kromě Cobb-Douglasovy funkce se v literatuře používají i jiné produkční funkce, např. Leontiefova funkce (viz Chiang, 2008).

[1] Charles Cobb (1875-1949), americký ekonom, Poul Douglas (1892-1976), americký ekonom.



Obr. 4.6. Graf Cobb-Douglasovy funkce. Zdroj: Wikipedia.

4.5 MEZNÍ PRODUKT PRÁCE A KAPITÁLU

Derivacemi produkční funkce podle práce respektive kapitálu získáme **mezní produkt práce MP_L** respektive **mezní produkt kapitálu MP_K**:

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L}, \text{ resp. } MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \qquad (4.3)$$

Pokud je produkční funkce dána rovnicí (1), pak pro mezní produkt práce respektive mezní produkt kapitálu dostaneme:

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = AK^a(1-a)L^{-a} = \frac{A}{1-a}\left(\frac{K}{L}\right)^a$$

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = AaK^{a-1}L^{1-a} = Aa\left(\frac{K}{L}\right)^{a-1}$$

Příklad 4.9. Je dána Cobb-Douglasova funkce $Q = 80K^{0,3}L^{0,7}$. Určete:
a) mezní produkt práce a kapitálu,
b) mezní produkt práce pro K = 100 a L = 50.

Řešení:

a) $MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 80K^{0,3}0,7L^{-0,3} = 56\frac{K^{0,3}}{L^{0,3}} = 56\left(\frac{K}{L}\right)^{0,3}$

$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = 80 \cdot 0,3 \cdot K^{-0,7} \cdot L^{0,7} = 24\left(\frac{L}{K}\right)^{0,7}$

b) $MP_L = 56\left(\frac{100}{50}\right)^{0,3} = 56 \cdot 2^{0,3} = 68,94.$

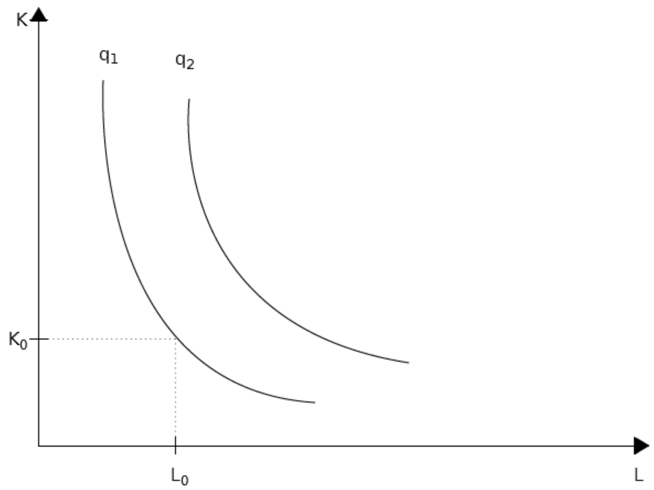
Tento výsledek můžeme interpretovat takto: pokud při produkci s hodnotami K = 100 a L = 50 zvýšíme L o jednotku, tedy na 51, zvýší se produkce o přibližně 69 jednotek. ■

4.6 IZOKVANTY PRODUKČNÍ FUNKCE

Všechny dvojice $[L,K]$, pro něž nabývá produkční funkce stejné (kladné) hodnoty q tvoří v rovině indiferenční křivku zvanou **izokvanta** s rovnicí $q = AK^a L^b$

Na této křivce najdeme všechny kombinace vstupů K a L, pro které je výstup Q shodný. Stejné produkce totiž můžeme dosáhnout například při práci 10 jednotek a kapitálu 5 jednotek, respektive například při práci 8 jednotek a kapitálu 9 jednotek, atd.

Izokvanty pro Cobb-Douglasovy funkce mají typický tvar (viz Obr. 4.7) klesající konvexní funkce.



Obr. 4.7. Typický tvar izokvant Cobb-Douglasovy funkce.

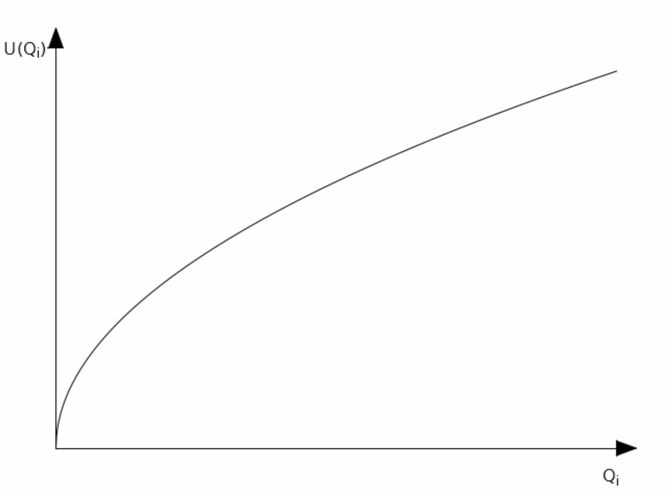
4.7 FUNKCE UŽITKU, MEZNÍ UŽITEK

Mějme n druhů zboží, jejichž množství buď Q_1, Q_2, …, Q_n. Spotřebitel *preferuje* některé zboží nebo skupiny zboží před jinými. Jinými slovy, různé zboží nebo skupiny zboží má pro spotřebitele různou užitečnost. Předpokládejme, že spotřebitel je schopen přiřadit každé skupině zboží jednu hodnotu, která vyjadřuje *užitečnost* (*užitek*) dané skupiny zboží. Tato hodnota sama o sobě nemá význam ani jednotku, ale slouží k porovnání užitečnosti různých skupin zboží. Zmíněné přiřazení nazýváme *funkce užitečnosti* (*utility fiction*), a zapisujeme:

$$U(Q_1, Q_2, ..., Q_n)$$

V dalším výkladu se omezíme pouze na funkce užitečnosti dvou proměnných.

Funkce užitku má následující matematické vlastnosti: její graf začíná v bodě 0, funkce je rostoucí a konkávní, což znamená, že se její růst (sklon) postupně zmenšuje, viz Obr. 4.8. Konkávnost funkce užitku vyjadřuje *zákon klesajícího mezního užitku*: se spotřebou dalšího množství zboží se užitek spotřebitele zvyšuje stále méně.



Obr. 4.8. Obvyklý tvar funkce užitku.

Příklad 4.10. Je dána funkce užitečnosti pro dva druhy zboží $U(Q_1, Q_2) = Q_1\sqrt{Q_2}$. Zjistěte, zda je spotřebitelem preferován stav $Q_1 = 10$, $Q_2 = 5$ nebo $Q_1 = 7$, $Q_2 = 8$.

Řešení:
Vypočteme funkci užitku pro oba případy:
$U(10,5) = 10 \cdot \sqrt{5} = 22,36$, $U(10,5) = 7 \cdot \sqrt{8} = 19,80$.
Pro spotřebitele má větší užitečnost druhá skupina zboží, tu preferuje před první. Hodnoty 22,36 respektive 19,80 nemají význam samy o sobě, slouží pouze k porovnání užitku obou možností. ■

Mezní užitečnost (*užitek*) (*marginal utility*) MU_1 (MU_2) zboží Q_1 (Q_2) se vypočte jako parciální derivace U podle Q_1 (Q_2):

$$MU_1 = \frac{\partial U(Q_1, Q_2)}{\partial Q_1}, \text{ resp. } MU_2 = \frac{\partial U(Q_1, Q_2)}{\partial Q_2}$$

Mezní užitek vyjadřuje přírůstek funkce užitku U připadající na jednotkovou změnu zboží Q.

Příklad 4.11. Vypočtěte mezní užitečnost MU_1 a MU_2 pro funkci $U = Q_1^{0,5} \cdot Q_2^{0,2}$:
a) obecně,
b) pro $Q_1 = 10$ a $Q_2 = 8$.

Řešení:

a) $MU_1 = \dfrac{\partial U}{\partial Q_1} = 0{,}5Q_1^{-0,5} \cdot Q_1^{0,2}$

$MU_2 = \dfrac{\partial U}{\partial Q_2} = 0,2Q_1^{0,5} \cdot Q_1^{-0,8}$

b) Dosadíme zadané hodnoty:

$MU_1(10,8) = \dfrac{\partial U}{\partial Q_1} = 0,5 \cdot 10^{-0,5} \cdot 8^{0,2} = 0,240$

$MU_2(10,8) = \dfrac{\partial U}{\partial Q_2} = 0,2 \cdot 10^{0,5} \cdot 8^{-0,8} = 0,120$.

Výsledek můžeme interpretovat tak, že pro zadané hodnoty Q_1 a Q_2 roste užitek dvakrát rychleji při jednotkové změně množství Q_1. ■

Příklad 4.12. Pan Tomáš má k dispozici důchod 200 jednotek (například eur). Může si za ně koupit dva statky, které mají cenu $P_1 = 4$ a $P_2 = 2$ jednotky. Funkce užitku U pana Tomáše je dána takto: $U(Q_1, Q_2) = Q_1 \cdot Q_2$, kde Q_1 je množství prvního statku a Q_2 je množství druhého statku. Užitek pana Tomáše je tedy přímo úměrný množství každého z obou statků. Jaké množství statků má pan Tomáš koupit tak, aby maximalizoval svůj užitek a přitom utratil veškerý důchod?

Řešení:

máme tedy maximalizovat funkci $U(Q_1, Q_2) = Q_1 \cdot Q_2$ za podmínky $4Q_1 + 2Q_2 = 200$.

Z podmínky vyjádříme například Q_1: $Q_1 = 50 - \dfrac{Q_2}{2}$, a dosadíme do U:

$$U = \left(50 - \frac{Q_2}{2}\right) \cdot Q_2 = -\frac{Q_2^2}{2} + 50Q_2 .$$

Maximum funkce U opět hledáme pomocí první derivace, vyjde $Q_2 = 50$, a poté $Q_1 = 25$. Podmínku maxima můžeme ověřit opět druhou derivací. ■

4.8 TEČNÁ ROVINA A NORMÁLA

Ke grafu funkce jedné proměnné můžeme vést daným bodem tečnu, která má směrnici rovnu derivaci této funkce v zadaném bodě (například můžeme vést tečnu ke grafu funkce $y = x^2$ v bodě $x = 3$). Analogicky lze ke grafu funkce dvou proměnných (což je obecně plocha v trojrozměrném prostoru) najít tečnou rovinu v daném bodě (například ke grafu ve tvaru polokoule lze jistě „přiložit“ tečnou rovinu ve vhodném bodě).

Než si ukážeme, jak najít rovnici tečné roviny ke grafu funkce dvou proměnných, zopakujeme, že rovnice roviny má tvar $ax + by + cz + d = 0$, kde a, b, c a d jsou reálná čísla (konstanty).

Vektor $\vec{n} = (a, b, c)$ nazýváme *normálový*, jeho směr je kolmý k rovině (*normálový* znamená kolmý). Normála je přímka kolmá k rovině, procházející daným bodem $C[x_0, y_0, z_0]$.

Nechť funkce $f(x, y)$ má v bodě $C[x_0, y_0, z_0]$ obě parciální derivace. Pak rovnice tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $C[x_0, y_0, z_0]$ má tvar:

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(C) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(C) \cdot (y - y_0) \qquad (4.4)$$

Normálový vektor:

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(C), \frac{\partial f}{\partial y}(C), -1\right)$$

A normála (v parametrickém tvaru):

$$x = x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(C)\cdot t$$
$$y = y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(C)\cdot t\,,\; t\in R \qquad (4.5)$$
$$z = z_0 - t$$

Příklad 4.13. Je dána funkce $f(x,y)=x^3+xy^2$.
a) Najděte rovnici tečné roviny ke grafu této funkce v bodě C [2,1,?].
b) Určete normálu k této rovině v daném bodě.

Řešení:
a) Nejprve určíme z-tou souřadnici bodu C (z_0) z předpisu dané funkce:
$z = f(x,y) = 2^3 + 2\cdot 1^2 = 10$.
Dále vypočteme parciální derivace podle x a y:
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + y^2$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2xy$
Nyní do obou derivací dosadíme souřadnice bodu C:
$\frac{\partial f}{\partial x}(C) = 3\cdot 2^2 + 1^2 = 13$, $\frac{\partial f}{\partial y}(C) = 2\cdot 2\cdot 1 = 4$,
A můžeme psát rovnici tečné roviny podle (4.4):
$z = 10 + 13\cdot(x-2) + 4\cdot(y-1)$
Roznásobíme závorky:
$z = 10 + 13x - 26 + 4y - 4$
A nakonec převedeme všechny členy na levou stranu rovnice, čímž získáme rovnici tečné roviny v obecném tvaru:
$13x + 4y - z - 20 = 0$

b) Z rovnice tečné roviny v předchozím bodě vyčteme normálový vektor: $\vec{n} = (13,4,-1)$. Nyní už můžeme psát rovnici normály v parametrickém vyjádření dle (4.5):
$x = 2 + 13t$
$y = 1 + 4t, t\in R$
$z = 10 - t$
Můžete si všimnout, že první sloupec na pravé straně tvoří souřadnice bodu C, a druhý sloupec souřadnice normálového vektoru $\vec{n} = (13,4,-1)$ vynásobeného parametrem t. ■

4.9 Totální diferenciál funkce dvou proměnných

Totálním diferenciálem (prvního řádu) funkce dvou proměnných $f(x,y)$ v bodě $C = [c_1, c_2, c_3]$ nazýváme výraz:

$$df(C) = \frac{\partial f}{\partial x}(C)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(C)dy\,, \qquad (4.6)$$

pokud obě parciální derivace v bodě C existují.

Stejně jako u funkce jedné proměnné vyjadřuje totální diferenciál dvou proměnných (přibližně) přírůstek funkce $f(x,y)$ spojený s malým přírůstkem proměnné x (první člen na pravé straně vztahu 4.6) a malým proměnné y (druhý člen na pravé straně vztahu 4.6). Geometricky si to můžeme představit tak, že v daném bodě C, v němž chceme zjistit přírůstek funkce $f(x,y)$, vedeme ke grafu této funkce tečnou rovinu, a přírůstek funkce zjistíme na této rovině.

Příklad 4.14. Je dána funkce $f(x,y)=3x^2+5xy+y$, bod C [1,1,9] a dx = 0,1, dy = 0,2. Určete:
a) totální diferenciál funkce,
b) přírůstek funkce v bodě C pro dané hodnoty dx a dy.

Řešení:
a) Vypočteme obě parciální derivace a dosadíme do (4.6): $df=(6x+5y)dx+(5x+1)dy$.
b) Dosadíme zadané hodnoty:
$df(C)=(6+5)dx+(5+1)dy=11dx+6dy=1{,}1+1{,}2=2{,}3$.
Výsledek b) interpretujeme takto: při zvětšení hodnoty x o 0,1 jednotky a hodnoty y o 0,2 jednotky v bodě [1,1,9] se hodnota dané funkce (celkově) zvýší o 2,3 jednotky.
■

Totální diferenciál dvou proměnných je obecně opět funkce dvou proměnných. U této funkce můžeme opět vyjádřit její totální diferenciál, čímž obdržíme totální diferenciál druhého řádu. Mějme funkci $f(x,y)$, která má v bodě C všechny parciální derivace druhého řádu. *Totálním diferenciálem druhého řádu* nazýváme výraz:

$$d^2f(C,dx,dy)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C)d^2x+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(C)dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C)d^2y \qquad (4.7)$$

Totální diferenciál druhého řádu (4.7) vyjadřuje (přibližně) „přírůstek přírůstku“ funkce. Lze jej využít k hledání maxima a minima funkce dvou (a více) proměnných, viz Kapitola 5. Analogicky lze definovat totální diferenciály řádu třetího a vyššího, touto problematikou se však již zabývat nebudeme.

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1. Určete definiční obor funkce dvou proměnných:
a) $f(x,y)=\sqrt{2x-y+3}$
[Polorovina s hraniční přímkou $2x-y+3=0$ obsahující bod [0,0], včetně hraniční přímky]
b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}+\frac{1}{x}$
[Vnější oblast kružnice se středem v bodě [0,0] a poloměrem 2 jednotky, včetně této kružnice.]
c) $f(x,y)=\arccos(3-x)$
[Svislý pás ohraničený přímkami x = 2 a x = 4, včetně těchto přímek.]
d) $f(x,y)=\arcsin(x+y)$
[Část rovina mezi přímkami $y=-x+1$ a $y=-x-1$, včetně těchto přímek.]

e) $f(x,y)=\log\left(y^2+x\right)$

[Vnitřní oblast paraboly s vrcholem v bodě [0,0] a orientovanou v kladném směru osy *x*.]

f) $f(x,y)=\sqrt{x-y+1}+\sqrt{x+y+1}$

[Část roviny vymezená přímkami $y=-x-1$ a $y=x+1$ obsahující bod [0,0].]

g $f\left(x,y\right)=\sqrt{-x^2+2x-y^2-8y-8}$

[Vnitřní část kružnice se středem v bodě [1,–4] a poloměrem 3 jednotky, vč. této kružnice.]

h) $f\left(x,y\right)=\ln\left(x^2-4y\right)$

[Část roviny pod parabolou $y=\frac{x^2}{4}$, bez této paraboly.]

i) $f\left(x,y\right)=\ln\left(2x+y-1\right)$

[Polorovina s hraniční přímkou $y=-2x+1$ neobsahující bod [0,0].]

j) $f\left(x,y\right)=x+\arccos y$

[vodorovný pás mezi $y = 1$ a $y = -1$, včetně hraničních přímek.]

k) $f\left(x,y\right) = \frac{5}{x-y}+\frac{x}{y}$

[Celá rovina bez dvou přímek: $y = 0$ a $y = x$.]

l) $f\left(x,y\right)=\sqrt{x+y}+\sqrt{y-3}$

[Část roviny sevřená (nad) přímkami $y = -x$ a $y = 3$.]

m) $f(x,y)=\frac{\ln(xy^2)}{x-y}$

[Pravá polorovina soustavy souřadnic bez přímek $y = x$ a $x = 0$.]

2. Vypočtěte první parciální derivace následujících funkcí:

a) $f(x,y)=x^2+y^2$

[$\frac{\partial f}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2y$]

b) $f(x,y)=x^2y^3+5x+y-1$

[$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^3+5$, $\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2y^2+1$]

c) $f(x,y)=\ln(xy)+\frac{5}{x}$

[$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{y}$]

d) $f(x,y)=e^{x+y}$

[$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x+y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=e^{x+y}$]

e) $f(x,y)=\ln\left(xy+y^4\right)$

[$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y}{xy+y^4}=\dfrac{1}{x+y^3}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x+4y^3}{xy+y^4}$]

f) $f(x,y)=yx^2+\cos y$

[$\dfrac{\partial f}{\partial x}=2xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2-\sin y$,]

g) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+5}$

[) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+5}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+5}}$,]

h) $f(x,y)=x\ln(y+x)$

[) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\ln(x+y)+\dfrac{x}{x+y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x}{x+y}$,]

i) $f(x,y)=arctg\,\dfrac{x}{y}$

[$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$]

3. Vypočtěte druhé parciální derivace funkcí:

a) $f(x,y)=5x^2+xy^3$

[$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=10$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6xy$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=3y^2$]

b) $f(x,y)=\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$

[$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0$]

4. Vypočtěte parciální derivace prvního a druhého řádu v bodě C:

a) $f(x,y)=x^2+5y^2+x$, $C\ [1,2]$

[$\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)=3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)=20$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)=2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)=10$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,2)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,2)=0$]

b) $f(x,y)=x^3y^2+y^2$, $C\ [-2,3]$

[$\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,3)=108$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-2,3)=-42$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,3)=-108$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,3)=-14$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-2,3)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(-2,3)=72$]

5. Vypočtěte parciální derivace Cobb-Douglasovy produkční funkce:

a) $Q=10K^{0,5}L^{0,5}$

[$\frac{\partial Q}{\partial K} = 5K^{-0,5}L^{0,5}, \frac{\partial Q}{\partial L} = 5K^{0,5}L^{-0,5}$]

b) $Q = 25K^{0,7}L^{0,3}$

[$\frac{\partial Q}{\partial K} = 17,5K^{-0,3}L^{0,3}, \frac{\partial Q}{\partial L} = 7,5K^{0,7}L^{-0,7}$]

6. Je dána Cobb-Douglasova produkční funkce: $Q = 6K^{0,4}L^{0,6}$. Určete a) mezní produkt práce a kapitálu pro K = 50 a L = 10.

[$\frac{\partial Q}{\partial K} = 2,4K^{-0,6}L^{0,6} = 2,4 \cdot 50^{-0,6} \cdot 10^{0,6} = 0,914$,

$\frac{\partial Q}{\partial L} = 3,6K^{0,4}L^{-0,4} = 3,6 \cdot 50^{0,4} \cdot 10^{-0,4} = 6,853$]

7. Načrtněte alespoň dvě izokvanty Cobb-Douglasovy produkční funkce: $Q = 2K^{0,5}L^{0,5}$ (zvolte například Q = 2 a Q = 4).

8. Je dána Cobb-Douglasova produkční funkce $Q(K, L) = 20K^{0,5} \cdot L^{0,5}$.

a) Určete parciální derivace podle K a L,

b) Vyjádřete totální diferenciál funkce Q ,

c) Určete totální diferenciál v bodě C [4,1],

d) Určete změnu Q v bodě C [4,1], jestliže dK = 0,2 a dL = 0,1.

[a) $\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{10\sqrt{L}}{\sqrt{K}}$, $\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{10\sqrt{K}}{\sqrt{L}}$, b) $dQ = \frac{10\sqrt{L}}{K}dK + \frac{10\sqrt{K}}{\sqrt{L}}dL$, c) $dQ = 5dK + 20dL$, d) $dQ = 3$]

9. Matematický model příjmu R (*revenue*) pro daný druh produktu jisté firmy je funkcí ceny p (*price*) a nákladů na reklamu A (*advertising expenditures*) (Kaňka a Henzler, 2003): $R = \frac{54\sqrt{A}}{\sqrt{p}}$. Určete:

a) změnu příjmu R v závislosti na změně ceny p.

b) změnu příjmu R v závislosti na změně nákladů na reklamu A.

c) Předpokládejme, že p = 9 a A = 64. Vyjádřete totální diferenciál a určete jeho hodnotu, jestliže dp = –0,4 a dA = 0,2.

[$\frac{\partial R}{\partial p} = -\frac{27\sqrt{A}}{\sqrt{p^3}}dp$, b) $\frac{\partial R}{\partial A} = \frac{27}{\sqrt{A}\sqrt{p}}dA$, c) $dR = -8dp + \frac{9}{8}dA = 3,425$]

10. Je dána funkce $f(x, y) = x^3y^2$.

a) Najděte rovnici tečné roviny ke grafu této funkce v bodě C [–2,2].

b) Určete normálu k této rovině v daném bodě.

[a) 48x – 32y – z + 128 = 0 , b) $\vec{n} = (48, -32, -1)$, normála: $\begin{aligned} x &= -2 + 48t \\ y &= 2 - 32t \\ z &= -32 - t \end{aligned}$, $t \in R$].

11. Vypočtěte mezní užitečnost MU_1 a MU_2 pro funkci $U = \sqrt{Q_1} \cdot \sqrt[3]{Q_1}$: a) obecně, b) pro $Q_1 = 9$ a $Q_2 = 8$.

12. Určete totální diferenciál funkce $f(x, y) = x^3 + 5xy$ obecně a v bodě C [–1,1].
[$df = \left(3x^2 + 5y\right)dx + 5xdy$, $df = 8dx - 5dy$].

5 LOKÁLNÍ A VÁZANÉ EXTRÉMY FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

V této kapitole se budeme zabývat hledáním extrémů funkce $f(x,y)$ dvou proměnných x a y. V ekonomii je typickým příkladem funkce dvou proměnných Cobb-Douglasova produkční funkce Q, která je funkcí kapitálu K a práce L.

5.1 LOKÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCE

Podobně jako u funkce jedné reálné proměnné je *nutnou podmínkou* lokálního (a samozřejmě i globálního) maxima či minima nulová první derivace: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$. Tato podmínka však není postačující, neboť v daném bodě může být i inflexní (sedlový) bod. Existenci maxima (minima) funkce při splnění určitých podmínek zaručuje následující věta:

***Věta 5.1** (Weierstrassova[2]). Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na uzavřené a omezené oblasti $M \subset R^2$. Pak funkce $f(x,y)$ nabývá na oblasti M (globálního) maxima i minima.*

Poznámka: Funkce může mít extrémy i v bodech, v nichž některá první parciální derivace neexistuje. Takové body se musí vyšetřit zvlášť a v dalším výkladu se jimi nebudeme zabývat.

Bod, v němž má funkce všechny první derivace nulové, se nazývá *stacionární bod* nebo též *bod podezřelý z extrému*, a bude značen C (z anglického *critical point*). Jak už bylo řečeno, je v tomto bodě maximum, minimum nebo inflexní bod. O tom, která alternativa nastává, rozhodneme na základě druhých parciálních derivací, z nichž sestavíme Hesseovu[3] matici a její determinant zvaný *hessián*:

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Do hessiánu dosadíme souřadnice bodu C a označíme: $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C)$ a $D_2 = H_f(C)$. D_2 je determinant Hesseovy matice. Pro určení extrému pak platí následující pravidlo:

- $D_2 > 0$: v bodě C je EXTRÉM, a to (lokální ostré) MINIMUM, pokud je $D_1 > 0$; a (lokální ostré) MAXIMUM, pokud je $D_1 < 0$.
- $D_2 < 0$: v bodě C je sedlo (inflexní bod).
- $D_2 = 0$: v daném bodě může (ale nemusí) být extrém, o extrému se musí rozhodnout jiným způsobem, například pomocí totálního diferenciálu druhého či vyššího řádu.

[2] Carl Weierstrass (1815-1897), německý matematik.
[3] Ludwig Otto Hesse (1811-1874), německý matematik.

Příklad 5.1. Určete lokální extrémy funkce: $f(x, y) = x^3 - 2xy$

Řešení:

Vypočteme první derivace: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2x$. Pro bod podezřelý z extrému musí platit, že obě první derivace jsou nulové:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2y = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x = 0,$$

Z druhé rovnice plyne, že $x = 0$, a dosazením do první rovnice získáme $y = 0$. Máme tedy podezřelý bod C [0,0]. Ke zjištění, o jaký bod se jedná, vypočteme druhé derivace a sestavíme hessián:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2, \ H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Do hessiánu dosadíme bod C: $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Protože $D_2 = -4$, což je menší hodnota než 0, je bod C inflexním (sedlovým) bodem. Daná funkce nemá žádné lokální maximum ani minimum. ■

Příklad 5.2. Určete lokální extrémy funkce: $f(x, y) = x^2 - 2xy + y$.

Řešení:

Vypočteme první derivace a položíme je rovny nule:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 1 = 0$$

Řešením této soustavy je bod C [1/2,1/2]. Ke zjištění, o jaký bod se jedná, vypočteme druhé derivace a sestavíme hessián:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Protože $D_2 = -4$, což je menší hodnota než 0, je bod C inflexním (sedlovým) bodem. Daná funkce nemá žádné lokální maximum ani minimum. ■

Příklad 5.3. Určete lokální extrémy funkce: $f(x,y) = 2x^4 + y^4$.

Řešení:
Vypočteme první derivace a položíme je rovny nule:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 = 0$$

Řešením této soustavy je bod C [0,0]. Vypočteme druhé derivace a sestavíme hessián:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 24x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}$. Dosadíme bod C do hessiánu: $H_f(\mathrm{C}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Protože $D_2 = 0$, podle pravidla uvedeného výše nelze o povaze stacionárního bodu rozhodnout. Přesto je snadné ukázat, že se v daném bodě nachází minimum. Funkce $f(x,y) = 2x^4 + y^4$ je nezáporná: ať do ní dosadíme jakékoli hodnoty x a y, vždy bude hodnota funkce větší nebo rovna nule (kvůli čtvrtým mocninám). Nula je tedy nejmenší hodnota, kterou daná funkce může nabývat. A toto minimum lze dosáhnout pouze pro $x = y = 0$, což je bod C. ■

Příklad 5.4. Určete lokální extrémy funkce: $f(x,y) = \ln(xy) - x^2 + y$.

Řešení:
Vypočteme první derivace a položíme je rovny nule:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{xy} \cdot y - 2x = \frac{1}{x} - 2x = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{xy} \cdot x + 1 = \frac{1}{y} + 1 = 0$$

Z první rovnice dostáváme:

$$\frac{1}{x} = 2x$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Z druhé rovnice dostaneme $y = -1$. Máme tedy dva kritické body: $C_1 = \left[+\sqrt{\frac{1}{2}}, -1\right]$ a $C_2 = \left[-\sqrt{\frac{1}{2}}, -1\right]$

Vypočteme druhé derivace a sestavíme hessián:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} - 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x^2} - 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{bmatrix}.$$

Dosadíme do hessiánu bod C_1:

$$H_f(\mathrm{C}) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Protože $D_2 = 4$, má funkce v bodě C_1 extrém. Protože je D_1 záporné (–4), jedná se o maximum. Snadno se ověří, že rovněž v bodě C_2 je maximum. ■

Příklad 5.5. Mějme dánu funkci $f(x, y)$, jejíž extrémy chceme zjistit, stacionární bod C [1,1] a Hesseovu matici $H_f(C) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Určete, zda bod C je maximem, minimem nebo inflexním bodem dané funkce.

Řešení:

Z pravidla o znaméncích determinantu D_2 na začátku kapitoly plyne, že pro $D_2 = 0$ neumíme o povaze stacionárního bodu rozhodnout.

K určení bodu C však můžeme využít totální diferenciál. Totální diferenciál prvního řádu $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$, který vyjadřuje přírůstek funkce $f(x, y)$, je v bodě C roven 0, neboť první parciální derivace jsou ve stacionárním bodě dle definice nulové. Zkusíme sestavit totální diferenciál druhého řádu:

$$d^2 f(C, dx, dy) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C) d^2 x + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(C) dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C) d^2 y,$$

kde všechny parciální derivace druhého řádu výše již jsou obsaženy (vypočteny) v Hesseově matici. Obdržíme tedy:

$$d^2 f(C, dx, dy) = 4d^2 x + 2 \cdot 0 dxdy + 0 d^2 y = 4d^2 x.$$

Totální diferenciál druhého řádu je tedy v bodě C vždy kladný ($4d^2x > 0$), což znamená, že při posunu z bodu x o dx se hodnoty funkce vždy *zvětší*, odkud logicky vyplývá, že v bodě C je minimum funkce. ■

5.2 VÁZANÉ EXTRÉMY

Vázané extrémy označují situaci, kdy kromě funkce $f(x,y)$ je ještě zadána *vazba* (omezující podmínka pro x a y) ve tvaru $g(x,y)=0$. Hledáme extrémy funkce $f(x,y)$, které jsou vázány (leží na ní) křivkou $g(x,y)=0$.

Budeme používat dvě metody:

a) *Dosazovací metoda*: z vazby $g(x,y)=0$ vyjádříme x nebo y a dosadíme do $f(x,y)$, čímž získáme funkci jedné proměnné, a extrémy tedy hledáme podobně jako u funkce jedné proměnné. Tuto metodu použijeme v případě, že z rovnice vazby lze osamostatnit x nebo y.

b) *Lagrangeova metoda*: sestavíme Lagrangeovu funkci $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, kde λ je Lagrangeův multiplikátor. Poté vypočteme parciální derivace L a položíme je rovny 0. Jako třetí rovnici pro tři neznámé x, y, λ použijeme rovnici vazby. Vyřešíme soustavu a výsledné „podezřelé“ body C dosadíme do hessiánu, pomocí kterého rozhodneme, zda se jedná o maximum, minimum nebo inflexní bod. Lagrangeova metoda je početně náročnější než dosazovací, za to je obecnější, a používá se v případech, kdy z rovnice vazby nelze osamostatnit ani x ani y.

Pro určení extrému platí následující pravidlo:

- $D_2 > 0$: v bodě C je EXTRÉM, a to (lokální ostré) MINIMUM, pokud je navíc $D_1 > 0$; a (lokální ostré) MAXIMUM, pokud je $D_1 < 0$.
- $D_2 \le 0$: o extrému se musí rozhodnout jiným způsobem.

U Lagrangeovy metody můžeme o charakteru kritického bodu C rozhodnout i bez hessiánu, pokud jsou splněny podmínky Věty 5.1, tedy pokud je funkce definovaná na omezené a uzavřené oblasti: spočteme hodnotu všech kritických bodů, a bod s největší (nejmenší) hodnotou bude vázaným maximem (minimem) dané funkce. Omezenou a uzavřenou oblastí může být například kružnice, elipsa, úsečka, apod.

Příklad 5.6. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y): x - y + 1 = 0$.

Řešení:

Z vazbové podmínky je možné osamostatnit y i x, proto použijeme dosazovací metodu:

Vyjádříme y: $y = x+1$ a dosadíme do funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$:

$f(x) = x^2 + (x+1)^2 = 2x^2 + 2x + 1$.

Dosazením jsme získali funkci jedné proměnné (x). Podezřelé body musí mít první derivaci nulovou:

$f'(x) = 4x + 2 = 0$.

odtud $x = -1/2$, $y = 1/2$.

Tento bod je minimem dané funkce, o čemž se můžeme přesvědčit druhou derivací funkce $f(x)$ (která vyjde kladná). ■

Příklad 5.7. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = x + y + 3$, $g(x,y): x^2 + y^2 - 2 = 0$.

Řešení:
Protože z rovnice vazby nelze jednoduše osamostatnit x ani y, budeme postupovat Lagrangeovou metodou. Sestavíme Lagrangeovu funkci:

$$L = x + y + 3 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 2\right)$$

Vypočteme první derivace podle x a y a položíme je rovny nule:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2 = 0$$

Obě derivace jsme doplnili o rovnici vazby a získali jsme tím soustavu tří rovnic o tří neznámých. Jejím řešením jsou body podezřelé z extrému s odpovídající hodnotou λ.
Z prvních dvou rovnic vidíme, že $x = y$ (rovnice jsou symetrické vzhledem k proměnným x a y). Dosadíme za y do třetí rovnice:

$$x^2 + x^2 - 2 = 0,$$

$$2x^2 = 2$$

$x_{1,2} = \pm 1$, a proto také $y_{1,2} = \pm 1$. Máme dva podezřelé body: $C_1 = [1,1], \lambda_1 = -\frac{1}{2}$ a $C_1 = [-1,-1]$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ (hodnotu λ vypočteme z první nebo druhé rovnice soustavy).

Vypočteme druhé derivace funkce L:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$$

Sestavíme hessián:

$$L_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{bmatrix}.$$

Dosadíme bod C_1: $L_f(C_1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Dostáváme: $D_2 = 1$, funkce má v bodě C_1 extrém. Protože je D_1 záporné (–1), má funkce v bodě C_1 maximum (jeho hodnota je 5).

Dosadíme bod C_2: $L_f(C_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Dostáváme: $D_2 = 1$, funkce má v bodě C_2 extrém. Protože je D_1 kladné (+1), má funkce v bodě C_2 minimum (jeho hodnota je 1).

Tato úloha má názornou geometrickou interpretaci. Funkce $f(x,y)=x+y+3$ představuje v trojrozměrném prostoru rovinu. Funkce $g(x,y): x^2+y^2-2=0$ představuje v dvojrozměrném prostoru kružnici, v trojrozměrném prostoru jde o válcovou plochu (představíme si, že kružnici „táhneme“ nahoru a dolů, čímž vznikne plocha válce). Průnik obou objektů je elipsa, která se zvedá „šikmo“ vzhůru, a proto má nejvyšší a nejnižší bod: maximum a minimum dané funkce. ■

Příklad 5.8. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y)=x^2+y^2$ s vazbou $g(x,y): x^2+2y^2-1=0$.

Řešení:

Protože z rovnice vazby nelze jednoduše osamostatnit *x* ani *y*, budeme postupovat Lagrangeovou metodou. Sestavíme Lagrangeovu funkci:

$$L = x^2+y^2+\lambda\left(x^2+2y^2-1\right)$$

Vypočteme první derivace podle *x* a *y* a položíme je rovny nule:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda x=2x(1+\lambda)=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=2y+4\lambda y=2y(1+2\lambda)=0$$

$$x^2+2y^2-1=0$$

Nyní najdeme řešení této soustavy tří rovnic o třech neznámých: body podezřelé z extrému.

Z první rovnice plyne, že buď *x* = 0 nebo $\lambda=-1$ (jeden z výrazů v součinu musí být roven nule).

I. Nejprve se budeme věnovat prvnímu případu, pro který platí, že *x* = 0. Je-li *x* = 0, dostáváme ze třetí rovnice postupně:

$$0^2+2y^2-1=0,$$

$$y^2=\frac{1}{2},$$

A nakonec: $y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Máme tedy dva podezřelé body: $C_1=\left[0,+\sqrt{\frac{1}{2}}\right]$ a $C_2=\left[0,-\sqrt{\frac{1}{2}}\right]$.

Ještě dopočítáme odpovídající hodnoty Lagrangeových multiplikátorů λ z druhé rovnice soustavy, nejprve pro bod C_1:

$2y(1+2\lambda)=2\sqrt{\frac{1}{2}}\left(1+2\lambda\right)=0$, odtud $\lambda_1=-\frac{1}{2}$.

A poté analogicky pro bod C_2:

$2y(1+2\lambda)=2\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(1+2\lambda\right)=0$, odtud rovněž $\lambda_2=-\frac{1}{2}$.

II. Nyní se budeme věnovat druhému případu, pro který platí, že λ = –1. Je-li λ = –1, dostáváme ze druhé rovnice soustavy *y* = 0 (první rovnici nevyužijeme, protože by v závorce vyšla 0). Ještě zbývá určit *x*. Ze třetí rovnice soustavy obdržíme:

$$x^2+2\cdot 0^2-1=0,$$

$x^2 = 1$,
a tedy $x_{3,4} = \pm 1$.

Získali jsme další dva podezřelé body: $C_3 = [1,0]$ a $C_4 = [-1,0]$, $\lambda_{3,4} = -1$.

Nakonec musíme rozhodnout o povaze všech čtyř podezřelých bodů, v tomto případě můžeme využít jak Větu 5.1., tak metodu hessiánu jako v předešlé úloze. Zde zvolíme první možnost: vypočteme hodnoty funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ ve všech čtyř bodech C_1 až C_4 (dosadíme souřadnice těchto bodů do dané funkce), a najdeme mezi nimi maximum a minimum.

$$f(C_1) = 0^2 + \left(+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$f(C_2) = 0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$f(C_3) = 1^2 + 0^2 = 1$$

$$f(C_4) = (-1)^2 + 0^2 = 1$$

Odtud je zřejmé, že v bodech C_1 a C_2 nastává vázané minimum funkce a v bodech C_3 a C_4 vázané maximum funkce.

Pokud bychom zvolili metodu hessiánu, obdrželi bychom hessián ve tvaru (ověřte si):

$$L_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2+2\lambda & 0 \\ 0 & 2+4\lambda \end{bmatrix},$$

Po dosazení bodů C_1 až C_4 však determinant $D_2 = 0$, a tedy o povaze těchto bodů nelze na základě hessiánu rozhodnout.

I tato úloha má názornou geometrickou interpretaci. Funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ představuje plochu rotačního paraboloidu (tělesa, které vznikne rotací paraboly kolem osy z), zatímco vazba $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ je v rovině elipsa se středem v bodě [0,0] a v trojrozměrném prostoru válcová plocha, která vznikne „vysunutím“ elipsy nahoru a dolů ve směru osy z. Body C_1 a C_2 jsou vedlejší vrcholy této elipsy a C_3 a C_4 jsou hlavní vrcholy. Protože hlavní vrcholy jsou více vzdáleny od středu elipsy, a funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ roste s rostoucí vzdáleností od středu, můžeme očekávat v hlavních vrcholech maxima a ve vedlejších vrcholech minima této funkce. A to nám také vyšlo.

■

5.3 MAXIMALIZACE PŘÍJMU A UŽITKU

Určování extrémů funkcí dvou (a více) proměnných lze v ekonomii využít při maximalizaci příjmů, produkce, užitku nebo zisku, respektive minimalizaci nákladů, pokud jmenované funkce závisí na více než jedné proměnné. S vázanými extrémy se v ekonomii setkáváme tehdy, pokud jsou na příjmy, náklady, užitek a podobně kladena nějaká omezení (obvykle finanční, množstevní, časová, atd.).

Při maximalizaci užitku se racionální spotřebitel snaží za daných podmínek a omezení užitečnost maximalizovat.

V modelu pro dva druhy zboží Q_1 a Q_2 s jednotkovými cenami zboží P_1 a P_2, a důchodem spotřebitele Y, je užitečnost omezena *rozpočtovým omezením*:

$$Y = P_1 \cdot Q_1 + P_2 \cdot Q_2 \qquad (5.1)$$

Maximalizovat užitek za podmínky (5.1) znamená řešit úlohu na vázaný extrém s funkcí $U = \left(Q_1, Q_2\right)$ a vazebnou podmínkou (5.1).

Analogicky lze přistupovat k maximalizaci příjmů a dalších ekonomických funkcí.

Příklad 5.9. Firma vyrábí dva druhy zboží, jejich množství označme Q_1 a Q_2. Příjem firmy je dán funkcí $TR(Q_1, Q_2) = 50Q_1 + 20Q_2 - 2Q_1^2 - 5Q_2^2$. Najděte maximum příjmu.

Řešení:

Začneme tím, že vypočteme parciální derivace TR podle Q_1 a Q_2:

$$\frac{\partial TR(Q_1, Q_2)}{\partial Q_1} = 50 - 4Q_1$$

$$\frac{\partial TR(Q_1, Q_2)}{\partial Q_2} = 20 - 10Q_2$$

Najdeme nulové body obou prvních derivací: $Q_1 = 12{,}5$; $Q_2 = 2$, a získáme stacionární bod $C[12{,}5; 2]$.

Vypočteme druhé parciální derivace příjmu a sestavíme Hesseovu matici:

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix},$$

Protože $D_2 = 40 > 0$, má funkce v bodě extrém. Protože $D_1 = -4 < 0$, jedná se o maximum. V bodě C bude zadaný příjem maximální. ■

Příklad 5.10 (Mezník, 2011). Je dána funkce užitečnosti $U = \left(Q_1, Q_2\right) = Q_1 Q_2$, jednotkové ceny zboží $P_1 = 2$ a $P_2 = 5$, a důchod $Y = 100$. Maximalizujte užitek za podmínky $100 = 2Q_1 + 5Q_2$.

Řešení:

Úlohu můžeme řešit dosazovací i Lagrangeovou metodou. Zde úlohu vyřešíme Lagrangeovou metodou, čtenář nechť si zkusí využít dosazovací metodu.

Sestavíme Lagrangeovu funkci $L = Q_1 \cdot Q_2 + \lambda\left(100 - 2Q_1 - 5Q_2\right)$

Vypočteme parciální derivace podle Q_1 a Q_2, položíme je rovny nule, a přidáme rovnici vazby:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_1} = Q_2 - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_2} = Q_1 - 5\lambda = 0$$

$$100 - 2Q_1 - 5Q_2 = 0$$

Z první a druhé rovnice vyjádříme Q_1 a Q_2 pomocí lambda a dosadíme do třetí rovnice:

$$100 - 10\lambda - 10\lambda = 0$$

Odtud máme postupně: $\lambda = 5$, $Q_1 = 25$, $Q_2 = 10$. Pro tyto hodnoty nabývá funkce užitku svého maxima: $U = 250$. ■

Příklad 5.11. Pan X může investovat do dvou statků, jejich množství je x a y. Funkce užitku pana X je dána jako $U = f(x, y) = 2x^2 y$. Jednotka statku x stojí 2 peněžní jednotky (například eura), statku y pak 3 peněžní jednotky. Zdroje pana X jsou omezené: celkově může vydat pouze 102 peněžní jednotky. Maximalizujte užitek pana X.

Řešení:

máme dánu funkci $f(x, y) = 2x^2 y$ a vazbu $g(x, y) = 2x + 3y = 102$. Rovnice vazby ($2x + 3y = 102$) představuje přímku, ale protože x ani y nemohou být v kontextu úlohy záporné, redukuje se vazbová podmínka na úsečku s krajními body [51, 0] a [0, 34] (jde o průsečíky dané přímky s osami x a y).

Podle Věty 5.1 tedy bude funkce $f(x, y) = 2x^2 y$ nabývat na této úsečce svého maxima i minima, a k určení extrémů nepotřebujeme druhé derivace ani hessián.

Ke zjištění extrémů použijeme dosazovací metodu: z rovnice vazby osamostatníme y: $y = \frac{102 - 2x}{3}$, a dosadíme do funkce užitku $f(x, y) = 2x^2 y$:

$$f(x) = 2x^2 \frac{102 - 2x}{3} = \frac{2}{3}\left(-2x^3 + 102x^2\right).$$

Body podezřelé z extrému mají první derivaci nulovou:

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(-6x^2 + 204x\right) = 0,$$

Rovnici upravíme na součinový tvar: $f'(x) = \left(-6x^2 + 204x\right) = -6x(x - 34) = 0$

Z poslední rovnosti plynou dvě řešení $x_1 = 0$ a $x_2 = 34$. Odpovídající hodnoty y vypočteme ze vztahu $y = \frac{102 - 2x}{3}$.

Tím získáme dva podezřelé body: C_1 [0, 34] a C_2 [34, 34/3].

Funkce užitku pro první bod: $f(x, y) = 2x^2 y = 2 \cdot 0 \cdot 34 = 0$.

Funkce užitku pro druhý bod: $f(x, y) = 2x^2 y = 2 \cdot 34 \cdot 34 / 3 = 770{,}7$.

Bod C_1 [0, 34], pro který je užitek nulový, je tedy vázaným minimem dané funkce, a bod C_2 [34, 34/3] je vázaným maximem dané funkce. ■

Pokud bychom tuto úlohu řešili pomocí Lagrangeovy metody, získali bychom i hodnoty Lagrangeova multiplikátoru λ, pro které platí: $\lambda_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{p_1}$, $\lambda_2 = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{p_2}$, kde p_1 a p_2 označují cenu za jednotku statku x a y. Proto je v ekonomii multiplikátor λ interpretován jako mezní *užitek peněz* (*marginal utility of money*).

5.4 MINIMALIZACE NÁKLADŮ

Podobně jako bylo v předchozí kapitole hledáno maximum funkce příjmu respektive užitku, je u funkce nákladů rozumné hledat její minimum. Postupujeme přitom stejně jako v předchozích úlohách, hledáme tedy extrém funkce, který se při správné formulaci úlohy ukáže být minimem.

Příklad 5.12. Jsou dány celkové náklady dvou proměnných:
$TC(x,y) = 200 - 30x - 40y + 0,5x^2 + y^2$. Najděte minimum nákladů.

Řešení:
Vypočteme parciální derivace funkce $TC(x,y)$ podle x a y a položíme je rovny nule:

$$\frac{\partial TC}{\partial x} = -30 + x = 0,$$

$$\frac{\partial TC}{\partial y} = -40 + 2y = 0.$$

Bod podezřelý z extrému je tedy C [30,20]. Dále vypočteme druhé parciální derivace a sestavíme Hesseovu matici:

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

V Hesseově matici jsou obsaženy pouze konstanty, proto do ní nedosazujeme souřadnice bodu C. Protože $D_2 = 2 > 0$, má funkce v bodě C extrém. Protože $D_1 = 1 > 0$, má daná funkce v bodě C minimum. ■

Příklad 5.13. Jsou dány celkové náklady: $TC(x,y) = 100 - 32x - 30y + x^4 + 3y^2$.
Najděte minimum nákladů.

Řešení:
Vypočteme parciální derivace funkce $TC(x,y)$ podle x a y a položíme je rovny nule:

$$\frac{\partial TC}{\partial x} = -32 + 4x^3 = 0,$$

$$\frac{\partial TC}{\partial y} = -30 + 6y = 0.$$

Bod podezřelý z extrému je tedy C [2,5]. Dále vypočteme druhé parciální derivace a sestavíme Hesseovu matici:

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Dosadíme bod C:

$$H_f(\mathrm{C}) = \begin{bmatrix} 48 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Protože $D_2 = 288 > 0$, má funkce v bodě C extrém. Protože $D_1 = 48 > 0$, má daná funkce v bodě C minimum. ■

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1.) Najděte lokální extrémy (inflexní body) funkce:

a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 6x + 8$

[minimum [3,0].]

b) $f(x,y) = x^3 - xy + y$

[inflexní bod [1,3].]

c) $f(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$

[maximum [0,0].]

d) $f(x,y) = y - \frac{x^3}{3} + \ln(x-y)$

[inflexní bod [2,7/4].]

e) $f(x,y) = e^{xy}$

[inflexní bod [0,0].]

f) $f(x,y) = (x-3)^2 \cdot (y+2)^2$

[minimum [3,2].]

2.) Určete vázané extrémy funkce:

a) $f(x,y) = xy$, $g(x,y): x + y + 2 = 0$

[maximum [–1, –1].]

b) $f(x,y) = 2x + y - 1$, $g(x,y): x^2 + y^2 - 4 = 0$

[maximum $\left[\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right]$, minimum $\left[-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$.]

c) $f(x,y) = x^4 - 2y^2$, $g(x,y): 2x - y = 0$

[minimum [–2, –4] a [2,4], maximum [0,0].]

d) $f(x,y) = e^{x+y}$, $g(x,y): x^2 + y^2 - 1 = 0$

[minimum [–1/2, –2].]

e) $f(x,y) = x^2 + y^2$, vazba: úsečka s krajními body [4,0] a [0,4].

[minimum [2,2], maximum je v krajních bodech: [4,0] a [0,4].]

3.) Maximalizujte příjem $TR = x^2 - 2xy$ za podmínky $x - y = 100$.

[maximum: $x = 100$]

4.) Je dána funkce užitku $U = (Q_1, Q_2) = \sqrt{Q_1 \cdot Q_2}$, jednotkové ceny zboží $P_1 = 5$ a $P_2 = 10$ a disponibilní důchod $Y = 400$. Najděte maximum užitku.

[maximum: $Q_1 = 40, Q_2 = 20$]

5.) Najděte minimum nákladů $TC(x,y) = 60 - 120x - 80y + 2x^2 + 0,4y^2$.

[minimum: $x = 30, y = 100$]

6 NEURČITÝ INTEGRÁL

6.1 POJEM NEURČITÉHO INTEGRÁLU, ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

Funkce $F(x)$ se nazývá *primitivní funkcí* k funkci $f(x)$ na otevřeném intervalu $J \subseteq R$ právě tehdy, když $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in J$. Primitivní funkce existuje ke každé spojité funkci na J.

Hledání primitivní funkce se označuje jako *integrování*, což je proces opačný k derivování, viz schéma na Obrázku 6.1.

$$2x \; \underset{\text{derivování}}{\overset{\text{integrování}}{\rightleftarrows}} \; x^2$$

Obr. 6.1.

Příklad 6.1. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = 2x$.

Řešení:

primitivní funkcí je funkce $F(x) = x^2$, ale také další funkce: $G(x) = x^2 + 1$, $H(x) = x^2 - 10$, atd., protože derivace konstanty za členem x^2 je nula. ■

Výsledek Příkladu 6.1. můžeme zobecnit: Primitivních funkcí k dané funkci je nekonečně mnoho, a vzájemně se liší o jistou konstantu, kterou označíme C. Množina všech primitivních funkcí k dané funkci $f(x)$ se označuje jako *neurčitý integrál* k funkci $f(x)$, a značí se takto:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

kde $\int$ je integrační znak,

x integrační proměnná,

$f(x)$ integrovaná funkce neboli integrand,

$F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$,

C integrační konstanta.

Neurčitý integrál je lineární operátor, což znamená, že splňuje následující dvě podmínky:

i) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$,

ii) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Podmínka i) znamená, že konstantu v integrandu je možné „vytknout“ před integrál, zatímco podmínka ii) nám umožňuje integrovat součet nebo rozdíl funkcí „člen po členu“.

V následující tabulce jsou uvedeny nejpoužívanější integrály (primitivní funkce plus integrační konstanta). Tyto vzorce platí na průniku definičního oboru dané a primitivní funkce.

Tabulka 6.1. Základní integrály.

řádek	$f(x)$	$\int f(x)dx$
1	0	C
2	1	x + C
3	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ + C
4	e^x	e^x + C
5	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$ + C
6	$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+C$
7	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$ + C
8	sin$x$	–cos$x$ + C
9	cos$x$	sin$x$ + C
10	$\frac{1}{\cos^2 x}$	tg$x$ + C
11	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	cotg$x$ + C
12	$\frac{1}{1+x^2}$	arctg$x$ + C
13	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$
14	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arcsin$x$ + C
15	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arccos$x$ + C
16	$\frac{1}{\sqrt{1\pm x^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{1\pm x^2}\right\rvert$ + C

V následujících úlohách si ukážeme integraci základních funkcí.

Příklad 6.2. Integrujte:

a) $\int x^2dx = \frac{x^3}{3}+C$.

b) $\int\left(x^3+2x^2+6x+1\right)dx$.

c) $\int\sqrt[3]{x}dx$.

d) $\int \frac{1}{x^3}dx$.

e) $\int \left(2x+\frac{5}{x}\right)dx$.

f) $\int \left(5\sin x-2\cos x+3^x\right)dx$.

g) $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$

h) $\int \frac{1}{x^2+4x+8}dx$.

Řešení:

a) $\int x^2dx = \frac{x^3}{3}+C$.

Pokud integrujeme mocninu, používáme 3. řádek tabulky výše. Mnemotechnická pomůcka při řešení: „exponent zvětši o 1, novým exponentem vyděl, a napiš + *C*“.

b) $\int \left(x^3+2x^2+6x+1\right)dx$.

Nyní použijeme pravidla i) a ii) výše a opět vzorec pro integraci mocniny:

$$\int \left(x^3+2x^2+6x+1\right)dx=\int x^3dx+2\int x^2dx+6\int xdx+\int 1dx=\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}+x+C.$$

(U třetího členu si ještě proveďte krácení).

c) $\int \sqrt[3]{x}dx$.

Při integraci výrazu s odmocninou nejprve převedeme odmocninu na mocninu s racionálním (zlomkovým) exponentem: $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ a integrujeme opět jako mocninu:

$$\int \sqrt[3]{x}dx=\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}=\frac{3\sqrt[4]{x^3}}{4}+C.$$

d) $\int \frac{1}{x^3}dx$.

Výraz $\frac{1}{x^3}$ převedeme na x^{-3} a integrujeme opět jako mocninu:

$$\int \frac{1}{x^3}dx=\int x^{-3}dx=\frac{x^{-4}}{(-4)}=-\frac{1}{4x^4}+C$$

e) $\int \left(2x+\frac{5}{x}\right)dx$.

Integrál rozdělíme na dva, pro první použijeme pravidlo o derivaci mocniny (3. řádek), a pro druhý integrál 5. řádek tabulky: $\int \left(2x+\frac{5}{x}\right)dx=x^2+5\ln|x|+C$

f) $\int \left(5\sin x-2\cos x+3^x\right)dx$.

Využijeme vzorce na řádcích 4, 8 a 9 Tabulky 6.1:

$$\int \left(5\sin x-2\cos x+3^x\right)dx=-5\cos x-2\sin x+\frac{3^x}{\ln 3}+C.$$

g)

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{\left(x^2+1\right)-1}{x^2+1}dx = \int \frac{\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = \int 1dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = x - arctgx + C\,.$$

Při této integraci jsme ve druhém kroku použili „trik“: přičtení a odečtení 1, aby se integrál rozdělil na dvě jednodušší části. Využili jsme pak řádek 12 Tabulky 6.1.

h) $\int \frac{1}{x^2+4x+8}dx$

Tento zlomek nelze rozložit na parciální zlomky (viz následující kapitola, diskriminant kvadratického trojčlenu ve jmenovateli je totiž záporný), a v takovém případě vede integrál na funkci arctg$x$, viz Tabulka 6.1, řádek 13. Kvadratický trojčlen upravujeme tak, aby měl podobu x^2+a^2, kde místo x může být i závorka, viz níže.

$$\int \frac{1}{x^2+4x+8}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+4}dx = \frac{1}{2}arctg\frac{(x+2)}{2} + C \quad \blacksquare$$

Poznámka: O správnosti integrace se můžeme snadno přesvědčit tak, že výsledek (napravo od „=“) zderivujeme a musíme získat výraz uvnitř integrálu (výraz vlevo od „=“).

V následujících kapitolách budou vysvětleny některé integrační metody k řešení složitějších integrálů.

6.2 Integrace racionálních funkcí (metoda parciálních zlomků)

Racionální funkcí rozumíme výraz $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P(x) a Q(x) jsou polynomy proměnné x. (Jsou to zlomky obsahujících integrační proměnnou v čitateli i jmenovateli).

V dalším textu budeme předpokládat, že stupeň polynomu $P(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$. Takové racionální funkce se nazývají *ryzí*. Pokud by tato podmínka nebyla splněna, provedeme dělení polynomu $P(x)$ polynomem Q(x), čímž získáme požadovanou ryzí racionální funkci. K integraci (ryzích) racionálních funkcí ve využívá metoda rozkladu na *parciální zlomky*. Smyslem této metody je rozložit zadanou (a obvykle složitou) racionální funkci na součet „nejjednodušších“ (*parciální* znamená „částečný“) zlomků.

Příklad 6.3. Vypočtěte $\int \frac{7x-9}{(x+3)(x-2)}dx$.

Řešení:

Integrovat tento zlomek okamžitě je obtížné. Proto provedeme tuto úpravu:

$$\int \frac{7x-9}{(x+3)(x-2)}dx = \int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{6}{x+3}dx\,,$$

Při úpravě jsme zadaný zlomek v integrálu převedli na dva jednodušší zlomky. O správnosti rozkladu se lze snadno přesvědčit uvedením obou zlomků zpět na společný jmenovatel.

Nyní je už integrace snadná:

$$\int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{6}{x+3}dx = \ln|x-2| + 6\ln|x+3| + C\,.$$

Oba zlomky jsou právě ony parciální zlomky. Otázkou tedy zůstává už jen to, jak tyto parciální zlomky najít. To si ukážeme v následujících příkladech. ■

Příklad 6.4. Vypočtěte $\int \frac{3x+3}{(x+2)(x-1)}dx$.

Řešení:
Nejprve rozložíme integrovanou funkci na dva parciální zlomky, teprve poté budeme integrovat: $\frac{3x+3}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$

Konstanty *A* a *B* určíme tak, že levou stranu převedeme zpět na společný jmenovatel:

$$\frac{3x+3}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

První a poslední zlomek se samozřejmě musejí rovnat, proto se musí rovnat i jejich čitatele:

$$3x+3 = A(x-1)+B(x+2)$$

Roznásobíme závorky a pak na pravé straně zvlášť sečteme členy obsahující *x* a zvlášť členy bez *x*:

$$3x+3 = (A+B)x+(2B-A)$$

Protože levá i pravá strana se mají rovnat, musí být koeficienty před *x* na obou stranách rovnice shodné, a totéž platí pro absolutní členy, tedy 3 vlevo a závorku (2*B* – *A*) vpravo. Porovnáním obou stran rovnice máme:

$$3 = A+B$$

$$3 = 2B-A$$

Takto jsme dostali soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou vyřešíme například eliminační metodou s výsledkem: $A=1, B=2$.

Druhý způsob, jak určit konstanty *A* a *B*, spočívá v dosazení vhodné hodnoty *x* do výchozí rovnosti čitatelů $3x+3 = A(x-1)+B(x+2)$. Obvykle volíme nulové body závorek:

$x=1$: $6=0+3B$, odtud $B=2$

$x=-2$: $-3=-3A+0$, odtud $A=1$

Zde jsme využili toho, že daná rovnost musí platit pro všechna *x*, a tedy i pro zvolené hodnoty 1 a –2.

Máme tedy rozklad původního zlomku na dva parciální zlomky:

$$\frac{3x+3}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-1}$$

Nyní můžeme integrovat. K integraci parciálních zlomků využijeme tabulkový integrál na řádku 6 z Tabulky 6.1, neboť $\int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C$, proto píšeme rovnou výsledek:

$$\int \frac{3x+3}{(x+2)(x-1)}dx = \int \frac{1}{x+2}dx + \int \frac{2}{x-1}dx = \ln|x+2| + 2\ln|x-1| + C.$$ ■

V obecném případě máme za úkol integrovat racionální funkci $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou dva polynomy.

K rozložení $\frac{P(x)}{Q(x)}$ na parciální zlomky musíme upravit jmenovatel $Q(x)$ na součin kořenových činitelů, tedy na součin závorek, v nichž je vždy (x – kořen Q), nebo nerozložitelný kvadratický dvojčlen či trojčlen. Při rozkladu Q(x) mohou nastat tyto případy:

a) Všechny kořeny $Q(x)$, označíme je x_1, x_2 až x_k jsou reálná čísla, a žádný kořen se neopakuje (má násobnost jedna). Pak píšeme:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot...(x-x_k)}$$

Rozklad na parciální zlomky vypadá následovně:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot...(x-x_k)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + ... + \frac{K}{x-x_k}$$

Každému kořenovému činiteli (každé závorce) ve jmenovateli odpovídá jeden parciální zlomek s konstantou v čitateli. Vzniklé parciální zlomky okamžitě integrujeme pomocí přirozeného logaritmu. Tento případ nastal v obou úvodních Příkladech 6.3 a 6.4.

b) Všechny kořeny $Q(x)$, označíme je x_1, x_2 až x_k jsou reálná čísla, ale některý kořen, například x_1 se opakuje n-krát (říkáme, že má násobnost n). Pak máme následující rozklad:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)^n\cdot(x-x_2)\cdot...(x-x_k)}$$

A parciální zlomky vytvoříme následovně:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)^n\cdot(x-x_2)\cdot...(x-x_k)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + ... + \frac{A_n}{(x-x_1)^n} + \frac{B}{x-x_2} + ... + \frac{K}{(x-x_k)}$$

Vidíme, že pro kořen vyšší násobnosti než jedna tvoříme navíc parciální zlomky s jmenovatelem $(x-x_1)^1$, $(x-x_1)^2$, až $(x-x_1)^k$. Další parciální zlomky tvoříme stejně jako v předchozím případě. Pokud by tedy například $x = 3$ bylo dvojnásobným kořenem $Q(x)$, pak musíme mít parciální zlomky s jmenovatelem $(x-3)^1$ a $(x-3)^2$. V čitateli je vždy konstanta, kterou si můžeme označit libovolně (obvykle velkým písmenem a abecedně). Řešení tohoto typu integrálu je ukázáno v Příkladě 6.5.

c) Poslední možnost, kterou se budeme zabývat, nastává, když se v rozkladu polynomu $Q(x)$ objeví nerozložitelný kvadratický dvojčlen nebo trojčlen násobnosti jedna. Příkladem budiž například x^2+1 nebo x^2+2x+4. Pokud se budeme snažit najít kořeny těchto mnohočlenů, vyjde nám záporný diskriminant, a rozklad tedy nelze (v reálných číslech) provést. V takovém případě ponecháme tento dvojčlen nebo trojčlen ve jmenovateli, v čitateli pak píšeme místo konstanty lineární funkci x. Vše ostatní zůstává stejné jako v předchozích bodech:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)\cdot(x-x_1)...} = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)} + \frac{C}{x-x_1}....$$

Pro řešení tohoto typu viz Příklad 6.6.

Příklad 6.5. Integrujte $\int \frac{6x^3+21x^2+18x+5}{(x+1)^3 x}dx$.

Řešení:

Nejprve rozložíme racionální funkci $\frac{6x^3+21x^2+18x+5}{(x+1)^3 x}$ na parciální zlomky:

$$\frac{6x^3+21x^2+18x+5}{(x+1)^3 x}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{x}$$

Pravou stranu upravíme na společný jmenovatel:

$$\frac{6x^3+21x^2+18x+5}{(x+1)^3 x}=\frac{A(x+1)^2 x+B(x+1)x+Cx+D(x+1)^3}{(x+1)^3 x}$$

Nyní budeme volit vhodná *x* tak, abychom získali konstanty *A*, B, *C*, *D*. Dosazujeme do čitatele obou zlomků výše (které se musí rovnat)

Nechť $x = –1$: $2=0+0-C+0$, odkud máme $C = –2$.
Nechť $x = 0$: $5=0+0+0+D$, odkud dostáváme $D = 5$.
Nechť $x = 1$: $50=4A+2B+C+8D$, za *C* a *D* dosadíme vypočtené hodnoty:
$50=4A+2B-2+40$, čímž obdržíme rovnici pro *A* a *B*: $12=4A+2B$.
Potřebujeme ještě jednu rovnici (máme dvě neznámé).
Nechť $x = –2$: $5=-2A+2B-2C-D$, za *C* a *D* opět dosadíme:
$5=-2A+2B+4-5$, a obdržíme druhou rovnici pro *A* a *B*: $6=-2A+2B$.
Řešíme soustavu:
$12=4A+2B$
$6=-2A+2B$
Řešením této soustavy je $A = 1$ a $B = 4$.
Nyní můžeme přikročit k integraci jednotlivých parciálních zlomků:

$$\int \frac{6x^3+21x^2+18x+5}{(x+1)^3 x}dx=\int \frac{1}{(x+1)}dx+\int \frac{4}{(x+1)^2}dx+\int \frac{-2}{(x+1)^3}dx+\int \frac{5}{x}dx=$$

$$=\ln|x+1|-\frac{4}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+5\ln|x|+C.$$ ■

Příklad 6.6. Integrujte: $\int \frac{3x^2-3x+2}{x^3+x}dx$.

Řešení:
Zadanou racionální funkci rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{3x^2-3x+2}{x^3+x}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x}$$

Ve jmenovateli prvního parciálního zlomku musí být lineární funkce, ne jen konstanta! Dále postupujeme podobně jako v předchozích příkladech, hledáme konstanty *A*, *B* a *C*:

$$\frac{3x^2-3x+2}{x^3+x}=\frac{Ax^2+Bx+Cx^2+C}{x^3+x}$$

Nechť $x = 0$: dostáváme ihned $C=2$.

Nechť x = 1: dostáváme $2 = A + B + 4$, po úpravě: $-2 = A + B$.
Nechť x = –1: dostáváme $8 = A - B + 4$, po úpravě: $4 = A - B$.
Řešením soustavy pro A a B obdržíme: $A = 1,\ B = -3$.
Nyní můžeme přejít k integraci:

$$\int \frac{3x^2 - 3x + 2}{x^3 + x} dx = \int \frac{x-3}{x^2+1} dx + \int \frac{2}{x} dx .$$

Označme první integrál na pravé straně I_1 a druhý integrál I_2. Integrál I_2 je tabulkový integrál:

$$I_2 = \int \frac{2}{x} dx = 2\ln|x| + C .$$

Při integraci I_1 postupujeme následovně: nejprve integrál rozdělíme na dva, a každý integrujeme zvlášť:

$$I_1 = \int \frac{x-3}{x^2+1} dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx - 3\int \frac{1}{x^2+1} dx .$$

První integrál na pravé straně je typu $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$, pokud jej vhodně upravíme: $\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} dx$. Integrace je pak už snadná:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C .$$

Druhý integrál je tabulkový integrál (pro funkci arctg$x$):

$$-3\int \frac{1}{x^2+1} dx = -3 arctgx .$$

Výsledek shrneme:

$$\int \frac{3x^2 - 3x + 2}{x^3 + x} dx = 2\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - 3 arctgx . \ \blacksquare$$

Obecně platí, že tento typ integrálu téměř vždy vede na funkce logaritmus a arctangens.

6.3 INTEGRACE SOUČINU FUNKCÍ (METODA PER PARTES)

Smyslem této metody je rozložit jeden složitější integrál na dva jednodušší členy (odtud název metody: *per partes* je latinsky „po částech“).

Vzorec, který používáme při integraci per partes, si odvodíme z pravidla pro derivaci součinu dvou funkcí, které označíme $u(x)$ a $v(x)$.

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

Nyní osamostatníme vlevo člen uv': $uv' = (uv)' - u'v$, a tuto rovnost integrujeme:

$$\int uv'dx = \int (uv)'dx - \int u'vdx$$

Prostřední člen obsahuje integrál i derivaci, proto se tyto dvě operace vyruší, a dostaneme:

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

Zopakujme, že smysl metody spočívá v tom, že složitý integrál vlevo je nahrazen součinem obou funkcí a jednodušším integrálem vpravo. Důležitá je správná volba funkcí u a v'. Nesprávná volba funkcí vede k tomu, že složitost úlohy naroste. V takovém případě je zapotřebí zvolit funkce u a v' opačně.

Příklad 6.7. Vypočtěte: $\int x \cdot e^x dx$.

Řešení:
Zvolíme $u = x$ a $v' = e^x$:

$$\int x \cdot e^x dx = \begin{vmatrix} u = x, v' = e^x \\ u' = 1, v = e^x \end{vmatrix} = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

Při per partes si tedy nejprve vytvoříme tabulku s funkcemi u, u', v a v'. Poté dosadíme tyto funkce do odvozeného vztahu pro per partes výše. Při správné volbě u a v' se integrovaný výraz zjednoduší natolik, že jeho výpočet již není problémem. ■

Příklad 6.8. Vypočtěte: $\int x \cdot \ln x dx$.

Řešení:

$$\int x \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, v' = x \\ u' = \frac{1}{x}, v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C. \ ■$$

Příklad 6.9. Vypočtěte: $\int x \sin x dx$.

Řešení:

$$\int x \sin x dx = \begin{vmatrix} u = x, v' = \sin x \\ u' = 1, v = -\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C. \ ■$$

Příklad 6.10. Vypočtěte: $\int arctgx dx$.

Řešení:
Uvnitř integrálu je pouze jediná funkce, *arctgx*, proto by se mohlo zdát, že per partes není vhodná metoda pro výpočet. Použijeme však „trik“: $arctgx = arctgx \cdot 1$, a zvolíme $v' = 1$:

$$\int arctgx dx = \begin{vmatrix} u = arctgx, v' = 1 \\ u' = \frac{1}{1+x^2}, v = x \end{vmatrix} = xarctgx - \int \frac{x}{1+x^2} dx = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C. \ ■$$

Analogicky se vypočte například $\int \ln x dx$.

Příklad 6.11. Vypočtěte: $\int \sin x e^x dx$.

Řešení:

$$\int \sin x e^x dx = \begin{vmatrix} u = \sin x, v' = e^x \\ u' = \cos x, v = e^x \end{vmatrix} = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = \begin{vmatrix} u = \cos x, v' = e^x \\ u' = -\sin x, v = e^x \end{vmatrix} =$$

$$e^x \sin x - \left[e^x \cos x + \int e^x \sin x dx\right] = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx.$$

Použili jsme dvakrát per partes, a může se zdát, že výpočet skončil ve slepé uličce, neboť na pravé straně jsme získali stejný integrál jako zadaný integrál. Ve skutečnosti jsme však už blízko řešení: označme hledaný integrál *I* a rovnici přepišme:

$I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$,

Nyní stačí už jen na pravé straně osamostatnit *I*:

$2I = e^x \sin x - e^x \cos x$,

A po dělení 2 obdržíme výsledek:

$$I = \frac{\sin x e^x - \cos x e^x}{2} + C \quad \blacksquare$$

Složitější integrály řešíme pomocí *substituce* (*substituce* je totéž co *náhrada*): složitý výraz nahrazujeme jednodušším. Typicky se substituce využívají při integraci složených funkcí, odmocnin (Eulerovy substituce) a goniometrických funkcí (univerzální substituce $t = tg\frac{x}{2}$). Substitucím je věnována samostatná Kapitola 7, proto je prozatím vynecháme.

6.4 CELKOVÉ NÁKLADY A CELKOVÉ PŘÍJMY

V ekonomii lze (neurčitý) integrál využít k výpočtu *celkových příjmů* nebo *celkových nákladů*, pokud jsou známy (dány) mezní příjmy respektive mezní náklady. Jak již bylo zmíněno v Kapitole 2, mezní veličiny jsou derivacemi celkových veličin, a tedy celkové veličiny jsou naopak integrály mezních veličin.

Tyto integrály mohou být buď *neurčité* – když hledáme pouze funkční závislost celkových veličin na množství, nebo *určité*, pokud máme zadány integrační meze a chceme celkové náklady vyčíslit. V této kapitole se omezíme pouze na první případ, určitý integrál je tématem Kapitoly 8 a 9.

Funkce *celkových nákladů* *TC*(*x*) a funkce *mezních nákladů* *MC*(*x*), kde *x* je počet výrobků, spolu souvisejí vztahem:

$$TC(x) = \int MC(x)dx + C \qquad (6.1)$$

Vztah (6.1) říká, že celkové náklady jsou součtem mezních nákladů. Integrační konstanta *C* se určí z jedné známé hodnoty *TC*(*x*) pro dané *x*. Stejný vztah platí také pro *celkové příjmy* *TR*(*x*) a *mezní příjmy* *MR*(*x*):

$$TR(x) = \int MR(x)dx + C \qquad (6.2)$$

Příklad 6.12. Určete funkci celkových nákladů, jestliže funkce mezních nákladů $MC(x) = 140e^{0,2x}$ a náklady na produkci 10 výrobků činí 6000 Kč.

Řešení:

Použijeme vztah (6.1):

$$TC(x) = \int 140e^{0,2x}dx + C = 140\int e^{0,2x}dx + C = 140\frac{e^{0,2x}}{0,2} + C = 700e^{0,2x} + C .$$

Nyní ještě určíme konstantu *C* z podmínky, že náklady na produkci 10 výrobků činí 6000 Kč, a je tedy *x* = 10 a *TC*(*x*) = 6000:

$6000 = 700e^2 + C$,

A odtud *C* = 828. $\blacksquare$

Příklad 6.13. Určete funkci celkových nákladů, pokud je dána následující funkce mezních nákladů, kde x znamená množství:

a) $MC = 4x + 5$, když víme, že náklady na produkci 5 kusů činí 200 euro,

b) $MC = x^2 + \dfrac{8}{x+3}$.

Řešení:

a) Mezní náklady integrujeme: $TC = \int (4x+5)dx = 2x^2 + 5x + C$, a z dané podmínky určíme konstantu C: $TC(5) = 200 = 2\cdot 5^2 + 5\cdot 5 + C$, odkud je C = 125.

b) Mezní náklady integrujeme: $TC = \dfrac{x^3}{3} + 8\ln|x+3| + C$. ■

Příklad 6.14. Mezní příjmy jsou popsány funkcí $MR = 140 - 6x + 2$, najděte funkci celkového příjmu.

Řešení:

Mezní příjem integrujeme: $TR = \int (140 - 6x)\,dx = 140x - 3x^2 + C$. ■

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1. Integrujte:

a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

[$x^3 + x^2 + x + C$]

b) $f(x) = x^4 - 5x + 8$

[$\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{5}{2}x^2 + 8x + C$]

c) $f(x) = 4e^x + \dfrac{5}{x}$

[$4e^x + 5\ln x + C$]

d) $f(x) = \dfrac{5}{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 2^x$

[$-\dfrac{5}{x} + \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^4} + \dfrac{2^x}{\ln 2} + C$]

e) $f(x) = 4\sin x - 3\cos x$

[$4\sin x - 3\cos x + C$]

f) $f(x) = \dfrac{10}{x^2+1}$

[$10 arctgx + C$]

g) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+6}$

[$\ln(x^2+6)$]

2. Rozložte na parciální zlomky následující racionální funkce:

a) $\frac{5x+2}{x^2+x}$

[$\frac{5x+2}{x^2+x} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x+1}$]

b) $\frac{4x-11}{(x+1)(x-4)}$

[$\frac{4x-11}{(x+1)(x-4)} = \frac{3}{x+1} + \frac{1}{x-4}$]

c) $\frac{-2x^2+8x+4}{x^2(2+3x)}$

[$\frac{-2x^2+8x+4}{x^2(2+3x)} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{2+3x}$]

d) $\frac{3x^2-4x+5}{(x-3)(x^2+1)}$

[$\frac{3x^2-4x+5}{(x-3)(x^2+1)} = \frac{2}{x-3} + \frac{x-1}{x^2+1}$]

3. Vypočtěte:

a) $\int \frac{x-13}{x^2+4x-5} dx$

[$3\ln|x+5| - 2\ln|x-1| + C$]

b) $\int \frac{5x^2-17x+12}{x^3-4x^2+4x} dx$

[$\int \frac{3}{x} dx + \int \frac{2}{x-2} dx - \int \frac{1}{(x-2)^2} dx = 3\ln|x| + 2\ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + C$]

4. Vypočtěte:

a) $\int \frac{1}{x^2+4x+5} dx$

[$arctg(x+2) + C$]

b) $\int \frac{3}{x^2+2x+5} dx$

[$\frac{3}{2} arctg \frac{x+1}{2} + C$]

5. Řešte metodou per partes:

a) $\int x^2 e^x dx$

[$(x^2-2x+2)e^x + C$]

b) $\int (2x+1)e^x dx$

$[(2x-1)e^x + C]$

c) $\int x^3 \ln x dx$

$[\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C]$

d) $\int \ln x dx$

$[x \ln x - x + C]$

e) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

$[-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C]$

6. Jsou dány mezní náklady $MC(x) = 25e^{0,4x}$, určete funkci celkových nákladů, jestliže výroba 10 kusů výrobků stojí 3500 Kč.
$[TC(x) = 62,5e^{0,4x} + 88$ Kč]

7 SPECIÁLNÍ SUBSTITUCE V NEURČITÉM INTEGRÁLU

V předcházející kapitole jsme zavedli neurčitý integrál a ukázali jsme si integraci jednoduchých (základních) funkcí. Mnoho integrálu je však složitějších a k jejich řešení se musí použít vhodná integrační metoda. Jednou z integračních metod je *metoda substituční*. V této kapitole si ukážeme některé často používané substituce v neurčitém integrálu. Substituce znamená náhradu výrazu s původní proměnnou (x) za nějaký výraz s novou proměnnou (nejčastěji označenou t). Cílem substituce je zjednodušit integrovanou funkci a převést ji na integraci racionální lomené funkce (zlomku). Substituci provádíme typicky v těchto případech:

- Je-li v integrálu složená funkce (v závorce), pak nahrazujeme vnitřní funkci (tedy onu závorku),
- Je-li v integrálu odmocnina, pak nahrazujeme celou odmocninu nebo výraz pod odmocninou,
- Jsou-li v integrálu různé goniometrické funkce, pak provedeme substituci tak, abychom dostali buď jednu goniometrickou funkci nebo racionální funkci bez goniometrických funkcí.

Poznámka: při substituci nezapomeneme nahradit i diferenciál dx diferenciálem nové proměnné (dt)!

V této kapitole si ukážeme užití některých speciálních substitucí.

7.1 INTEGRACE SLOŽENÝCH FUNKCÍ

Příklad 7.1. Vypočtěte $\int (2x+1)^4\, dx$.

Řešení:
zavedeme substituci $2x + 1 = t$, potřebujeme ještě nahradit dx za dt, což se provede tak, že substituční vztah zderivujeme (vlevo podle x a vpravo podle t) a za každou stranu rovnice napíšeme příslušný diferenciál (tomuto postupu se říká *diferencovat rovnici*): $2dx = 1dt$. Při řešení integrálu se tyto pomocné výpočty obvykle zapíší do tabulky ohraničené zleva a zprava svislou čarou: $\int (2x+1)^4\, dx = \begin{vmatrix} 2x+1=t \\ 2dx=dt \end{vmatrix}$. Provedeme substituci a pokračujeme:

$$\int (2x+1)^4\, dx = \begin{vmatrix} 2x+1=t \\ 2dx=dt \end{vmatrix} = \int t^4 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^4 dt = \frac{1}{2}\frac{t^5}{5} + C = \frac{t^5}{10} + C = \frac{(2x+1)^5}{10} + C.$$

Na závěr se nesmíme zapomenout vrátit k původní proměnné x. Můžeme si ověřit i správnost výsledku derivováním: derivací výrazu $\int \frac{(2x+1)^5}{10} + C$ opravdu vyjde původně zadaná funkce $(2x+1)^4$. ■

Příklad 7.2. Vypočtěte: $\int e^{2x+3}dx$.

Řešení:

$$\int e^{2x+3}dx = \begin{vmatrix} 2x+3=t \\ 2dx=dt \end{vmatrix} = \int e^t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{2x+3} + C\,. \blacksquare$$

Příklad 7.3. Vypočtěte: $\int \cos(5x-4)\,dx$.

Řešení:

$$\int \cos(5x-4)\,dx = \begin{vmatrix} 5x-4=t \\ 5dx=dt \end{vmatrix} = \int \cos t \frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int \cos t dt = \frac{\sin t}{5} + C = \frac{\sin(5x-4)}{5} + C\,. \blacksquare$$

7.2 Integrace logaritmických a exponenciálních funkcí

Obsahují-li integrály exponenciální funkci e^x respektive logaritmickou funkci $\ln x$, provádíme náhradu právě těchto funkcí (u logaritmické funkce je zvláště výhodné, pokud integrál obsahuje člen $\frac{\ln^\alpha x}{x}$.)

Příklad 7.4. Vypočtěte: $\int \frac{\ln x}{x}dx$.

Řešení:
Použijeme substituci ln$x$ = t. Při výpočtu nám velice pomůže i člen x ve jmenovateli:

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \begin{vmatrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{vmatrix} = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C\,. \blacksquare$$

Příklad 7.5. Vypočtěte: $\int \frac{5}{x\ln^2 x}dx$.

Řešení:

$$\int \frac{5}{x\ln^2 x}dx = \begin{vmatrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{5}{t^2}dt = -\frac{5}{t} + C = \frac{-5}{\ln|x|} + C\,. \blacksquare$$

Příklad 7.6. Vypočtěte: $\int \frac{e^x}{2e^x+5}dx$.

Řešení:
Provedeme substituci $e^x = t$ a přímo integrujeme.

$$\int \frac{e^x}{2e^x+5}dx = \begin{vmatrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{1}{2t+5}dt = \frac{1}{2}\ln|2t+5| + C = \frac{1}{2}\ln|2e^x+5| + C\,. \blacksquare$$

Příklad 7.7. Vypočtěte: $\int \frac{e^x - 2}{e^x + 1} dx$.

Řešení:

Stejně jako v předchozím příkladě provádíme substituci $e^x = t$. Po substituci přejde integrál na integrál racionální funkce. Racionální funkci (zlomek) rozložíme na dva parciální zlomky a integrujeme:

$$\int \frac{e^x - 2}{e^x + 1} dx = \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{t-2}{t(t+1)} dt = \int \frac{3}{t+1} dt - \int \frac{2}{t} dt = 3\ln\left|e^x + 1\right| - 2\ln\left|e^x\right| + C \ \blacksquare$$

7.3 INTEGRACE GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

Integrály obsahující goniometrické funkce sinus, kosinus, tangens nebo kotangens lze řešit pomocí následujících substitucí:

- Integrál obsahuje funkce $\sin^\alpha x$ a $\cos^\beta x$, přičemž α je liché a β sudé. V tomto případě užijeme substituci: $\cos x = t$, nahrazujeme tedy sudou funkci. Pokud je situace opačná a α je sudé a β liché, užijeme substituci: $\sin x = t$.
- Integrál obsahuje funkce $\sin^\alpha x$ a $\cos^\beta x$, přičemž α i jsou β sudé. Pak použijeme substituci $tgx = t$.
- Integrál obsahuje funkce $\sin^\alpha x$ a $\cos^\beta x$, přičemž α i jsou β liché. Nahrazujeme tu funkci, která má vyšší exponent.
- Pokud nelze použít žádnou z předchozích substitucí, je možné využít univerzální substituci $tg\frac{x}{2} = t$, viz Tabulka 7.2.

Při úpravách integrandu používáme základní goniometrické vzorce, viz Tabulka 7.1.

Tabulka 7.1. Nejdůležitější goniometrické vztahy

č.	vztah
(1)	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
(2)	$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$
(3)	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
(4)	$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
(5)	$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

Tabulka 7.2. Univerzální goniometrická substituce.

č.	vztah
(1)	$tg\dfrac{x}{2}=t$
(2)	$\sin x=\dfrac{2t}{t^2+1}$
(3)	$\cos x=\dfrac{1-t^2}{t^2+1}$
(4)	$dx=\dfrac{2}{1+t^2}$

Příklad 7.8. Vypočtěte: $\int \cos x\cdot\sin^3 x dx$.

Řešení:

V této úloze jsou obě funkce umocněny na lichý exponent, mohli bychom tedy nahradit obě, ale vybereme si k substituci funkci s vyšším exponentem, tedy sin*x*:

$$\int \cos x\cdot\sin^3 x dx=\left|\begin{matrix}\sin x=t\\ \cos x dx=dt\end{matrix}\right|=\int t^3 dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{\sin^4 x}{4}+C.$$ ■

Příklad 7.9. Vypočtěte: $\int \sin^2 x dx$.

Řešení:

V této úloze převedeme $\sin^2 x$ na kosinus dvojnásobného úhlu (vztah 4 v Tabulce 7.2) a přímo zintegrujeme (mohli bychom ještě provést substituci 2*x* = *t*, ale to je již zbytečné).

$$\int \sin^2 x dx=\left|\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\right|=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{2}+C$$ ■

Příklad 7.10. $\int \sin^3 x dx$

Řešení:

Nejprve rozdělíme $\sin^3 x=\sin^2 x\cdot\sin x$ a použijeme vztah (1) z Tabulky 7.2. Podle bodu (i) nahrazujeme funkci cos*x*:

$$\int \sin^3 x dx=\int\left(1-\cos^2 x\right)\cdot\sin x dx=\left|\begin{matrix}\cos x=t\\ -\sin x dx=dt\end{matrix}\right|=\int\left(t^2-1\right)dt=\frac{t^3}{3}-t+C=\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C$$

■

Příklad 7.11. $\int \frac{dx}{\sin x}$

Řešení:
Použijeme univerzální goniometrickou substituci v Tabulce 7.2:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| tg\frac{x}{2} = t \right| = \int \frac{t^2+1}{2t}\frac{2}{t^2+1}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln\left| tg\frac{x}{2} \right| + C.$$ ■

7.4 INTEGRACE IRACIONÁLNÍCH FUNKCÍ

Iracionální funkce jsou funkce obsahující proměnnou pod odmocninou. V tomto případě obvykle nahrazujeme celou odmocninu.

Příklad 7.12. Vypočtěte: $\int \sqrt{4x+1}dx$.

Řešení:
Substituci si opět zapíšeme do pomocné tabulky. První řádek je substituční vztah, druhý řádek získáme umocněním prvního řádku na druhou. Třetí řádek vznikne derivací druhého řádku podle x (vlevo) a podle t (vpravo), kde za obě strany připíšeme diferenciál dx respektive dt (říkáme, že rovnici *diferencujeme*). Poté již provedeme samotnou substituci a integraci.

$$\int \sqrt{4x+1}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{4x+1} = t \\ 4x+1 = t^2 \\ 4dx = 2tdt \end{array} \right| = \int t \cdot \frac{tdt}{2} = \frac{1}{2}\int t^2 dt = \frac{1}{2}\frac{t^3}{3} + C = \frac{t^3}{6} + C = \frac{\left(\sqrt{4x+1}\right)^3}{6} + C$$ ■

Příklad 7.13. Vypočtěte: $\int x\sqrt{x^2-1}dx$.

Řešení:
Opět provedeme substituci celé odmocniny:

$$\int x\sqrt{x^2-1}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2-1} = t \\ x^2-1 = t^2 \\ 2xdx = 2tdt \\ xdx = tdt \end{array} \right| = \int t \cdot tdt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}{3} + C$$

O správnosti integrace se opět můžeme přesvědčit zpětným derivováním. ■

Příklad 7.14. Vypočtěte: $\int \sqrt{1-x^2}dx$.

Řešení:
Provádíme substituci $x = \sin t$ proto, abychom pod odmocninou dostali druhou mocninu. V průběhu výpočtu využíváme vztahy (1) a (5) z Tabulky 7.1.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = \sin t \\ dx = \cos t \end{matrix} \right| = \int \cos t \sqrt{1-\sin^2 t}\,dt = \int \cos t \sqrt{\cos^2 t}\,dt = \int \cos^2 t\,dt =$$

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

Při zpětné náhradě z t na x bylo využito rovností:

$t = \arcsin x$, $\sin 2t = 2\sin t \cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$. ■

Obecně lze říci, že při integrování odmocnin se stejné odmocniny objeví i ve výsledku.

Pro složitější iracionální funkce obsahující kvadratické funkce můžeme použít i jiné speciální substituce, jako jsou *Eulerovy substituce*, viz např. Škrášek a Tichý (1986) nebo Černý (2002).

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1.) Vypočtěte: $\int (3x-2)^4\,dx$.

[$\frac{(3x-2)^5}{15} + C$]

2.) Vypočtěte: $\int \sin(1-5x)dx$.

[$\frac{\cos(1-5x)}{5} + C$]

3.) Vypočtěte: $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$.

[$\frac{\ln^3 x}{3} + C$]

4.) Vypočtěte: $\int \cos^3 x dx$.

[$\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$]

5.) Vypočtěte: $\int \sqrt{2x+5}dx$

[$\frac{\sqrt{(2x+5)^3}}{3} + C$]

6.) Vypočtěte: $\int x\sqrt{x^2+2}dx$

[$\frac{\sqrt{(x^2+2)^3}}{3} + C$]

7.) Vypočtěte: $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

[$\ln\left(e^x+1\right)+C$]

8.) Vypočtěte: $\int \cos^4 x \sin x dx$

[$\frac{\cos^5 x}{5}+C$]

8 URČITÝ INTEGRÁL

8.1 RIEMANNŮV URČITÝ INTEGRÁL

Už od starověku se lidé pokoušeli najít obsah složitějších geometrických obrazců. Například Archimédes[4] se snažil najít obsah kruhu tak, že do dané kružnice vepisoval pravidelné n-úhelníky, a pro rostoucí n se obsah mnohoúhelníku blížil obsahu kruhu. Tím se Archimédes zařadil mez průkopníky integrálního počtu, neboť původně integrál znamenal totéž co obsah plochy. Idea výpočtu plochy tak, že se hledaná plocha ohraničí (zevnitř nebo zvenčí) pomocí jiných (jednoduchých) ploch, se později stala základem definice *Riemannova určitého integrálu*.

Nyní si stručně vysvětlíme konstrukci Riemannova[5] integrálu.

Mějme dánu funkci $y = f(x)$, která je omezená a po částech spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Provedeme *dělení intervalu* (značíme D) $\langle a, b \rangle$ rostoucí posloupností bodů $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_k = b$ na intervaly $\langle x_{p-1}, x_p \rangle$, kde $p \in \{1, 2, .., k\}$. Délku intervalu $\langle x_{p-1}, x_p \rangle$ označíme Δx_p. Maximum Δx_p se nazývá *norma dělení*.

Nyní z každého intervalu $\langle x_{p-1}, x_p \rangle$ vybereme (libovolný) bod ξ_p a sestrojíme následující *integrální součet*:

$$S_f(D) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \Delta x_i \tag{8.1}$$

Pro kladnou funkci $y = f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ má integrální součet (8.1) tento názorný význam: je to součet obsahů obdélníků, které mají šířku Δx_p a výšku $f(\xi_p)$, viz Obr. 8.1. Integrální součet tedy přibližně udává obsah plochy pod křivkou $y = f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Jestliže se bude dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ zjemňovat (dělících bodů bude přibývat a norma dělení se bude zmenšovat), bude tato aproximace lepší.

Řekneme, že funkce $y = f(x)$ je *integrabilní* (v Riemannově smyslu), jestliže se pro libovolné dělení intervalu D a libovolné hodnoty ξ pro k jdoucí do nekonečna (Δx_p jdoucí do nuly) integrální součet blíží k reálnému číslu s:

$$\lim_{k \to \infty} S_f(D) = s$$

Číslo s nazýváme určitým integrálem funkce $y = f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pro kladnou funkci číslo s vyjadřuje (přesně) obsah plochy pod křivkou $y = f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Protože je užití Riemannova integrálu v praxi obtížné, využívá se pro spojité funkce na daném intervalu Newtonův[6] určitý integrál, který vyžaduje pouze znalost primitivní funkce.

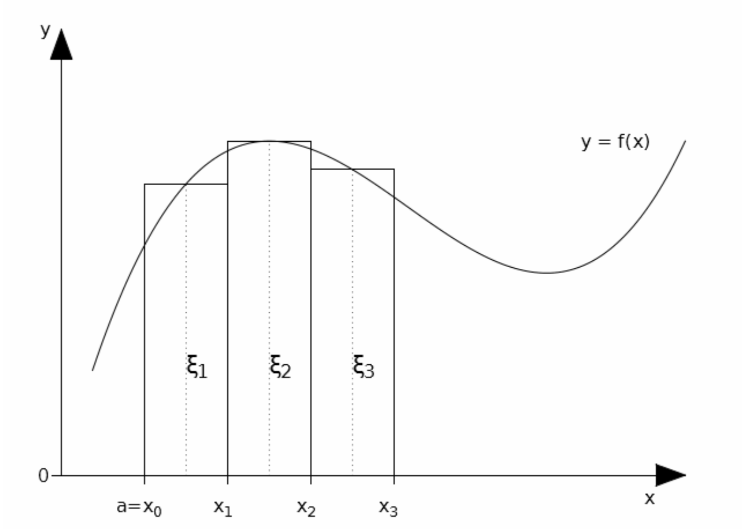
Pro úplnost ještě poznamenejme, že existují i další (obecnější) druhy integrálů: Lebesgueův, Stieltjesův, Choquetův, apod.

---

[4] Archimédes (287-212 př.n.l.), řecký matematik a fyzik.

[5] Bernhard Riemann (1826-1866), německý matematik.

[6] Isaac Newton (1642-1727), anglický matematik a fyzik



Obr. 8.1. Konstrukce Riemannova integrálu.

8.2 NEWTONŮV URČITÝ INTEGRÁL

Začneme rovnou definicí Newtonova určitého integrálu:

***Definice 8.1.**: Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na otevřeném intervalu J. Newtonovým určitým integrálem funkce $f(x)$ od a do b (na intervalu $(a,b) \subset J$) nazýváme symbol $\int_a^b f(x)dx$, kde a je horní integrační mez a b je dolní integrační mez.*

Výpočet určitého integrálu provádíme pomocí Newtonova-Leibnizova vzorce:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{8.2}$$

Zatímco neurčitý integrál je *funkce* (přesněji množina funkcí lišících se o konstantu *C*), je určitý integrál *číslo*, které vypočteme ze vztahu (8.2). Význam integrační mezí spočívá v tom, že nám říkají „odkud kam integrujeme“.

Základní vlastnosti určitého integrálu:

i) $\int_a^a f(x)dx = 0$

ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

iii) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

iv) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

v) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$, $b \in (a,c)$

Vlastnosti ii) vyjadřuje, že záměna integračních mezí vede ke změně znaménka určitého integrálu. Vlastnosti iii) a iv) již známe z kapitoly o neurčitém integrálu. Vlastnost v) vyjadřuje, že výpočet určitého integrálu na intervalu (a,c) lze rozdělit na výpočet integrálu přes dva na sebe navazující intervaly.

Užití určitého integrálu je velmi široké, zvláště v přírodních a vědách a technických oborech. Určitý integrál se používá nejčastěji k výpočtu:

- obsahu plochy ohraničené danými křivkami
- délky křivky
- objemu rotačního tělesa
- povrchu rotačního tělesa
- při řešení diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami

V ekonomii můžeme určitý integrál využít k výpočtu:

- celkových veličin z mezních (marginálních) veličin, například celkového příjmu z mezního příjmu,
- celkové veličiny, je-li dán její tok či intenzita.
- k výpočtu přebytku spotřebitele a výrobce v podmínkách dokonalé konkurence

Aplikacím určitého integrálu je věnována samostatná Kapitola 9, v této kapitole se proto zaměříme pouze na techniku výpočtu určitého integrálu, kterou si předvedeme na několika jednoduchých řešených úlohách.

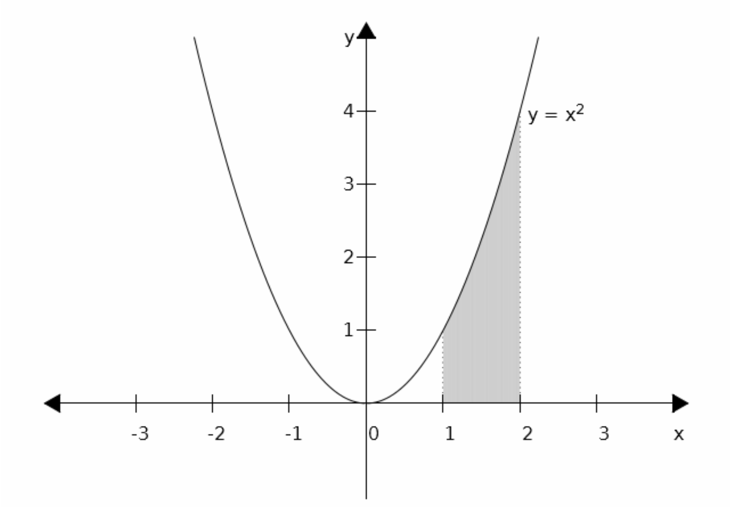
Příklad 8.1. Vypočtěte: $\int_1^2 x^2 dx$.

Řešení:

Protože je daná funkce na zadaném intervalu spojitá, můžeme použít vztah (8.2):

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

Pokud si k této úloze načrtneme obrázek (viz Obr. 8.2.) a vyznačíme plochu pod křivkou $y = x^2$ mezi $x = 1$, $x = 2$ a osou x, pak obsah této plochy je právě 7/3. ■



Obr. 8.2. Obsah plochy pod křivkou $y = x^2$.

Poznámka: Zápis $\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2$ je pouze úmluvou: primitivní funkci bez konstanty C je zvykem psát do hranaté závorky, za níž se vyznačí integrační meze. Dalším krokem výpočtu je dosazení obou mezí do závorky podle vztahu (8.2).

Příklad 8.2. Vypočtěte: $\int_0^3 x^2 dx$.

Řešení:

$$\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9 \ ■$$

Příklad 8.3. Vypočtěte: $\int_{-2}^0 x^3 dx$.

Řešení:

$$\int_{-2}^0 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^0 = \frac{0^3}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = 0 - 4 = -4 . \ ■$$

Příklad 8.4. Vypočtěte: $\int_{-1}^2 \left(3x^2 - 4x + 1\right) dx$.

Řešení:

$$\int_{-1}^2 \left(3x^2 - 4x + 1\right) dx = \left[x^3 - 2x^2 + x\right]_{-1}^2 = (8 - 8 + 2) - (-1 - 2 - 1) = 6 . \ ■$$

Příklad 8.5. Vypočtěte: $\int_0^1 e^x dx$.

Řešení:

$$\int_0^1 e^x dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1 . ■$$

Příklad 8.6. Vypočtěte: $\int_0^\pi \sin x dx$.

Řešení:

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2 . \ ■$$

Příklad 8.7. Vypočtěte $\int_0^{\pi/2} 6\sin^2 x \cdot \cos x dx$.

Řešení:

$$\int_0^{\pi/2} 6\sin^2 x \cdot \cos x dx = \left[2\sin^3 x\right]_0^{\pi/2} = 2\sin^3 \frac{\pi}{2} - 2\sin^3 0 = 2 - 0 = 2 . \ ■$$

Příklad 8.8. Vypočtěte: $\int_1^e \frac{1}{x} dx$.

Řešení:

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x|\right]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$ ■

Varovný příklad 8.9. Vypočtěte: $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$.

Řešení:

Pomocí vztahu (8.2) dostáváme podobně jako v předchozí úloze:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x|\right]_{-1}^1 = \ln 1 - \ln 1 = 0.$$

Tento výpočet je však chybný, neboť integrovaná funkce $y = \frac{1}{x}$ nesplňuje podmínky pro užití vztahu (8.2): není totiž na intervalu $\langle -1,1 \rangle$ spojitá (bodem nespojitosti je bod $x = 0$). Určitý integrál této funkce na daném intervalu neexistuje. ■

V následujících kapitolách si ukážeme, jak postupovat při výpočtu určitého integrálu pomocí metody per partes a substituční metody.

8.3 Metoda per partes v určitém integrálu

Metodu per partes jsme zavedli v Kapitole 6. Pro určitý integrál při užití této integrační metody platí:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = \left[u(x) \cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx \tag{8.3}$$

Příklad 8.10. Vypočtěte: $\int_1^2 xe^x dx$.

Řešení:

Využijeme vztah (8.3):

$$\int_1^2 xe^x dx = \left| \begin{matrix} u = x, v' = e^x \\ u' = 1, v = e^x \end{matrix} \right| = \left[x \cdot e^x\right]_1^2 - \int_1^2 e^x dx = \left(2 \cdot e^2 - 1 \cdot e^1\right) - \left[e^x\right]_1^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e^1) = e^2$$

■

Příklad 8.11. Vypočtěte: $\int_1^e x^2 \ln x dx$.

Řešení:

$$\int_1^e x^2 \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, v' = x^2 \\ u' = \frac{1}{x}, v = \frac{x^3}{3} \end{matrix} \right| = \left[\frac{x^3}{3} \cdot \ln x\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2 dx = \left(\frac{e^3}{3} \cdot \ln e - \frac{1}{3} \cdot \ln 1\right) - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

■

Příklad 8.12. Vypočtěte: $\int_0^{\pi} x\sin x dx$.

Řešení:

$$\int_0^{\pi} x\sin x dx = \begin{vmatrix} u = x, v' = \sin x \\ u' = 1, v = -\cos x \end{vmatrix} = \left[-x\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x)dx = (\pi + 0) + \left[\sin x\right]_0^{\pi} = \pi + 0 + 0 = \pi$$

■

8.4 SUBSTITUCE V URČITÉM INTEGRÁLU

Při substituci v určitém integrálu nahrazujeme nejen integrovanou funkci, ale také integrační meze. Původní integrační meze (v proměnné x) se převedou na nové integrační meze (v proměnné t) jednoduše pomocí substitučního vztahu (který je na prvním řádku pomocné tabulky), do něhož se dosadí původní hodnoty a vypočtou se hodnoty nové.

Věta 8.1. *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a,b\rangle$, nechť $\varphi(t)$ a $\varphi'(t)$ jsou spojité funkce v intervalu $\langle \alpha,\beta\rangle$, přičemž nechť $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, nechť $\varphi'(t)$ je ryze monotónní v $\langle \alpha,\beta\rangle$. Potom:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt \tag{8.4}$$

Užití Věty 8.1, respektive vztahu (8.4) si předvedeme na několika řešených úlohách.

Příklad 8.13. Vypočtěte: $\int_0^3 (2x+1)^3\,dx$.

Řešení:

$$\int_0^3 (2x+1)^3\,dx = \begin{vmatrix} 2x+1=t \\ 2dx = dt \\ x=3 \to t=7 \\ x=0 \to t=1 \end{vmatrix} = \int_1^7 t^3\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_1^7 t^3 dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_1^7 = \frac{1}{2}\left(\frac{7^4}{4} - \frac{1^4}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{2400}{4} = 300.$$

■

Příklad 8.14. Vypočtěte: $\int_0^1 x\sqrt{x^2+2}dx$.

Řešení:

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+2}dx = \begin{vmatrix} \sqrt{x^2+2} = t \\ x^2+2 = t^2 \\ 2xdx = 2tdt \\ x=0 \to t=\sqrt{2} \\ x=1 \to t=\sqrt{3} \end{vmatrix} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{3} - \frac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{3} = \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3}.$$ ■

Příklad 8.15. Vypočtěte: $\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x \cos x dx$

Řešení:

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x \cos x dx = \begin{vmatrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{vmatrix} = \int\limits_0^{\pi} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\pi} = 0 - 0 = 0 . \blacksquare$$

Příklad 8.16. Vypočtěte: $\int\limits_e^{e^2} \frac{2}{x \ln x} dx$.

Řešení:

$$\int\limits_e^{e^2} \frac{2}{x \ln x} dx = \begin{vmatrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{vmatrix} = \int\limits_e^{e^2} 2t dt = \left[t^2\right]_e^{e^2} = \left[\ln x\right]_e^{e^2} = \ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1 . \blacksquare$$

8.5 NEVLASTNÍ INTEGRÁL

V předchozích kapitolách o určitém integrálu jsme předpokládali, že obě integrační meze *a* a *b* jsou konečné, a také, že integrovaná funkce je v daném intervalu spojitá a nabývá pouze konečných hodnot.

- Pokud není splněna první podmínka, hovoříme o *nevlastním integrálu vlivem integrační meze*.
- Pokud není splněna druhá podmínka, hovoříme o *nevlastním integrálu vlivem nespojitosti funkce*.

V nevlastním integrálu je tedy buď integrační mez nekonečná, nebo integrovaná funkce nabývá nekonečné hodnoty v bodě nespojitosti.

Připomeňme, že pojmem „vlastní“ se označují konečné hodnoty (reálná čísla), zatímco pojem „nevlastní“ označuje plus nebo mínus nekonečno. Odtud tedy pojmenování tohoto typu integrálu.

Hodnota nevlastního integrálu může být konečná, v tom případě říkáme, že *konverguje*. V opačném případě říkáme, že integrál *diverguje*.

Výpočet nevlastního integrálu vlivem horní meze se provádí pomocí následujícího vztahu:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \to +\infty} \left[F(x)\right]_a^t \tag{8.5}$$

Výpočet nevlastního integrálu vlivem dolní meze se provádí analogicky.

Příklad 8.17. Vypočtěte: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

Řešení:

Použijeme vztah (8.5): $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim\limits_{t \to +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{1}\right) = 0 + 1 = 1 . \blacksquare$

Daný nevlastní integrál tedy konverguje.

Příklad 8.18. Vypočtěte: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$.

Řešení:

Použijeme vztah (8.5): $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\left[\ln|x|\right]_1^t = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\ln t - \ln 1\right) = \infty - 0 = \infty$. ■

Nevlastní integrál v tomto případě diverguje.

Příklad 8.19. Vypočtěte: $\int\limits_1^{+\infty} 0{,}5^x\,dx$.

Řešení:

$$\int\limits_1^{+\infty} 0{,}5^x\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{0{,}5^x}{\ln 0{,}5}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\frac{0{,}5^t}{\ln 0{,}5} - \frac{0{,}5^1}{\ln 0{,}5} = 0 - \frac{0{,}5}{\ln 0{,}5} = 0{,}721.$$ ■

Nevlastní integrál konverguje (neboť exponenciální funkce klesá velmi rychle).

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1. Vypočtěte následující určité integrály:

a) $\int\limits_0^4 x^3 dx$

[64]

b) $\int\limits_1^4 \left(6x^2 + 4x - 1\right) dx$

[153]

c) $\int\limits_{-3}^3 \left(x^3 - x\right) dx$

[0]

d) $\int\limits_1^e \frac{2}{x} dx$

[2]

e) $\int\limits_0^\pi \sin x dx$

[2]

f) $\int\limits_2^7 \sqrt{x+2} dx$

[13/3]

g) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

[1]

h) $\int_1^5 |2-x|\,dx$

[5]

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

[$\frac{\pi}{2} - 1$]

j) $\int_0^1 (3x+2)^4\, dx$

[208,333].

2. Vypočtěte nevlastní integrál:

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$

[1/2]

b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

[2]

9 APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU

Určitý integrál má mnoho aplikací především v technických a přírodovědných oborech. Lze jej využít například k výpočtu:

- obsahu plochy omezené danými křivkami
- objemu rotačního tělesa
- plochy rotačního tělesa
- délky křivky (rektifikaci)
- Řešení diferenciálních rovnic s danými okrajovými nebo počátečními podmínkami

V ekonomii se určitý (i neurčitý) integrál využívá k výpočtu celkových veličin z mezních veličin. Například celkový příjem je integrálem mezního příjmu, celkové náklady jsou integrálem mezních nákladů, celkový tok příjmů je integrálem intenzity toku příjmů, apod.

V této kapitole se budeme zabývat především výpočty plochy sevřené dvěma a více křivkami, a ekonomickými aplikacemi určitého integrálu.

9.1 OBSAH PLOCHY VYMEZENÝ DANOU KŘIVKOU A OSOU *X*

Nejjednodušším užitím určitého integrálu je výpočet obsahu plochy pod (nad) danou křivkou, tedy mezi danou křivkou a osou *x* (viz Obr. 9.1.).

Věta 9.1. *Nechť $y = f(x)$ je (všude) nezáporná funkce na intervalu (a,b). Potom obsah plochy S vymezený křivkami $y = f(x)$, x = a, x = b a y = 0 vypočteme užitím Newton-Leibnizovy formule:*

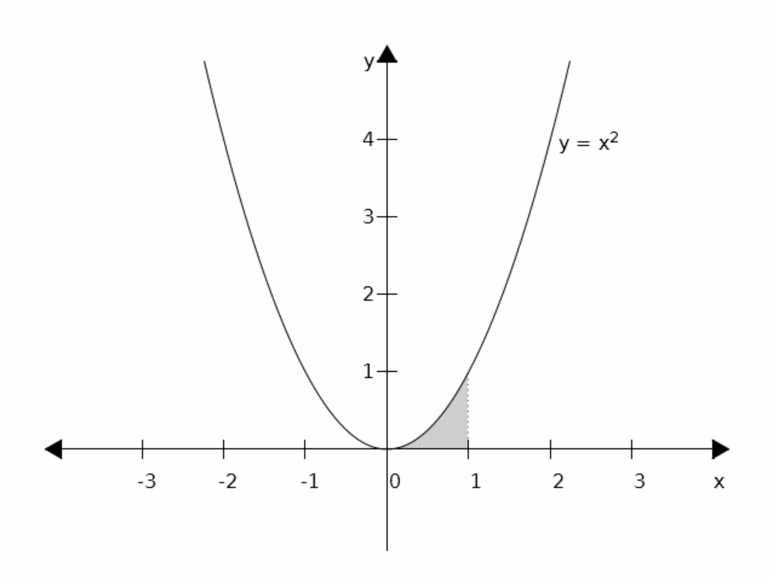
$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{9.1}$$

Příklad 9.1. Vypočtěte obsah plochy pod křivkou $y = x^2$ na intervalu $(0,1)$.

Řešení:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}.$$

Obsah plochy je tedy 1/3. Graficky je tato plocha znázorněna na Obrázku 9.1. ■



Obr. 9.1.

Pokud je funkce $y = f(x)$ na daném intervalu (a,b) záporná, dostaneme užitím vztahu (9.1) obsah plochy rovněž záporný, což je z geometrického hlediska nesmysl. V tomto případě tedy musíme vzít místo funkce $y = f(x)$ její absolutní hodnotu, čímž je zaručen kladný výsledek:

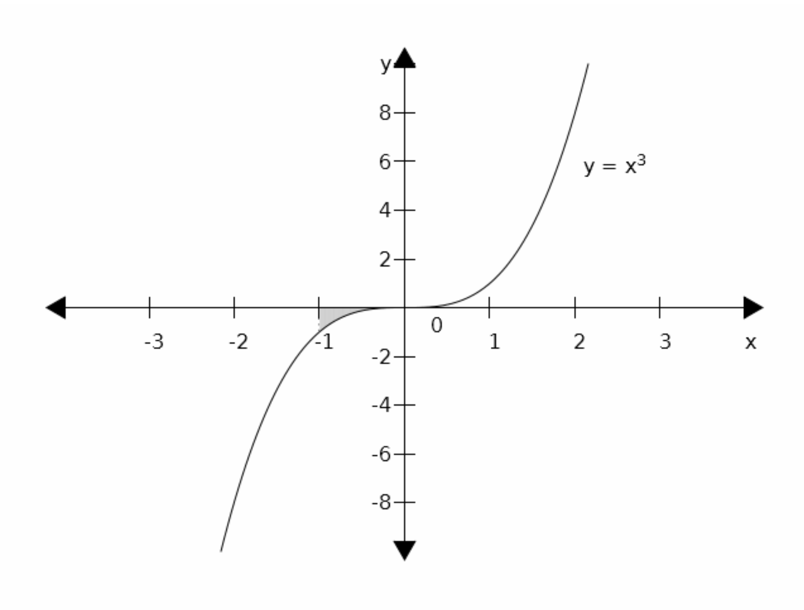
$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx = |F(b) - F(a)| \tag{9.2}$$

Příklad 9.2. Vypočtěte obsah plochy pod křivkou $y = x^3$ na intervalu $(-1,0)$.

Řešení:
Protože je daná funkce na zadaném intervalu záporná, použijeme k výpočtu dané plochy vztah (9.2):

$$\int_{-1}^{0} |x^3|\,dx = \left| \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{0} \right| = \left| -\frac{1}{4} + \frac{0}{4} \right| = \frac{1}{4}.$$

Graficky je tato plocha znázorněna na Obrázku 9.2. ■



Obr. 9.2.

Pokud je funkce $y = f(x)$ na intervalu (a,b) kladná i záporná, rozdělíme interval (a,b) na několik dílčích na sebe navazujících intervalů tak, aby v každém takovém intervalu byla daná funkce buď jen kladná nebo jen záporná. Vypočteme obsahy ploch pod (nad) danými úseky funkce a vše nakonec sečteme. Pokud bychom to neudělali, mohla by se nám plocha nad osou *x*, která je brána kladně, odečíst s plochou pod osou *x*, která je brána záporně.

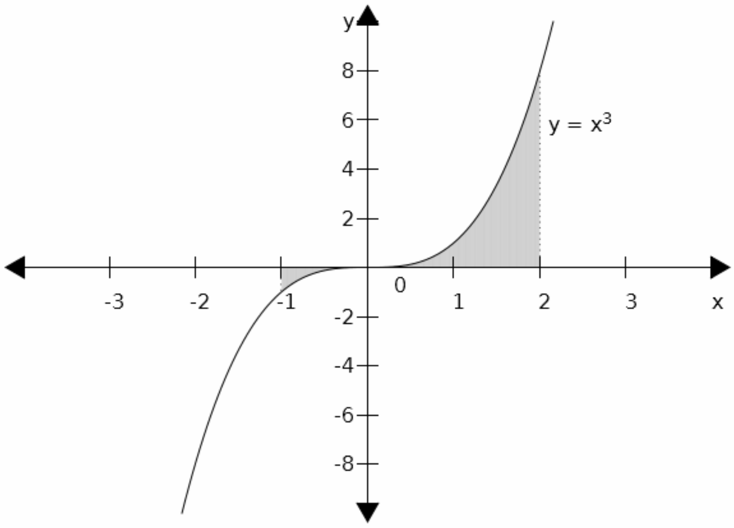
Příklad 9.3. Vypočtěte obsah plochy vymezené křivkou $y = x^3$, osou *x*, a přímkou $x = -1$ a $x = 2$ (viz Obrázek 9.3).

Řešení:

Protože je daná funkce na zadaném intervalu $(-1, 2)$ kladná i záporná, rozdělíme tento interval na dva: $(-1, 0)$ a $\langle 0, 2)$. V prvním intervalu je funkce záporná a ve druhém kladná.

$$S = \int_{-1}^{0} \left| x^3 \right| dx + \int_{0}^{2} x^3 dx = \left| \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{0} \right| + \left[\frac{x^4}{4} \right]_{0}^{2} = \left| 0 - \frac{1}{4} \right| + (4 - 0) = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}.$$

Graficky je tato plocha znázorněna na Obrázku 9.3. Obsah plochy pod křivkou je $\frac{1}{4}$, nad křivkou 4. Pokud bychom zapomněli na absolutní hodnotu v prvním integrálu, obsah obou ploch by se nám odečetl. ■



Obr. 9.3.

9.2. Obsah plochy sevřené dvěma a více křivkami

Obsah plochy mezi křivkami $f(x)$ a $h(x)$, kde $h(x)$ je horní křivka a $f(x)$ dolní křivka, a kde a a b jsou průsečíky obou křivek, počítáme podle vztahu:

$$S = \int_a^b \left(h(x) - f(x)\right) dx \tag{9.3}$$

Příklad 9.4. Vypočtěte obsah plochy sevřené křivkami $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$ (viz Obr. 9.4).

Řešení:

Nejprve hledáme průsečíky obou křivek, abychom věděli „odkud kam integrovat“ (hledáme integrační meze, které nám udávají, odkud kam sahá daná plocha ve směru osy x). Pokud je nevidíme ihned, řešíme rovnici $f(x) = h(x)$:

$x^2 = \sqrt{x}$

$x^4 = x$

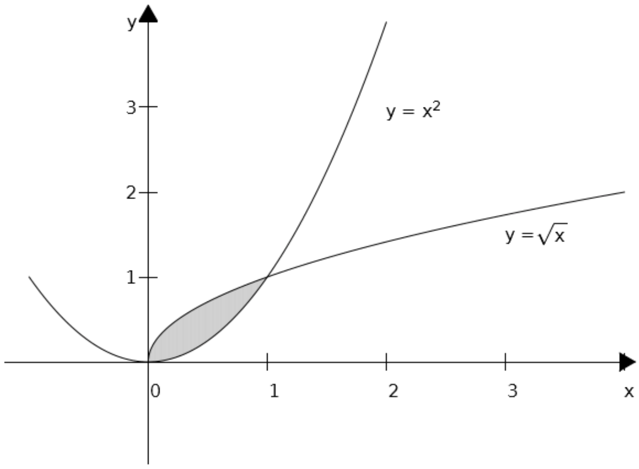
$x^4 - x = 0$

$x(x^3 - 1) = 0$

Tato rovnice má dva kořeny: $x_1 = 0$ $x_2 = 1$, které jsou integračními mezemi. Nyní použijeme vztah (9.3):

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(0 - \frac{0}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Obsah dané plochy je 1/3. ■



Obr. 9.4.

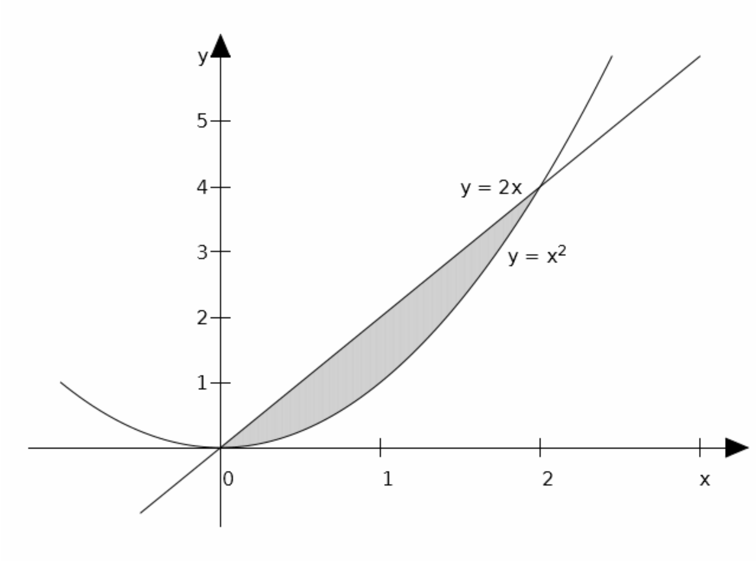
Příklad 9.5. Vypočtěte obsah plochy sevřené křivkami $y = x^2$ a $y = 2x$ (viz Obr. 9.5.).

Řešení:

Vypočteme průsečíky obou křivek z rovnice $x^2 = 2x$: $x_1 = 0$ $x_2 = 2$

$$S = \int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(0 - \frac{0}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Obsah dané plochy je 4/3. ■



Obr. 9.5.

Příklad 9.6. Vypočtěte obsah plochy sevřené křivkami $y = -(x-2)^2 + 1$ a $y = 3 - x$.

Řešení:

Horní křivka je kvadratická, dolní lineární (načrtněte si obrázek). Průsečíky obou křivek zjistíme řešením rovnice:

$-(x-2)^2+1=3-x$.

Po úpravě získáme kvadratickou rovnici v normovaném tvaru:

$x^2-5x+6=0$,

Odkud máme průsečíky $x_1=2$ a $x_2=3$.

Obsah plochy sevřené oběma křivkami je dán jako:

$$S=\int_2^3\left[-(x-2)^2+1-3+x\right]dx=dx=\int_2^3(-x^2+5x-6)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-6x\right]_2^3=\frac{1}{6}.\ ■$$

9.2 OBJEM ROTAČNÍHO TĚLESA

Objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky $y=f(x)$ kolem osy x na intervalu (a,b) počítáme ze vztahu:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Podobně lze vypočítat objem rotačního tělesa, pokud rotujeme křivku kolem osy y, pak jen zaměníme x za y.

Příklad 9.7. Vypočtěte objem tělesa (jde o *rotační paraboloid*), které vznikne rotací křivky $y=\sqrt{x}$ kolem osy x na intervalu $(a,b)=(0,3)$.

Řešení:

$$V=\pi\int_0^3\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\pi\int_0^3 xdx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3=\pi\left(\frac{3^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)=\frac{9}{2}\pi.\ ■$$

Příklad 9.8. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací křivky $y=x^2$ kolem osy x na intervalu $(1,2)$.

Řešení:

$$V=\pi\int_1^2\left(x^2\right)^2dx=\pi\int_1^2 x^4dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2=\pi\left(\frac{2^5}{5}-\frac{1^5}{5}\right)=\frac{31}{5}\pi.\ ■$$

Příklad 9.9. Vypočtěte objem tělesa (rotační hyperboloid), které vznikne rotací křivky $y=\dfrac{1}{x}$ kolem osy x na intervalu $(1,4)$.

Řešení:

$$V=\pi\int_1^4\left(\frac{1}{x}\right)^2dx=\pi\int_1^4\frac{1}{x^2}dx=\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^4=\pi\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{1}\right)=\frac{3}{4}\pi.\ ■$$

Další úlohy na objem těles lze najít např. v Godulová et. al. (2002).

9.3 CELKOVÝ PŘÍJEM JAKO URČITÝ INTEGRÁL INTENZITY TOKU PŘÍJMU

Celkový příjem může být v některých situacích dán jako součet toku příjmu za nějaké období. To je typické pro příjmy telefonních operátorů, obchodních řetězců, apod., kde lze tok příjmů považovat za *spojitý* (tyto společnosti inkasují od zákazníků každou sekundu), nebo *diskrétní*, což je případ nejrůznějších rent, dividend, apod. V obou případech lze intenzitu toku modelovat pomocí spojitých funkcí (které lze derivovat a integrovat).

Celkový příjem TR za období (t_1;t_2), jestliže funkce $f(t)$ vyjadřuje *intenzitu toku příjmu* (velikost renty) v čase t, se vypočte jako:

$$TR = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt \tag{9.4}$$

Příklad 9.10. Určete celkový příjem od 1 do 15 let, je-li hodnota renty v čase t (t jsou roky) dána funkcí $f(t) = \dfrac{120000}{t+5}$ Kč.

Řešení:
Využijeme vztah (9.4):

$$TR = \int_1^{15} \frac{120000}{t+5}\,dt = 120000\int_1^{15} \frac{1}{t+5}\,dt = 120000\big[\ln|t+5|\big]_1^{15} = 120000(\ln 15 - \ln 1) =$$

= 324966 Kč. ■

Příklad 9.11. Určete celkový příjem od 2 do 10 let, je-li hodnota renty v čase t (t jsou roky) dána funkcí $f(t) = \dfrac{50000}{e^t}$ Kč.

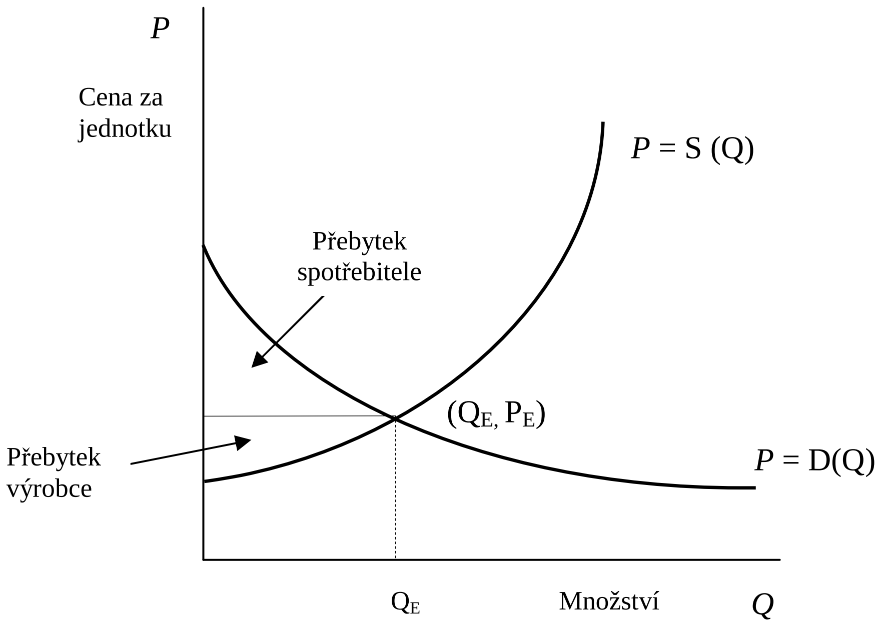
Řešení:

$$TR = \int_2^{10} \frac{50000}{e^t}\,dt = 50000\int_2^{10} e^{-t} = 50000\big[-e^{-t}\big]_2^{10} = 50000\left(-e^{-10} + e^{-2}\right) = 6767\,\text{Kč}.$$ ■

Analogicky lze zavést intenzitu toku i pro další ekonomické veličiny jako je zisk nebo náklady, ačkoli tyto situace již nejsou tak běžné.

9.4 PŘEBYTEK SPOTŘEBITELE A VÝROBCE V PODMÍNKÁCH DOKONALÉ KONKURENCE

Víme, že průsečík P_E je průsečíkem křivky nabídky a poptávky, a je nazývaný rovnovážná cena. Někdy jsou spotřebitelé ochotni zaplatit cenu, která je vyšší než rovnovážná cena P_E za každou jednotku produkce. V tomto případě spotřebitelé získávají tím, že jsou schopni koupit produkt za nižší cenu P_E.



Obr. 9.6. Zdroj: Godulová et. al. (2000).

Přebytek spotřebitele CS (customer surplus) je dán plochou oblasti nad horizontálou $P = P_E$ a pod křivkou poptávky, viz Obr. 9.6. Plocha této oblasti se vypočte jako plocha pod křivkou poptávky na intervalu $(0,Q_E)$ mínus plocha obdélníka s šířkou Q_E a výškou P_E. Přebytek spotřebitele *CS* je tedy:

$$CS = \int_0^{Q_E} D(Q)dQ - Q_E P_E \qquad (9.5)$$

Producent, který je ochoten nabízet produkt za cenu pod P_E, bude realizovat zisk z prodeje produktu za cenu P_E. *Přebytek výrobce PS* (*producer surplus*) je dán plochou oblasti pod horizontální křivkou $P = P_E$ a nad křivkou nabídky, viz Obr. 9.6. Graficky je *PS* určeno jako plocha obdélníka o šířce Q_E a výšce P_E mínus plocha oblasti pod křivkou nabídky na intervalu $(0, Q_E)$. Přebytek výrobce (*PS*) je tedy:

$$PS = Q_E P_E - \int_0^{Q_E} S(Q)dQ \qquad (9.6)$$

Příklad 9.12. Vypočtěte přebytek spotřebitele a přebytek výrobce v podmínkách dokonalé konkurence za předpokladu, že funkce nabídky $S(Q) = 4 + Q$ a funkce poptávky $D(Q) = \dfrac{54}{Q+1}$.

Řešení:
Začneme tím, že vypočteme rovnovážný bod Q_E:
$S(Q) = D(Q)$

$$4+Q=\frac{54}{Q+1},$$

Rovnici upravíme (jedná se o kvadratickou rovnici) a převedeme na normovaný tvar:

$$Q^2+5Q-50=0,$$

Řešením jsou body $Q_1=5$ a $Q_1=-10$, přičemž druhý kořen nemá ekonomický smysl. Proto je $Q_E=5$.

Přebytek spotřebitele vypočteme ze vztahu (9.5):

$$CS=\int_0^5 \frac{54}{Q+1}dQ-45=\left[54\ln|Q+1|\right]_0^5-45=54\ln 6-45=51,76.$$

Přebytek výrobce vypočteme ze vztahu (9.6):

$$PS=45-\int_0^5 (4+Q)\,dQ=45-\left[4Q+\frac{Q^2}{2}\right]_0^5=45-32,5=12,5. \blacksquare$$

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1. Vypočtěte obsah plochy pod (nad) danou křivkou na daném intervalu:

a) $y=x^2; x\in(1,3)$

[S = 26/3]

b) $y=x^3; x\in(-2,2)$

[S = 8]

c) $y=\frac{4}{x^2}; x\in(1,4)$

[S = 3]

d) $y=x^2+1; x\in(0,1)$

[S = 4/3]

e) $y=x^2+2x+3; x\in(1,3)$

[S = 68/3]

f) $y=-x^2+2; x\in(-1,1)$

[S = 10/3]

g) $y=x^2-4x+3; x\in(0,3)$

[S = 8/3]

h) $y=\frac{2}{x}; x\in(1,e)$

[S = 2]

i) $y=\sqrt{x+1}; x\in(-1,3)$

[S = 4/3]

2. Vypočtěte obsah plochy sevřené křivkami:

a) $y=x^2; y=x$

[S = 1/6]

b) $y=x^2; y=4x$

[S = 32/3]

c) $y = x^3; y = 9x$
[S = 81/4]

d) $y = \frac{x^3}{3}; y = x^2$
[S = 9/4]

3. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky $y = x + 1$ na intervalu $(0, 2)$.
[$V = \frac{26}{3}\pi$ j^3]

4. Vypočtěte přebytek spotřebitele a přebytek výrobce (v podmínkách dokonalé konkurence) za předpokladu, že funkce nabídky $S(Q) = Q^2 + 1$ a funkce poptávky $D(Q) = 11 - 3Q$.
[$Q_E = 2$, $CS = 6$, $PS = 16/3$.]

5. Vypočtěte celkový příjem vlastníka pozemku v čase $t = 0$ až 20 let, je-li hodnota renty dána funkcí $f(t) = 10000e^{-0,1t}$ Kč.
[86467 Kč]

10 NEKONEČNÉ ČÍSELNÉ ŘADY

10.1 POJEM NEKONEČNÉ ČÍSELNÉ ŘADY

Číselnými řadami se zabývali matematikové již od starověku, například Archimédes znal vzorec pro součet nekonečné geometrické řady. Známý je Zénónův paradox o Achillově a želvě: Achilles závodí s želvou a dá jí na začátku náskok 10 metrů. Když uběhne těchto 10 metrů, želva uběhne metr. Achilles uběhne tento metr, ale želva je stále před Achillem o 10 centimetrů, po uběhnutí těchto 10 cm bude stále želva napřed o 1 cm, a příběh pokračuje do nekonečna. Podle Zénóna Achilles želvu nikdy nedožene.

Starověcí matematikové byli přesvědčeni, že nekonečný součet kladných čísel (doba běhu Achilla, respektive želvy) musí být nekonečný. V tom se ale mýlili. Nekonečné řady mohou mít za jistých podmínek konečný součet, a problematikou součtu nekonečně mnoha čísel (nekonečné číselné řady) se budeme zabývat v této kapitole. Nejprve si definujeme základních pojmy:

Číselnou řadou nazýváme součet (reálných) čísel $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Je-li počet sčítanců konečný, mluvíme o *konečné číselné řadě*, je-li počet sčítanců nekonečný ($n \to \infty$), jedná se o *nekonečnou řadu*:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{10.1}$$

V dalším výkladu se budeme až na výjimky zabývat nekonečnými číselnými řadami (krátce jen „řadami“).

Veličina $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ se nazývá *n-tý částečný součet řady*. Je to součet prvních *n* členů řady. *Součet řady s* je pak limitou posloupnosti částečných součtů s_n:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \tag{10.2}$$

Chceme-li určit součet nekonečné řady podle vztahu (10.2), sečteme nejprve první 2 členy řady (získáme s_2), pak první 3 členy (s_3), první 4 členy (s_4) , a tak dále. Hodnota, ke které se blíží tyto částečné součty, je pak hledaný součet řady.

Jestliže má daná řada konečný součet, nazývá se *konvergentní*. V opačném případě, to jest když je součet nekonečný anebo vůbec neexistuje, je řada *divergentní*.

Řadu mohou obecně tvořit kladné i záporné členy, a proto musíme ještě rozlišovat *neabsolutní konvergenci* a *absolutní konvergenci*: řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ne, pak daná řada konverguje neabsolutně. Absolutní konvergence je tedy „silnější“, a je tomu tak proto, že u řady bez absolutních hodnot se mohou kladné a záporné členy řady částečně odečíst.

O konvergenci řad platí tato tvrzení:

1. Vynechání nebo přidání konečného počtu členů nemá vliv na konvergenci či divergenci řady.
2. Pokud daná řada konverguje absolutně, pak také konverguje neabsolutně. Opačné tvrzení neplatí.

Konvergenci (divergenci) řad zjišťujeme pomocí *podmínek konvergence* a/nebo užitím *kritérií konvergence*, které jsou obsahem následující kapitoly.

Příklad 10.1. Uvažujme dělení pizzy, při kterém nejprve ukrojíme polovinu pizzy, pak ukrojíme polovinu z toho, co zbylo (tedy čtvrtinu původní pizzy), pak ukrojíme polovinu zbytku (tedy osminu původní pizzy), atd. Tímto dělením získáme nekonečnou řadu: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...$

Částečné součty této řady jsou:

$s_1=\frac{1}{2}$,

$s_2=\sum_{i=1}^{2} a_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,

$s_3=\sum_{i=1}^{3} a_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$, atd.

Tyto částečné součty se blíží k jedné, a podle vztahu (10.2) je tedy součet řady s = 1. Nakonec odkrojíme celou pizzu (jednotku).

Tento ilustrační příklad ukazuje, že nekonečná řada skutečně může mít konečný součet – být konvergentní. Následující dvě ukázky představují divergentní řady. ■

Příklad 10.2. Určete součet následující nekonečné řady (takzvaná *Grandiho řada*): $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+1-1...$

Řešení:

Vypočteme částečné součty této řady: $s_1=1$, $s_2=0$, $s_3=1$, $s_4=0$, atd... Podle vztahu (10.2) je součtem řady s limita této posloupnosti, v níž se střídají 1 a 0. Taková posloupnost ale limitu nemá (členy této posloupnosti se neblíží ani k 1 ani k 0, neustále mezi nimi oscilují). Zadaná řada je tedy divergentní. ■

Příklad 10.3. Určete součet následující nekonečné řady: $\sum_{n=1}^{\infty} n=1+2+3+4+5+6+....$

Řešení:

Jedná se o řadu všech přirozených čísel. Je zřejmé, že tato řada bude mít nekonečný (a kladný) součet, neboť neustále přičítáme větší a větší (kladná) čísla. Řada je proto divergentní. ■

Příklady uvedené výše nás mohou vést k následujícím obecným otázkám týkajících se nekonečných řad:

- Má daná nekonečná řada konečný součet? (Jak to můžeme poznat?)
- Pokud ano, jaký je tento součet?

Odpověď na první otázku je předmětem následující kapitoly.

10.2 PODMÍNKY KONVERGENCE ŘAD, KRITÉRIA KONVERGENCE

Když se zamyslíme nad tím, proč je součet řady z příkladu 10.1 konečný a z příkladu 10.3 nekonečný, můžeme dojít k závěru, že řada z příkladu 10.1 má konečný součet proto, že k prvním členům přičítáme stále menší a menší čísla, takže částečné součty řady rostou pomaleji a pomaleji, až se začnou blížit k nějaké mezní hodnotě (součtu řady *s*). V příkladě 10.3 naopak přičítáme stále větší čísla, proto můžeme jen stěží očekávat, že by výsledný součet mohl být konečný.

Aby tedy řada měla konečný součet (aby konvergovala), musí splňovat *nutnou podmínku konvergence*:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (10.3)$$

Podmínka (10.3) říká, že členy řady se musí zmenšovat k nule. Ale tato podmínka sama o sobě ke konvergenci nestačí, viz následující příklad.

Příklad 10.4. Určete součet *harmonické řady*: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...$

Řešení:
Přestože se členy harmonické řady blíží k nule, a podmínka (10.3) je tedy splněna, ukážeme, že tento součet je nekonečný a harmonická řada je proto divergentní (tento důkaz podal již ve 14. století francouzský matematik Nicolas d´Oresme). Součet prvních dvou členů je 3/2. Součet dalších dvou členů je větší než ½, součet 5. až 8. členu je rovněž větší než ½, součet 9. až 16. členu je opět větší než ½, a tak můžeme pokračovat do nekonečna. Součet harmonické řady je tedy roven 3/2 plus nekonečnému násobku ½, což dává nekonečný součet. ■

Nutná podmínka konvergence má následující smysl: jestliže ji daná řada nesplňuje, pak je tato řada nutně divergentní. Pokud řada naopak nutnou podmínku konvergence splňuje, nedokážeme říci, zda konverguje nebo ne, potřebujeme ještě nějakou další podmínku.

Příklad 10.5. Je řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+4}{3n-1}$ konvergentní nebo divergentní?

Řešení:
Pokud daná řada konverguje, musí splňovat nutnou podmínku konvergence (10.3). Avšak daná řada tuto podmínku nesplňuje: $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{3n-1} = \frac{2}{3}$, a proto diverguje. ■

Podmínka, která s jistotou zaručuje konvergenci řady, se nazývá *postačující podmínka*. Takovou podmínku nalezli v 19. století matematikové L. A. Cauchy[7] a B. Bolzano[8], a proto se nazývá *Bolzano-Cauchyova nutná a postačující podmínka konvergence nekonečné řady*:

---

[7] L.A. Cauchy (1789-1857), francouzský matematik.
[8] B. Bolzano (1781-1848), český matematik.

***Věta 10.1**. (Bolzano-Cauchyova podmínka): Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *s kladnými nebo zápornými členy je konvergentní právě tehdy, když ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje přirozené číslo N takové, že pro* $n > N$ *a libovolné přirozené číslo p platí:* $\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} \right| < \varepsilon$.

Bolzano-Cauchyova podmínka je důležitá z teoretického hlediska, ale pro praktické zkoumání konvergence je výhodnější (jednodušší) užití *kritérií konvergence*. Nejprve se budeme zabývat kritérii konvergence pro řady s kladnými členy, a začneme *srovnávacím kritériem:*

***Věta 10.2.** (Srovnávací kritérium). Mějme dvě nekonečné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *a nechť platí* $a_n \geq b_n$ *pro všechna n větší než nějaký index k (tato podmínka říká, že od k-tého členu jsou všechny členy řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *větší než tytéž členy řady* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*). Nechť dále řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní. Potom také řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje. Řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nazýváme majorantou řady* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Srovnávací kritérium říká, že pokud k dané řadě ($\sum_{n=1}^{\infty} b_n$) najdeme nějakou konvergentní řadu ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$), jejíž členy jsou větší než členy dané řady, pak daná řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (což je logické, neboť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ obsahuje větší členy, a její součet je konečný, tudíž řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s menšími členy musí mít rovněž konečný (a menší) součet).

Analogicky můžeme rozhodnout o divergenci dané řady, pokud její členy jsou větší než členy jiné divergentní řady.

Často používanou řadou pro srovnávací kritérium je *Dirichletova*[9] *řada*: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Tato řada konverguje pro $\alpha > 1$. To znamená, že například $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,2}}$ je konvergentní ($\alpha = 1{,}2 > 1$), zatímco řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ je divergentní ($\alpha = 0{,}5$). Pro $\alpha = 1$ dostaneme již známou harmonickou řadu, která je divergentní.

[9] L.P. Dirichlet (1805-1859), francouzský matematik.

Příklad 10.6. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ pomocí srovnávacího kritéria.

Řešení:

Zadaná řada má členy $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, které jsou menší než členy $\frac{1}{n^2}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Tato řada je majorantou zadané řady, jedná se o Dirichletovu řadu, která je konvergentní ($\alpha = 2$). Proto podle srovnávacího kritéria konverguje i zadaná řada. ■

Příklad 10.7. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$ pomocí srovnávacího kritéria.

Řešení:

Zadaná řada má členy $\frac{1}{n \cdot 3^n}$, které jsou menší než členy $\frac{1}{3^n}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ je tedy majorantou zadané řady. Zároveň je to řada geometrická s kvocientem $q = \frac{1}{3}$, a tudíž je konvergentní. Proto konverguje i zadaná řada. ■

Nyní si uvedeme další kritéria konvergence řad pro řady s kladnými členy: podílové, odmocninové a integrální kritérium. Na závěr pak uvedeme jedno kritérium pro řady s alternujícími členy (řady, ve kterých se střídají kladné a záporné členy).

Věta 10.3. *(Limitní podílové kritérium). Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je nekonečná číselná řada s kladnými členy, a nechť* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. *Potom:*

- *Je-li* $L < 1 \Rightarrow$ *řada konverguje.*
- *Je-li* $L > 1 \Rightarrow$ *řada diverguje.*
- *Je-li* $L = 1 \Rightarrow$ *nelze rozhodnout.*

Toto kritérium používáme především tehdy, když daná řada obsahuje faktoriál.

Příklad 10.8. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ pomocí podílového kritéria.

Řešení:

Nejprve vypočteme limitu L: $L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)} = 0$.

Podle limitního podílového kritéria řada konverguje. ■

Příklad 10.9. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^5}$ pomocí podílového kritéria.

Řešení:

Vypočteme limitu L: $L=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)^5}}{\frac{e^n}{n^5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5e^{n+1}}{(n+1)^5e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{(n+1)^5}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}}{e^n}=1\cdot e=e$.

Protože $L > 1$, řada diverguje (mimochodem, řada nesplňuje ani nutnou podmínku konvergence). ■

Věta 10.4. *(Limitní odmocninové kritérium). Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *je nekonečná číselná řada s kladnými členy, a nechť* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$. *Potom:*

- *Je-li* $L<1\Rightarrow$ *řada konverguje.*
- *Je-li* $L>1\Rightarrow$ *řada diverguje.*
- *Je-li* $L=1\Rightarrow$ *nelze rozhodnout.*

Toto kritérium používáme především tehdy, když daná řada obsahuje *n* v exponentu.

Příklad 10.10. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$.

Řešení:

Použijeme limitní odmocninové kritérium: $L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{3}{5}$.

Protože $L=\frac{3}{5}<1$, řada konverguje. ■

Limitní podílové i odmocninové kritérium lze použít i pro řady se zápornými členy (v tom případě při výpočtu limity L počítáme s absolutními hodnotami členů řady).

Následující *integrální kritérium* je univerzální v tom smyslu, že pro ně není požadován nějaký speciální tvar řady. Pomocí tohoto kritérium navíc dokážeme rozhodnout o konvergenci i u řad, pro něž předešlá kritéria selhávají (například u harmonické řady).

Věta 10.5. *(Integrální kritérium). Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *je řada s kladnými členy,* $a_n=f(n)$, *a nechť* $f(x)$ *je spojitá a nerostoucí funkce na intervalu* $(a,+\infty)$. *Potom daná řada konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál* $\int_a^{+\infty}f(x)dx$.

Příklad 10.11. Rozhodněte o konvergenci harmonické řady.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x|\right]_1^{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty$$

Daný nevlastní integrál je nekonečný, proto řada diverguje. ■

Pro *alternující řady* ve tvaru $\sum_1^{\infty} (-1)^n a_n$ se používá *Leibnizovo*[10] *kritérium*. Alternující řady jsou řady, v nichž se střídají kladné a záporné členy. Střídání znamének členů řady způsobuje výraz $(-1)^n$.

***Věta 10.6.** (Leibnizovo kritérium). Nechť* $\sum_1^{\infty} (-1)^n a_n$ *je alternující řada a nechť platí:*

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ii) $a_{n+1} \le a_n, \forall n \in N$

Pak je řada $\sum_1^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ *konvergentní.*

Podmínka i) není nic jiného než nutná podmínka konvergence. Podmínka ii) říká, že každý následující člen řady musí být menší nebo rovna předchozímu členu (posloupnost a_n musí být nerostoucí). Pak tedy daná alternující řada konverguje.

Příklad 10.12. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ (*Leibnizova řada*).

Řešení:

Řada podle Leibnizova kritéria konverguje, neboť jsou splněny obě podmínky:

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

ii) $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}, \forall n \in N$ ■

10.3 Operace s řadami

Nekonečné řady můžeme za jistých podmínek násobit reálným číslem (různým od nuly), sčítat je a odčítat, nebo přerovnávat jejich členy. Následující příklad ukazuje, že při operacích s řadami musíme být opatrní.

[10] W.G. Leibniz (1646-1716), německý matematik a filozof.

Příklad 10.13. Určete součet řady $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1-1+1-1+\dots$

Řešení:

Nejprve přerovnáme („uzávorkujeme“) řadu takto: $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1} = (1-1)+(1-1)+\dots$

V tomto případě je řada součtem všech závorek, ale ty jsou rovny nule, a proto součet řady $s = 0$.

Nyní zkusíme jiné závorkování: $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1+(-1+1)+(-1+1)\dots$. Na začátku řady je 1, všechny následující závorky jsou rovny nule, a dostáváme $s = 1$.

Součet řady se tedy liší v závislosti na tom, jak členy přerovnáme (uzávorkujme)! Příčinou tohoto paradoxního výsledku je, že zadaná řada je divergentní. Je možné dokázat, že vhodným přerovnáním členů nekonečné *divergentní* řady lze dospět k libovolnému součtu!

U konvergentních řad k podobným paradoxům nedochází. ■

***Věta 10.7**. Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou konvergentní nekonečné řady,* $k \in R, k \neq 0$. *Potom platí:*

i) $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$

iii) Součet řady je nezávislý na přerovnání členů řady.

Bod i) říká, že když vynásobíme všechny členy řady konstantou k, pak se součet řady změní k krát. Bod ii) říká, že nezáleží na pořadí sčítání členů obou řad.

Příklad 10.14. Vypočtěte: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$

Řešení:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 2+3=5$$ ■

10.4 Geometrická řada

Jendou z nejjednodušších nekonečných řad je geometrická řada. Vznikne součtem členů geometrické posloupnosti. Připomeňme, že u geometrické posloupnosti je podíl každých dvou sousedních členů a_n a a_{n+1} stejný a roven kvocientu q: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \forall n \in N$.

Příkladem geometrické posloupnosti je například následující posloupnost s kvocientem $q = \frac{2}{3}$: $2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \dots$

Geometrická řada je jednou z mála nekonečných řad, u které známe vzorec pro součet prvních *n* členů a také součet celé nekonečné řady.

Součet prvních *n* členů geometrické posloupnosti lze vypočíst ze vztahu (10.4):

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{10.4}$$

Součet nekonečné řady získáme ze (10.4) jako limitu pro $n \to \infty$. Je-li $|q| < 1$, bude se člen q^n ve vztahu (10.4) zmenšovat k nule, a po jednoduché úpravě obdržíme hledaný vztah pro součet nekonečné geometrické řady:

$$s = \frac{a_1}{1 - q} \tag{10.5}$$

Pokud je tedy kvocient q v absolutní hodnotě menší než 1, je geometrická řada konvergentní. Ve všech ostatních případech (pro $|q| \geq 1$) je řada divergentní. Pro $q > 1$ budou totiž členy řady růst a nebude splněna nutná podmínka konvergence, pro $q < -1$ platí totéž, navíc bude řada střídat znaménka, pro $q = 1$ budou členy řady konstantní, a proto jejich součet bude nekonečný, a pro $q = -1$ obdržíme řadu podobnou té z příkladu 2, která nemá součet (a je tedy divergentní).

Příklad 10.15. Určete součet *s* geometrické řady: $s = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

Řešení:

Máme $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{3}$, a podle vztahu (10.5) je součet *s*: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$. ■

Příklad 10.16. Určete součet geometrické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Řešení:

Danou řadu můžeme rozepsat, abychom si ujasnili, jaký je její první člen a kvocient:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \left(\frac{2}{5}\right)^1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \dots = \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{8}{125} + \dots$$

Vidíme, že $a_1 = \frac{2}{5}$, $q = \frac{2}{5}$, a podle vztahu (10.5) je součet: $s = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{2}{3}$. ■

Následující příklad je varovný.

Příklad 10.17. Určete součet geometrické řady $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)^n$.

Řešení:

První člen $a_1 = 1$ (pozor, suma začíná pro n = 0!), $q = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$, $s = \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}} = 1-\sqrt{2}$

Při řešení této úlohy jsme se dopustili vážné chyby: neověřili jsme, zda je kvocient (v absolutní hodnotě) menší než 1! Ve skutečnosti je q větší než 1 (přibližně je q = 3,41), a tedy vztah (10.5) nesmíme použít! Zadaná řada je divergentní. ■

10.5 Další speciální typy nekonečných řad

Kromě geometrických řad lze určit součet řady i u takzvaných *teleskopických řad*. Teleskopickou řadou nazýváme řadu ve tvaru: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+k})$, kde $k \in N$. Svůj název obdržela řada proto, že pokud ji rozepíšeme člen po členu (vysuneme řadu jako teleskop), její členy se až na několik (k) členů na začátku řady vzájemně odečtou.

Součet teleskopické řady pro nejjednodušší případ k = 1 lze určit takto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n \qquad (10.6)$$

Podmínkou konvergence teleskopické řady je tedy konvergence samotné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Příklad 10.18. Určete součet řady: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Řešení:

Danou řadu upravíme takto: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$

Vidíme, že počínaje druhým členem se členy řady postupně po dvojicích odečtou. Proto je součet řady s = 1. Stejný výsledek bychom obdrželi i použitím vztahu (10.6). ■

Příklad 10.19. Určete součet řady: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+2n}$.

Řešení:

Daná řada, i když to na první pohled nemusí být patrné, je teleskopická, a její součet bude 3/2:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

■

10.6 EKONOMICKÉ APLIKACE NEKONEČNÝCH ŘAD

V ekonomii jsou samozřejmě všechny číselné řady konečné. Některé řady však mohou obsahovat velký počet stále menších a menších členů, takže je lze aproximovat (přibližně vyjádřit) pomocí nekonečných řad. Typickým ekonomickým odvětvím, ve které se setkáme s řadami, je bankovnictví a finance (a možná překvapivě i zábavní průmysl). Asi nejdůležitější aplikací nekonečných řad je výpočet současné hodnoty pravidelně se opakujících (konstantních) plateb v budoucnosti, například anuity. Díky diskontování budoucnosti a inflaci se ve skutečnosti současná hodnota těchto plateb neustále snižuje, a takto vzniká nekonečná geometrická řada, jejíž součet je možné určit ze vztahu (10.5).

Příklad 10.20. Rentiér pan X obdrží od společnosti Y každý rok 1000 eur až do své smrti. Jakou *současnou hodnotu* má celková částka, kterou obdrží pan X? První platbu obdrží pan X dnes.

Řešení:
Nejprve si uvědomme, že 1000 eur dnes nemá tutéž hodnotu jako 1000 eur za rok nebo třeba za třicet let. Za prvé reálná hodnota jakékoli měny klesá kvůli inflaci, za druhé je nutné vzít v úvahu diskontování budoucnosti: 1000 eur v budoucnosti nepřikládáme stejnou hodnotu jako 1000 eur dnes (1000 eur v budoucnosti má menší hodnotu, protože tento čas je „ještě daleko“).

Současná hodnota (*present value*) 1000 eur za 1 rok je rovna $\frac{1000}{1+i+r}$, kde i je inflace a r diskontní míra. Řekněme, že $i+r=0,07$ (7 %). Potom 1000 eur za rok má *nyní* hodnotu pouze $\frac{1000}{(1+i+r)^1}=934,6$ euro. 1000 eur za dva roky má dnes hodnotu $\frac{1000}{(1+i+r)^2}$ a tak dále. Dostáváme tedy řadu:

$$\frac{1000}{(1+i+r)^0}+\frac{1000}{(1+i+r)^1}+\frac{1000}{(1+i+r)^2}+\frac{1000}{(1+i+r)^3}+...=1000+934,6+873,4+....$$

Jaký je součet této řady? Předpokládejme, že pan X bude žít ještě dlouho (dejme tomu 40 let), potom můžeme tento součet určit jako součet nekonečné geometrické řady s prvním členem $a_1=1000$ a kvocientem $q=\frac{1}{1,07}=0,93458$:

$$s=\frac{1000}{1-0,93458}=15286$$

Současná hodnota celé renty pana X je tedy přibližně 15 300 euro. Tato suma poskytuje důležitou informaci i pro společnost Y: částka je maximem toho, co firma panu X vyplatí (rovnost by nastala, pokud by pan X žil nekonečně dlouho). Výhodou užití nekonečné řady je rychlost a snadnost výpočtu, a také skutečnost, že při jiných hodnotách i a r nemusíme znovu provádět součet všech členů řady, ale stačí jen dosadit nové hodnoty do vztahu (10.4). Nevýhodou tohoto postupu je, že se dopouštíme určité chyby (nadhodnocení) při určení součtu řady (přesný součet této řady pro prvních 40 členů je 14 265 eur). ■

Příklad 10.21. Filmová studia mohou odhadnout celkové příjmy ze vstupného z daného filmu ze znalosti příjmů z prvního (premiérového) víkendu a předpokládaného procentuálního poklesu tržeb o dalších víkendech. Pokud při premiérovém víkendu film utrží například 70 milionů dolarů, a každý další víkend návštěvnost filmu klesá dejme tomu o 30 % (podle magazínů specializovaných na show business činí týdenní poklesy příjmů průměrně kolem 45-50 %). Určete horní odhad celkového příjmu filmu.

Řešení:
Celkové příjmy ze vstupného můžeme vyjádřit jako řadu (v milionech dolarů):

$$s = 70 + 49 + 34,3 + 24 + \ldots$$

Tato řada je geometrická s kvocientem q = 0,7. Je tedy konvergentní a bude mít konečný součet. Řada je samozřejmě konečná, protože film se nebude (ani nemůže) promítat nekonečně dlouho, obvykle trvá promítání v kinech půl roku, což je 26 týdnů. Řada tedy bude mít 26 sčítanců. Protože však jsou tyto sčítance menší a menší, nedopustíme se příliš velké chyby, pokud budeme řadu považovat za nekonečnou a aplikujeme na ni vztah (10.5) pro výpočet součtu nekonečné geometrické řady:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{70}{1-0,7} = 233,3$$

Film tedy utrží přibližně (pamatujeme, že jde o horní odhad) 233,3 milionu dolarů. Jak se tato hodnota liší od přesné hodnoty (součtu 26 sčítanců)? Jak by se změnily příjmy z filmu, pokud by počet diváků klesal jen o 10 % za víkend?
[Odpověď na 1. otázku: rozdíl je naprosto zanedbatelný. Odpověď na 2. otázku: 700 mil. dolarů.] ■

Podobným způsobem by bylo možné vyčíslit příjmy například z prodeje knihy či hudebního nosiče, jejichž prodej rovněž postupně klesá. Další možnou aplikací nekonečných řad je (přibližné) určení současné hodnoty životní pojistky, neboť jde také o konstantní platbu, která je prováděna většinou po velmi dlouhou dobu (do smrti pojištěnce), nebo dluhopisu.

Současná hodnota (*PV*) dluhopisu s anuitou a a úrokovou mírou r se vypočte podle následujícího vzorce:

$$PV = \sum_{t=1}^{\infty} a(1+r)^{-t} = \frac{a}{r} \qquad (10.7)$$

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1. Prodej knihy klesá každý týden o 15 %. První týden se prodalo 220 kusů. Určete celkový prodej knihy.
[1 467 knih]

2. Roční příjem je 20 000 Kč, a každým rokem se bude o 4 % zvyšovat. Určete celkový příjem za 10 let.
[240 122 Kč]

3. Určete současnou hodnotu *PV* dluhopisu, je-li a = 1200 Kč a r = 5 %.
[24 000 Kč]

4. Rozhodněte, zda-li je daná řada geometrická, pokud ano, určete její součet.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ [ano, $a_1=\frac{2}{3}$, $q=\frac{2}{3}$, $s=2$]

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$ [ano, $a_1=1$, $q=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $s=\frac{3}{3-\sqrt{3}}$]

c) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\cdot 2^{2n-1}$ [ano, $a_1=6$, $q=12$, $s=+\infty$ (řada je divergentní)]

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$ [jde o součet dvou geometrických řad: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, s = 3/2]

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1}$ [ano, $a_1=\frac{36}{25}$, $q=\frac{6}{5}$, $s=+\infty$ (řada je divergentní)]

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{2}$ [není geometrická]

g) $\sum_{n=1}^{\infty}(4n-3)$ [není geometrická]

h) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ [ano, $a_1=\frac{3}{5}$, $q=-\frac{3}{5}$, $s=\frac{3}{8}$]

5. Určete součet řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ [$s=1/2$]

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(n+1)(n+2)}$ [$s=3/2$]

6.) Rozhodněte o konvergenci/divergenci řady:

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ [diverguje podle srovnávacího kritéria]

b) $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}$ [diverguje podle srovnávacího kritéria]

c) $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$ [konverguje podle podílového kritéria]

d) $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{n^2}{8^n}$ [konverguje podle odmocninového kritéria]

e) $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+6}$ [diverguje, není splněna nutná podmínka konvergence]

f) $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{n-2}{2n+1}$ [diverguje, není splněna nutná podmínka konvergence]

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(n^2+1\right)\right)^n$ [diverguje, není splněna nutná podmínka konvergence]

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$ [konverguje podle odmocninového kritéria]

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$ [diverguje podle srovnávacího kritéria]

j) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ [diverguje podle integrálního kritéria]

k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ [konverguje podle srovnávacího kritéria]

l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ [konverguje podle srovnávacího kritéria]

7. Rozhodněte o konvergenci alternujících řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+200}$ [konverguje podle Leibnizova kritéria]

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}$ [konverguje podle Leibnizova kritéria]

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 3^n$ [diverguje, není splněna nutná podmínka konvergence]

11 NEKONEČNÉ FUNKČNÍ ŘADY

11.1 NEKONEČNÁ FUNKČNÍ ŘADA A JEJÍ SOUČET

Pojem nekonečné číselné řady můžeme zobecnit: místo čísel jako členů řady můžeme uvažovat o *funkcích*. Nekonečná řada, jejíž členy jsou funkce, se nazývá *nekonečná funkční řada*.

Souvislost mezi nekonečnou číselnou řadou a nekonečnou funkční řadou si ukážeme v následujícím příkladě.

Ilustrační příklad 11.1. Je dána funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$. Vytvořte z této funkční řady číselné řady pro $x = 1/2$ a $x = 2$.

Řešení:

Dosadíme nejprve $x = 1/2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$. Dostali jsme tak úvodní číselnou řadu z předchozí Kapitoly 10, která ilustrovala dělení pizzy. Tato řada je konvergentní a její součet je 1.

Nyní dosadíme $x = 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n = 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$ Tato řada je divergentní, neboť její součet je plus nekonečno. ■

Na základě tohoto příkladu můžeme konstatovat, že funkční řady jsou zobecněním číselných řad. Číselnou řadu získáme z funkční řady tak, že do funkční řady dosadíme za proměnnou x vhodné reálné číslo. Dále si můžeme všimnout, že pro některé hodnoty x je funkční řada konvergentní (v našem případě pro $x = 1/2$), zatímco pro jiné hodnoty x může být řada divergentní (například pro $x = 2$). I u funkčních řad má tedy smysl určovat, zda jsou konvergentní, nebo ne (ve skutečnosti patří tento problém mezi ty nejdůležitější).

Nyní si definujeme nejdůležitější pojmy.

Nechť $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... je posloupnost funkcí. *Nekonečná funkční řada* je symbol:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$$

Součet funkční řady je funkce $s(x)$, kterou získáme (stejně jako u nekonečných číselných řad) jako limitu posloupnosti částečných součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$$

Řada je *konvergentní*, jestliže funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ konverguje k funkci $s(x)$ na jisté množině M.

Pokud k $s(x)$ konverguje i řada absolutních hodnot $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$, hovoříme o *absolutní konvergenci*.

Množina všech $x \in M$, pro které řada konverguje (konverguje absolutně), se nazývá *obor konvergence* (*obor absolutní konvergence*), a v dalším textu bude značen jako *OK* (*OAK*).

K určení oboru (absolutní) konvergence používáme kritéria konvergence podobně jako u číselných řad (viz Kapitola 10). Nejčastěji používanými kritérii jsou podílové kritérium a odmocninové kritérium, resp. jejich limitní podoba:

- podílové kritérium: $L(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}$ (11.1)
- odmocninové kritérium: $L(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|}$ (11.2)

Pokud $L(x)<1$, řada pro dané x absolutně konverguje, pro $L(x)>1$ diverguje a pro $L(x)=1$ nelze podle daného kritéria rozhodnout.

Pokud řada obsahuje pouze kladné členy, *OAK* splývá s *OK*. Pokud má řada i záporné členy, mohou se *OK* a *OAK* lišit v krajních bodech oboru konvergence. Přitom vždy platí, že $OAK \subseteq OK$.

11.2 Mocninná řada

Mocninná řada je speciálním případem obecné funkční řady, a je dána následujícím předpisem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a)^1 + c_2(x-a)^2 + \dots$$

Mocninná řada konverguje absolutně na intervalu $(a-\rho, a+\rho)$, kde a je střed řady a ρ je *poloměr konvergence*. Tento interval se nazývá *interval konvergence* (*IK*). Interval konvergence je souměrný podle středu *a*, a obsahuje všechna *x*, která mají od středu menší vzdálenost než ρ. Poloměr intervalu konvergence ρ se vypočte pomocí následujících limit:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \tag{11.3}$$

nebo

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \tag{11.4}$$

V krajních bodech intervalu $a+\rho$, $a-\rho$, řada může, ale nemusí konvergovat, a proto se tyto případy musí vyšetřit zvlášť. Obecně pak platí: $IK \subseteq OAK \subseteq OK$.

Příklad 11.2. Určete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$.

Řešení:

Řada je mocninná se středem $a = 2$ a $c_n = n$. Poloměr konvergence ρ určíme na základě vztahu (11.4):

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|n|}} = 1.$$

Tím dostáváme: $IK = (a-\rho, a+\rho) = (2-1, 2+1) = (1,3)$.

Zvolíme-li číslo z intervalu *IK*, například 2,5, můžeme se přesvědčit, že daná řada bude konvergentní.
K určení oboru konvergence ještě musíme vyšetřit krajní body $x = 1$ a $x = 3$.
Do zadané řady dosadíme nejprve $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$$

Tato (číselná) řada je však divergentní, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence.
Nyní do dané řady dosadíme $x = 3$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(3-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n = +\infty$$

Tato číselná řada je součtem všech přirozených čísel, a je tedy divergentní. Proto můžeme učinit závěr: *OK* = *OAK* = *IK* ■

Příklad 11.3. Určete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^n}$.

Řešení:

Řada je mocninná se středem $a = -4$ a $c_n = \frac{1}{3^n}$. Poloměr konvergence ρ určíme na základě vztahu (11.4):

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{3^n}\right|}} = 3.$$

Odtud dostáváme: $IK = (a-\rho, a+\rho) = (-4-3, -4+3) = (-7, -1)$.

K určení oboru konvergence ještě musíme vyšetřit krajní body $x = -1$ a $x = -7$.
Do zadané řady dosadíme nejprve $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+4)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$$

Vzniklá číselná řada obsahuje součet nekonečně mnoha 1, proto je divergentní.
Nyní do dané řady dosadíme $x = -7$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-7+4)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

Dostáváme oscilující číselnou řadu, v níž se střídají +1 a –1, taková řada nemá součet (je divergentní). Obor konvergence *OK* je tedy totožný s intervalem konvergence (*OK* = *OAK* = *IK*). ■

Příklad 11.4. Určete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+5)$.

Řešení:
Řada je mocninná se středem a = –5 a $c_n = n!$. Poloměr konvergence ρ určíme na základě vztahu (11.3):

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Poloměr konvergence je 0. Tento zvláštní výsledek znamená, že daná řada konverguje pouze pro střed řady (pro x = –5, kdy řada obsahuje samé nuly), a v žádném dalším bodě x. Interval konvergence se tak „smrskl“ do jediného bodu. Příčinou je výraz $n!$ v zadání řady, který pro rostoucí n velmi rychle roste (faktoriál patří mezi nejrychleji rostoucí funkce), zvětšuje tím členy v součtu řady a způsobuje, že výsledný součet řady je příliš velký (nekonečný). ■

Příklad 11.5. Určete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{n^3}$.

Řešení:

Řada je mocninná se středem a = –1 a $c_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$.

Poloměr konvergence ρ určíme na základě vztahu (11.4):

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)}{n^3}\right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{1} = 1.$$

Odtud dostáváme: $IK = OAK = (a-\rho, a+\rho) = (-1-1, -1+1) = (-2, 0)$.

Ještě vyšetříme (neabsolutní) konvergenci v krajních bodech x = –2 a x = 0:

x = –2: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-2+1)^n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Tato řada je konvergentní (podle srovnávacího kritéria a srovnání s harmonickou řadou).

x = 0: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(0+1)^n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$.

Tato řada je opět konvergentní (podle Leibnizova kritéria).

Obor konvergence dané řady: $OK = \langle -2, 0 \rangle$. V tomto případě se OK nerovná OAK. ■

11.3 GEOMETRICKÁ ŘADA

Geometrickou řadou nazýváme řadu ve tvaru: $\sum_{n=1}^{\infty} f^n(x)$,

Označíme-li $f(x) = q$, pak řada konverguje pro $|q| < 1$, a součet řady:

$$s(x) = \frac{a_1}{1-q} \qquad (11.5)$$

Pro geometrické řady platí: $IK = OK = OAK$. Všechny obory konvergence jsou tedy totožné.

Příklad 11.6. Určete obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

Řešení:

Nejprve můžeme řadu rozvinout, abychom viděli, jaké členy ji tvoří:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

Tato řada je mocninná a zároveň i geometrická s prvním členem a kvocientem rovným x. Z Kapitoly 10 o geometrických řadách víme, že geometrická řada je konvergentní, pokud platí $|q| < 1$, v našem případě tedy máme $|x| < 1$ a obor konvergence $OK = (-1,1)$. Čtenář se sám může přesvědčit, že hodnoty x = 1 a x = –1 již do oboru konvergence nepatří. ■

Příklad 11.7. Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ pro její obor konvergence.

Řešení:

K určení součtu řady na jejím oboru konvergence $OK = (-1,1)$ využijeme vztah (11.5):

$a_1 = x$, kvocient $q = x$, a tedy $s(x) = \dfrac{x}{1-x}$.

Pokud bychom nyní zvolili jakékoli $x \in (-1,1)$, například x = 0,5, stačí toto číslo dosadit do vztahu $s(x) = \dfrac{x}{1-x}$ a máme součet řady: $s(0,5) = \dfrac{0,5}{1-0,5} = 1$ (což je známý součet naší „pizzové“ řady).

Význam odvozeného vztahu pro součet řady zadané výše: $s(x) = \dfrac{x}{1-x}$ spočívá v tom, že udává součet všech číselných řad, které vzniknou dosazením libovolné hodnoty x z intervalu $(-1,1)$. ■

Příklad 11.8. Určete obor konvergence a součet řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+3}\right)^n$.

Řešení:

Řadu můžeme rozvinout: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+3}\right)^n = \frac{1}{x+3}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{(x+3)^3}+\ldots$

Odtud je zřejmé, že $a_1 = \frac{1}{x+3}$, a kvocient $q = \frac{1}{x+3}$.

Podmínka konvergence je $|q| = \left|\frac{1}{x+3}\right| < 1$. Tuto nerovnost rozdělíme na dvě:

I. $\frac{1}{x+3} < 1$

II. $-1 < \frac{1}{x+3}$, $x \neq -3$

Řešení I.:
Nerovnici budeme řešit převodem na podílový tvar (na levé straně nerovnice bude zlomek, napravo pouze nula). Začneme tím, že převedeme „1“ nalevo a upravíme na společný jmenovatel:

$$\frac{1}{x+3} - 1 < 0$$

$$\frac{1-(x+3)}{x+3} < 0$$

$$\frac{-x-2}{x+3} < 0$$

Na levé straně nerovnice máme dva nulové body: $x = -2$ a $x = -3$. Tyto dva nulové body nám rozdělí číselnou osu na tři otevřené intervaly: $(-\infty, -3)$, $(-3, -2)$ a $(-2, \infty)$. Nyní metodou znamének rozhodneme, který interval je řešením dané nerovnice. Zvolíme libovolné číslo z prvního intervalu, například $x = -10$ a dosadíme ho do nerovnice výše. Vyjde záporné číslo. Nad první interval si zapíšeme znaménko “–“. (Je vhodné kreslit si obrázek s číselnou osou). Podobně postupujeme i u dalších intervalů. Druhý interval nese znaménko “+“ a třetí opět “–“. Protože v dané nerovnici požadujeme, aby byl výraz vlevo menší než nula, čili záporný, je řešením první a třetí interval: $(-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$, přičemž nulové body do řešení nepatří.

Řešení II.: postupujeme analogicky jako v případě I.

$$-1 < \frac{1}{x+3}$$

$$-1 - \frac{1}{x+3} < 0$$

$$\frac{-x-3-1}{x+3} < 0$$

$$\frac{-x-4}{x+3} < 0$$

Z levé strany nerovnice získáme nulové body $x=-4$ a $x=-3$, které nám rozdělí číselnou osu opět na tři otevřené intervaly: $(-\infty,-4)$, $(-4,-3)$ a $(-3,\infty)$. Opět použijeme znaménkovou metodu: Zvolíme libovolné číslo z prvního intervalu, například $x=-8$ a dosadíme ho do nerovnice výše. Vyjde záporné číslo. Nad první interval si zapíšeme znaménko "–". Podobně postupujeme i u dalších intervalů. Druhý interval nese znaménko "+" a třetí opět "–". Protože v dané nerovnici požadujeme, aby byl výraz vlevo menší než nula, čili záporný, je řešením první a třetí interval: $(-\infty,-4)\cup(-3,\infty)$, přičemž nulové body do řešení nepatří.

Nyní, když máme vyřešeny obě nerovnice I. a II., určíme obor konvergence jako průnik řešení obou nerovnic. Pokud si řešení každé nerovnice vyznačíme graficky na číselné osy pomocí šipek, pak průnik najdeme jako tu část číselné osy, nad kterou se šipky překrývají.

V našem případě dostáváme: $OK=(-\infty,-4)\cup(-2,\infty)$.

Nakonec ještě určíme součet dané řady pro $x\in OK$:

$$s(x)=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{x+3}}{1-\frac{1}{x+3}}=\frac{\frac{1}{x+3}}{\frac{x+2}{x+3}}=\frac{1}{x+2}.$$ ■

Příklad 11.9. Určete obor konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty}\ln^n x$.

Řešení:

Řadu opět můžeme pro názornost rozvinout na jednotlivé členy:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\ln^n x=1+\ln x+\ln^2 x+\ln^3 x+\ldots$$

Vidíme, že první člen $a_1=1$ a kvocient $q=\ln x$.

Pro konvergentní geometrickou řadu platí, že $|q|<1$, a tedy $|\ln x|<1$. Tuto nerovnici rozdělíme na dvě jednodušší nerovnosti bez absolutní hodnoty:

I. $\ln x<1$

II. $-1<\ln x$

Tyto dvě nerovnice nyní vyřešíme.

Začneme nerovnicí I.:

$\ln x<1 \;\Rightarrow\; x<e$ (výsledek plyne přímo z definice přirozeného logaritmu, neboť je $\ln e=1$).

Nerovnice II.:

$-1<\ln x\Rightarrow x>e^{-1}=\frac{1}{e}$ (neboť $\ln\frac{1}{e}=-1$).

Dostali jsme pro x dvě podmínky: $x<e$ a zároveň $x>\frac{1}{e}$. Oborem konvergence je tedy interval $\left(\frac{1}{e},e\right)$. ■

Příklad 11.10. Určete obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$.

Řešení:

Pro větší názornost řadu opět rozvineme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx} = e^{x} + e^{2x} + e^{3x} + ...$$

Z rozvoje výše je zřejmé, že první člen $a_1 = e^x$ a kvocient $q = e^x$.

Pro konvergentní geometrickou řadu platí, že $|q| < 1$, a tedy $|e^x| < 1$. Tuto podmínku opět rozdělíme na dvě jednodušší nerovnice:

I. $e^x < 1$

II. $-1 < e^x$

Nejprve vyřešíme nerovnici I.: $e^x < 1 \;\Rightarrow\; x < 0$ (neboť $e^0 = 1$).

Řešení nerovnice II. je jednoduché: nerovnost $-1 < e^x$ je splněna pro všechna *x*.

S přihlédnutím k oběma podmínkám dostáváme obor konvergence *OK* = $(-\infty, 0)$. ■

11.4 Obecné funkční řady

Funkční řady, které nejsou ani mocninné, ani geometrické, můžeme nazvat obecné.

Příklad 11.11. Určete obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{nx}}{n}$.

Řešení:

Tato řada není ani geometrická, ani mocninná. Protože obsahuje výraz $(-1)^n$, pravidelně se v ní střídají kladné a záporné členy. U takových řad nejprve dáme všechny členy řady do absolutní hodnoty, aby řada měla pouze kladné členy. A zjistíme obor absolutní konvergence *OAK*. Teprve poté se zabýváme konvergencí původní řady, tedy řady i se zápornými členy.

K vyšetření absolutní konvergence řady použijeme limitní odmocninové kritérium (11.2):

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{e^{nx}}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{nx}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e^{nx}}}{\sqrt[n]{n}} = e^x \text{, (limita jmenovatele je 1).}$$

Řada je konvergentní, pokud $L < 1$, dostáváme tak podmínku: $e^x < 1$, a řešení: $x < 0$.

Proto obor absolutní konvergence $OAK = (-\infty, 0)$.

Nyní se vrátíme k původní řadě, která měla pravidelně se střídající kladné a záporné členy. Tato řada může (neabsolutně) konvergovat v krajních bodech *OAK*, tedy v bodě *x* = 0. Tento případ se vždy musí vyšetřit zvlášť.

Nechť je tedy *x* = 0, dosadíme do dané řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{nx}}{n}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \text{, (neboť } e^0 = 1 \text{)}$$

S touto řadou jsme se již setkali v Kapitole 10, a proto víme, že konverguje (podle Leibnizova kritéria).
Můžeme tedy shrnout, že obor konvergence zadané řady $OK = \left(-\infty, 0\right\rangle$. Obor konvergence obsahuje navíc oproti oboru absolutní konvergence bod $x = 0$. ■

Příklad 11.12. Určete obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg^n x}{n^2}$.

Řešení:
K vyšetření konvergence řady použijeme limitní odmocninové kritérium (11.2):

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left|arctg^n x\right|}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\left|arctg^n x\right|}}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{\left|arctgx\right|}{1} = \left|arctgx\right|.$$

Řada je konvergentní, pokud je $L < 1$, a tedy $\left|arctgx\right| < 1$. Tuto podmínku lze zapsat jako dvě jednodušší podmínky (nerovnice):
I. $arctgx < 1$
II. $-1 < arctgx$

Z tabulek goniometrických funkcí zjistíme, že $arctg\frac{\pi}{4} = 1$ a $arctg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$. Z těchto „hraničních“ hodnot a ze znalosti grafu funkce $y = arctgx$ plyne, že obor konvergence je interval $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Ještě ale musíme vyšetřit krajní body tohoto intervalu.

Nechť $x = \frac{\pi}{4}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg^n \frac{\pi}{4}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
Tato řada je konvergentní (podle srovnávacího kritéria a srovnání s harmonickou řadou). Snadno se ověří, že i pro $x = -\frac{\pi}{4}$ řada konverguje.

Proto výsledný obor konvergence $OK = \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle$. ■

Mezi funkční řady patří samozřejmě i Taylorovy resp. Maclaurinovy řady, kterými jsme se zabývali v Kapitole 2. Nekonečné funkční řady umožňují integraci a derivaci složitých funkcí převedením na řadu jednodušších funkcí, viz např. Černý (2002). Tím se však už zabývat nebudeme.

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1. Určete *IK*, *OK* a *OAK* u následujících řad, u geometrických řad určete i jejich součet.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n$

[geometrická i mocninná řada, $IK = OK = OAK = (0,2)$, $s(x) = \frac{x-1}{2-x}$]

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n}$

[mocninná řada, $IK = OAK = (-3,-1)$, $OK = \langle -3,-1)$]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

[mocninná řada, $IK = OK = OAK = (-1,1)$]

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+3)^n}{n2^n}$

[mocninná řada, $IK = OAK = (-5,-1)$, $OK = (-5,-1\rangle$]

e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{x}{x+2}\right)^n$

[geometrická řada, $a_1 = \frac{x}{x+2}$, $q = -\frac{x}{x+2}$ $IK = OAK = OK = (-1,\infty)$, $s(x) = \frac{x}{2x+2}$]

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$

[obecná řada, $IK = OAK = OK = (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$]

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

[mocninná řada, $a = 0$, $\rho = 1$, $IK = OAK = (-1,1)$, $OK = \langle -1,-1)$]

h) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(2n-1)(2n+1)}$

[mocninná řada, $a = 0$, $\rho = 1$, $IK = (-1,1)$, $OK = OAK = \langle -1,1\rangle$]

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$

[mocninná řada, $a = -3$, $\rho = 1$, $IK = (-4,-2)$, $OK = OAK = \langle -4,-2\rangle$]

j) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^{n+1}(x+1)$

[geometrická řada, $a_1 = \ln^2(x+1)$, $q = \ln(x+1)$, $IK = OK = OAK = \left(\frac{1-e}{e}, e-1\right)$,

$s(x) = \frac{\ln^2(x+1)}{1-\ln(x+1)}$]

12 ÚVOD DO OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

12.1 ZÁKLADNÍ POJMY

Mějme funkci jedné proměnné $y = f(x)$. Diferenciální rovnice je rovnice, která kromě x a y obsahuje i derivaci (derivace) funkce y. *Řád diferenciální rovnice* je určen nejvyšší derivací, mocnina u nejvyšší derivace určuje *stupeň diferenciální rovnice*.

Příklady:

$y' + 5y = x^2$ je diferenciální rovnicí 1. řádu 1. stupně

$(y')^2 - 6xy' - 5y = 0$ je diferenciální rovnicí 1. řádu 2. stupně.

$(y'')^3 - (y')^5 x^2 - y^8 + 5x = 0$ je diferenciální rovnice 2. řádu 3. stupně.

Diferenciální rovnice lze dále dělit například na *obyčejné* a *parciální* (budeme se zabývat jen těmi prvními), a na *lineární* a *nelineární* (budeme se zabývat vesměs jen těmi prvními). Nejjednodušším typem diferenciálních rovnic jsou rovnice se separovatelnými proměnnými (viz Kapitola 12.2), a lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty (viz Kapitoly 12.7 a 12.8).

Rozlišujeme tři druhy řešení diferenciální rovnice:

- *Obecné řešení* je funkce $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ vyhovující dané rovnici a obsahující (neurčité) konstanty C_i podobně jako u neurčitého integrálu.
- *Partikulární řešení* dostaneme z obecného řešení tak, že za konstanty C_i dosadíme nějaké konkrétní hodnoty, které mohou vyplývat například z takzvaných počátečních nebo okrajových podmínek (pro danou hodnotu x je předepsána hodnota funkce y a/nebo hodnota její derivace. Grafickým znázorněním partikulárního řešení je *integrální křivka*.
- *Singulární řešení* je řešení, které nelze získat z obecného řešení pro žádné hodnoty C_i, často se jedná o „zvláštní“ funkce typu $y = 0$, apod.

Příklad 12.1. Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' - y = 0$.

Řešení:

Uhádneme, že řešením je funkce $y = C \cdot e^x$.

Výsledek si ověříme dosazením ($y' = C \cdot e^x$): $C \cdot e^x - C \cdot e^x = 0$. ■

Příklad 12.2. Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = x$. Určete i partikulární řešení, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 2$.

Řešení:

Rovnici přímo integrujeme a získáme obecné řešení: $y = \frac{x^2}{2} + C$.

Partikulární řešení získáme dosazením podmínky do obecného řešení (dosazujeme $y = 2$, $x = 0$): $2 = \frac{0^2}{2} + C$, odtud $C = 2$. Partikulární řešení: $y = \frac{x^2}{2} + 2$. ■

Příklad 12.3. Určete obecné řešení rovnice $y' = 4x + 2$, a dále partikulární řešení pro y (1) = 2.

Řešení:
Rovnici přímo integrujeme a získáme obecné řešení: $y = 2x^2 + 2x + C$. Partikulární řešení získáme dosazením podmínky do obecného řešení (dosazujeme y = 2, x = 1):
$2 = 2 + 2 + C$, odtud C = –2.
Partikulární řešení má tvar: $y = 2x^2 + 2x - 2$. ■

Příklad 12.4. Určete obecné řešení rovnice $y'' = 2 + e^x$, a dále partikulární řešení pro $y(0) = 2$ a $y'(0) = 1$.

Řešení:
Daná rovnice je druhého řádu, proto ji budeme integrovat dvakrát.
Poprvé: $y' = 2x + e^x + C_1$
Podruhé: $y = x^2 + e^x + C_1 x + C_2$
Druhou integrací jsme obdrželi výsledné obecné řešení. Nyní dosadíme do obecného řešení obě počáteční podmínky:
$y'(0) = 1 = 0 + 1 + C_1$, odkud je $C_1 = 0$.
$y(0) = 2 = 0 + 1 + C_2$, odkud je $C_2 = 1$.
Partikulární řešení má tedy tvar: $y = x^2 + e^x + 1$. ■

V ekonomii využíváme diferenciální rovnice k modelování vývoje nějaké ekonomické veličiny, například ceny výrobku, měnového kurzu, množství zásob, délky fronty, apod. Diferenciální rovnice umožňují popsat *dynamiku* systému – jeho vývoj v čase.

12.2 Diferenciální rovnice prvního řádu se separovatelnými proměnnými

Jedná se o rovnice ve tvaru: $P(x) + Q(y)y' = 0$ nebo $P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$.

Rovnice se separovatelnými proměnnými představují nejjednodušší typ diferenciálních rovnic. Řeší se separací (oddělením) proměnných: členy obsahující proměnnou x převedeme na jednu stranu rovnice (obvykle nalevo), členy s y na druhou stranu, a pak obě strany rovnice integrujeme.

Příklad 12.5. Určete obecné řešení rovnice $yy' = x$.

Řešení:

Nejprve přepíšeme derivaci y takto: $y' = \dfrac{dy}{dx}$, dostaneme: $y\dfrac{dy}{dx} = x$.

Nyní separujeme (oddělíme) proměnné x a y: $ydy = xdx$, a obě strany rovnice integrujeme:
$\int ydy = \int xdx$,

$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$ (integrační konstantu můžeme nazvat c a umístit ji na pravou stranu rovnice). Nakonec vynásobíme dvěma a získáme obecné řešení ve tvaru $y^2 = x^2 + C$. ■

Příklad 12.6. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' + (x-1)y = 0$, a poté najděte partikulární řešení této rovnice vyhovující podmínce $y(0) = 2$.

Řešení:
Rovnici budeme řešit separací proměnných:

$$\frac{dy}{dx} + (x-1)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -(x-1)y$$

$$\frac{dy}{y} = -(x-1)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -(x-1)dx + C$$

$$\ln|y| = -(\frac{x^2}{2} - x) + C$$

$y = e^{-(\frac{x^2}{2}-x)+C} = Ke^{-(\frac{x^2}{2}-x)}$, kde $e^C = K$.
Pro získání partikulárního řešení dosadíme do obecného řešení podmínku $x = 0$ a $y = 2$:

$2 = Ke^0 = K$, a dostaneme výsledek ve tvaru $y = 2e^{-(\frac{x^2}{2}-x)}$. ■

Příklad 12.7. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $\frac{y'}{(x+3)} - xy = 0$, a poté najděte partikulární řešení této rovnice vyhovující podmínce $y(0) = 1$.

Řešení:
Rovnici budeme řešit separací proměnných:

$$\frac{dy}{(x+3)dx} - xy = 0$$

$$\frac{dy}{y} = x(x+3)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (x^2 + 3x)dx + C$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + C$$

$y = e^{\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+C} = Ke^{\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}}$, kde $e^C = K$
Partikulární řešení: dosadíme do obecného řešení $x = 0$ a $y = 1$:

$1 = Ke^0 = K$, odtud dostáváme $K = 1$, a partikulární řešení je: $y = e^{\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}}$. ■

Příklad 12.8. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $3x^2 y' - \frac{1}{y} = 0$, a poté najděte partikulární řešení této rovnice vyhovující podmínce $y(1) = 0$.

Řešení:
Rovnici budeme řešit separací proměnných:

$$3x^2 y' = \frac{1}{y}$$

$$3x^2 \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$$

$$ydy = \frac{dx}{3x^2}$$

$$\int ydy = \int \frac{dx}{3x^2} + C$$

Integrací dostáváme obecné řešení: $\frac{y^2}{2} = -\frac{1}{3x} + C$.

Partikulární řešení vyhovující podmínce $y(1) = 0$ opět získáme dosazením do obecného řešení:

$$\frac{0^2}{2} = -\frac{1}{3 \cdot 1} + C$$

$$C = \frac{1}{3}$$

Partikulární řešení má tvar: $\frac{y^2}{2} = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{3}$. ■

12.3 HOMOGENNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Diferenciální rovnice ve tvaru $y' = f(x, y)$ se nazývá *homogenní stupně n*, jestliže platí:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Homogenní rovnici převedeme na rovnici se separovatelnými proměnnými pomocí následující substituce:

$$y = ux \qquad (12.1)$$

$$y' = u'x + u$$

Příklad 12.9. Řešte rovnici $x^2 y' = y^2 - 2x^2$.

Řešení:
Nejprve si ověříme, že rovnice je homogenní:

$$f(tx, ty) = (ty)^2 - 2(tx)^2 = t^2 y^2 - 2t^2 x^2 = t^2\left(y^2 - 2x^2\right).$$

Rovnice je skutečně homogenní stupně $n = 2$. Použijeme substituci (12.1) a dostaneme:

$$u'x + u = u^2 - 2$$

Separujeme proměnné:

$$u'x = u^2 - u - 2$$

$$\frac{du}{dx}x = u^2 - u - 2$$

$$\frac{du}{u^2 - u - 2} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{u^2 - u - 2} = \int \frac{dx}{x} + C$$

Integrál na levé straně označme I_1 a integrál na pravé straně I_2. Integrál I_1 řešíme metodou parciálních zlomků:

$$\int \frac{du}{u^2 - u - 2} = \int \frac{A}{u-2}du + \int \frac{B}{u+1}du$$

Určíme koeficienty A a B (viz Kapitola 6): $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}$, a můžeme integrovat:

$$I_1 = \int \frac{du}{u^2 - u - 2} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u-2}du - \frac{1}{3}\int \frac{1}{u+1}du = \frac{\ln|u-2| - \ln|u+1|}{3} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-2}{u+1}\right|.$$

Vypočteme integrál I_2: $I_2 = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$.

Dostáváme výsledek:

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-2}{u+1}\right| = \ln|x| + C.$$

Vrátíme se k původní proměnné y (místo u píšeme $u = \frac{y}{x}$):

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\frac{y}{x} - 2}{\frac{y}{x} + 1}\right| = \ln|x| + C,$$

A upravíme do výsledného tvaru:

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{y - 2x}{y + x}\right| = \ln|x| + C. \blacksquare$$

V následujících kapitolách budou představeny některé aplikace diferenciálních rovnic v ekonomii.

12.4 LOGISTICKÁ ROVNICE A FUNKCE

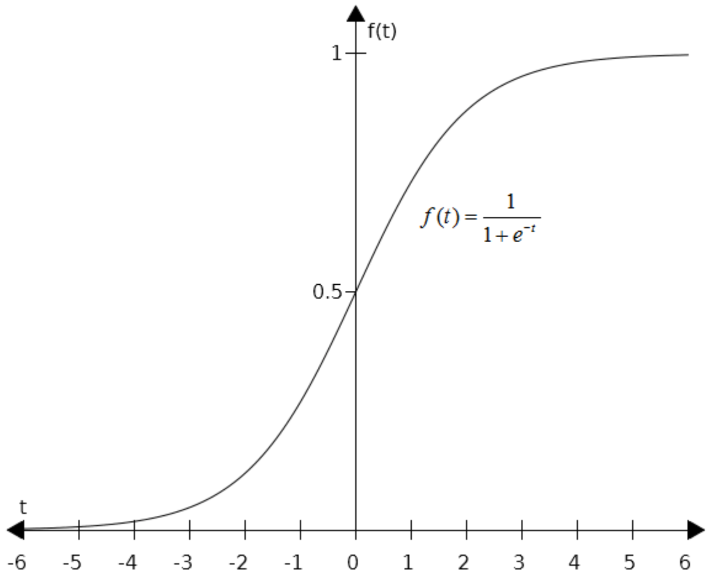
K matematickému modelování fenoménů jako jsou růst populace, šíření informací, technologických inovací, epidemií, růst koncentrací roztoků, a podobně, se využívají *logistické rovnice*, jejichž řešením jsou *logistické funkce*. Logistické rovnice jsou často nelineární diferenciální rovnice. Jednou z nejjednodušších logistických rovnic je následující rovnice (12.2.):

$$\frac{df}{dt} = f \cdot (1 - f) \tag{12.2}$$

V této rovnici je logistická funkce f funkcí času t. Řešení této rovnice pro počáteční podmínku $f(0)=\frac{1}{2}$ je:

$$f(t)=\frac{1}{1+e^{-t}} \tag{12.3}$$

Logistická funkce (12.3) má tu vlastnost, že pro kladná t zpočátku velmi rychle (exponenciálně) roste, poté se však její růst zpomaluje, až se začne asymptoticky blížit k 1, viz Obr. 12.1. Tento konečný stav odpovídá stavu „nasycení“ (informace už dorazila ke všem, populace se stabilizovala, roztok je nasycený).



Obr. 12.1. Logistická funkce

12.5 Vývoj ceny v čase

Nechť cena nějakého výrobku nebo komodity je y. Pak první derivace y' vyjadřuje změnu této ceny v čase a y'' vyjadřuje tempo této změny. V zjednodušeném modelu budeme předpokládat, že budoucí vývoj (změna) ceny y' závisí na y, y' i y'', a dá se popsat rovnicí:

$$y'=cy+by'+ay'' \tag{12.4}$$

V rovnici (12.4) jsou a, b a c konstanty. Rovnici (12.3.) upravíme:

$$ay''+(b-1)\,y'+cy=0 \tag{12.5}$$

Rovnice ve tvaru (12.5) je lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Řešením tohoto typu rovnic je věnována Kapitola 12.7 a 12.8. Pokud například zvolíme $a = 1$, $b = 2$ a $c = -2$, dostaneme:

$$y''+y'-2y=0 \tag{12.6}$$

Řešením této rovnice je funkce $y=C_1e^{t}+C_2e^{-2t}$, $t\geq 0$. Konstanty C_1 a C_2 lze určit z počátečních podmínek: ceny funkce y v čase $t = 0$, a změny ceny y' v čase $t = 0$.

Zabývejme se nyní *dynamikou vývoje tržní ceny* P za předpokladu, že poptávka i nabídka jsou lineární funkce (viz Kapitola 1.8) a v čase $t = 0$ se tržní cena P nerovná rovnovážné ceně P_E. Jaký vývoj ceny P můžeme očekávat?

Máme tedy následující funkce nabídky a poptávky:

$Q_D = a - bP,\ Q_S = c + dP,\quad a,b,c,d > 0$.

Dále z Kapitoly 1.8 víme, že rovnovážná cena je $P_E = \dfrac{a-c}{b+d}$.

Nechť v čase $t = 0$ je převis poptávky nad nabídkou, a ten je přímo úměrný změně P.

Za zmíněných předpokladů můžeme sestavit matematický model (diferenciální rovnici) vývoje tržní ceny P v závislosti na čase t:

$$\frac{dP(t)}{dt} = k\left(Q_D - Q_S\right), \tag{12.7}$$

kde k je vhodná konstanta. Do diferenciální rovnice (12.7) dosadíme za funkce D a S:

$$\frac{dP(t)}{t} = k\left[a - bP - c - dP\right]$$

Upravíme:

$$\frac{dP(t)}{t} = -\left(kb + kd\right)P + (ka - kc)$$

A nakonec provedeme substituci závorek:

$$\frac{dP(t)}{dt} = -AP + B,\ \text{resp.}\ \frac{dP(t)}{dt} + AP = B, \tag{12.8}$$

kde $\left(kb + kd\right) = A, (ka - kc) = B$.

Rovnice (12.8) je obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu s nenulovou pravou stranou.

Při jejím řešení nejprve řešíme příslušnou homogenní rovnici pomocí separace proměnných:

$$\frac{dP(t)}{dt} + AP = 0,$$

Odkud dostaneme obecné řešení $P(t) = Ce^{-At}$.

Nyní ještě potřebujeme najít buď partikulární integrál řešící rovnici s nenulovou pravou stranou, nebo můžeme provést variaci konstanty (viz Kapitola 12.6). Rychlejší je v tomto případě uhádnout partikulární integrál: $P_{partik} = \dfrac{B}{A}$, o čemž je snadné se přesvědčit dosazením do (12.8). Úplné řešení dané rovnice (12.8) je tedy:

$$P(t) = Ce^{-At} + \frac{B}{A} \tag{12.9}$$

Ale $\dfrac{B}{A}$ ve vztahu (12.9) není nic jiného než rovnovážná cena!

Je totiž: $\dfrac{B}{A} = \dfrac{k(a-c)}{k(b+d)} = \dfrac{(a-c)}{(b+d)} = P_E$.

Vztah (12.9), který popisuje dynamiku vývoje tržní ceny, lze proto vyjádřiv ve tvaru:

$$P(t) = P_E + Ce^{-At} \tag{12.10}$$

Názorná interpretace výsledku (12.10) je následující: druhý člen na pravé straně vyjadřuje odchylku tržní ceny P v čase t od rovnovážné ceny. Tento člen se ale exponenciálně zmenšuje s rostoucím časem, a proto se tržní cena P bude postupně blížit k rovnovážné ceně P_E. Rychlost, s jakou se budou obě ceny přibližovat, je pak závislá na hodnotě konstant použitých v modelu a na počátečním rozdílu obou cen.

Další užití diferenciálních rovnic v ekonomii zahrnuje mimo jiné Solowův model růstu (nelineární diferenciální rovnice), vývoj měnového kurzu v závislosti na poptávce po měně, modely typu predátor-kořist, apod.

12.6 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Lineární diferenciální rovnice jsou diferenciální rovnice, v níž se všechny derivace vyskytují v první mocnině. V této kapitole se zaměříme na lineární diferenciální rovnice prvního a druhého řádu.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu je definována takto:

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{12.11}$$

V rovnici (12.11) jsou $p(x)$ a $q(x)$ spojité funkce na intervalu (a, b).

Nejprve se budeme zabývat případem, kdy $q(x) = 0$:

$$y' + p(x)y = 0 \tag{12.12}$$

Rovnice (12.12) se též nazývá *homogenní*. Její řešení najdeme separací (oddělením) proměnných:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx$$

A dostaneme výsledek:

$$y = ce^{-\int p(x)dx}, \tag{12.13}$$

kde c je libovolná nenulová konstanta.

Příklad 12.10. Řešte: $y' + xy = 0$.

Řešení:

Při řešení postupujeme stejně jako výše:

$$\frac{dy}{dx} = -xy$$

$$\frac{dy}{y} = -xdx$$

$$\ln|y| = -\int xdx$$

$$\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}+C} = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^C = ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Stejného výsledku bychom dosáhli, pokud bychom přímo dosadili do vztahu (12.13). ■

Příklad 12.11. Řešte: $y' - y\sin x = 0$.

Řešení:
V tomto příkladě využijeme k řešení vztah (12.13), kde $p(x) = \sin x$:

$y = ce^{-\int -\sin x dx} = ce^{-\cos x}$. ■

Řešení rovnice (12.11) s nenulovou pravou stranou (nehomogenní rovnice) je o něco obtížnější, využívá se při něm *metoda variace konstanty*.

Řešení předpokládáme opět ve tvaru $y = ce^{-\int p(x)dx}$, ale nyní je *c* funkcí *x*:

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{12.14}$$

Výraz (12.14) dosadíme do (12.11) a po úpravě získáme řešení zadané rovnice, viz následující příklad, který je variací Příkladu 12.10.

Příklad 12.10´. Řešte: $y' + xy = x$.

Řešení:

Víme, že řešení příslušné homogenní rovnice je $y = ce^{-\frac{x^2}{2}}$. U nehomogenní rovnice budeme v souladu s (12.14) předpokládat řešení ve tvaru $y = c(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Toto řešení dosadíme do zadané rovnice:

$c'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + c(x)e^{-\frac{x^2}{2}}.(-x) + c(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x = x$

Prostřední dva členy se odečtou a zůstane:

$c'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = x$

$c'(x) = e^{\frac{x^2}{2}}x$

Nyní integrujeme:

$c(x) = \int e^{\frac{x^2}{2}} x dx = e^{\frac{x^2}{2}} + C$.

Řešení dané rovnice je tedy: $y = \left(e^{\frac{x^2}{2}} + C\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$, po úpravě: $y = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$. ■

Příklad 12.12. Řešte: $y' - \dfrac{1}{x+2}y = x$.

Řešení:

$y' - \dfrac{1}{x+2}y = x$

Začneme řešením homogenní rovnice:

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x+2}y$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+2}$$
$$\ln|y| = \ln|x+2| + C$$
$$y = C(x+2)$$

Nyní provedeme variaci konstanty, předpokládáme tedy, že $y = C(x)\cdot(x+2)$:

$$C'(x)(x+2) + C(x)\cdot 1 - \frac{1}{x+2}C(x)\cdot(x+2) = x$$

Prostřední členy se odečtou a zůstane:

$$C'(x)\cdot(x+2) = x$$

Rovnici upravíme:

$$C'(x) = \frac{x}{x+2}$$

A integrujeme:

$$C(x) = \int \frac{x}{x+2}dx = \int \frac{x+2}{x+2}dx + \int \frac{(-2)}{x+2}dx = x - 2\ln|x+2| + C\,.$$

Úplné řešení rovnice je:

$$y = (x+2)\left[x - 2\ln|x+2| + C\right].$$ ■

Pro další druhy lineárních diferenciálních rovnic viz např. Škrášek a Tichý (1986).

12.7 Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a nulovou pravou stranou

Lineární diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty a s nulovou pravou stranou nazýváme rovnici ve tvaru:

$$ay'' + by' + cy = 0\,,\ a,b,c \in R, a \neq 0 \qquad (12.15)$$

Některé vlastnosti tohoto typu diferenciální rovnice si ukážeme na následující úloze.

Příklad 12.13. Řešte: $y'' - 5y' + 4y = 0$.

Řešení:

Řešení hledáme ve tvaru $y = e^{\lambda x}$, kde λ je nějaká vhodná konstanta. Můžeme se snadno přesvědčit, že danou rovnici řeší tyto dvě funkce: $y = e^{x}$ a $y = e^{4x}$.

Ověření provedeme dosazením do dané rovnice (zde pouze pro funkci $y = e^{4x}$). Vypočteme první a druhou derivaci:

$$y' = 4e^{4x}\,,\ y'' = 16e^{4x}\,,$$

a dosadíme:

$$16e^{4x} - 20e^{4x} + 4e^{4x} = 0\,,$$

odkud dostaneme pravdivý výraz 0 = 0, a tedy levá strana rovnice se rovná pravé straně rovnice.

Dále se můžete sami přesvědčit, že jakýkoli násobek obou funkcí, například $y = 10e^{x}$ nebo $y = 25e^{4x}$, je rovněž řešením dané rovnice. Řešením je i každý součet či rozdíl násobků (lineárních kombinací) funkcí $y = e^x$ a $y = e^{4x}$. Úplné řešení dané diferenciální rovnice se proto zapíše v tomto tvaru: $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$, kde $C_{1,2}$ jsou libovolná reálná čísla (konstanty). ■

Výsledek Příkladu 12.12 nyní můžeme zobecnit. Řešením diferenciální rovnice ve tvaru (12.15) je každá funkce $y = e^{\lambda x}$, kde λ je kořenem tzv. *charakteristické rovnice*:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \qquad (12.16)$$

Odvození charakteristické rovnice (12.16) z (12.15): nechť řešením (12.15) je funkce $y = e^{\lambda x}$. Pak:

$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$,
odtud: $a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0$,
Zkrátíme člen $e^{\lambda x}$ a získáme: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

Charakteristická rovnice je kvadratická rovnice pro neznámé hodnoty λ, které mohou být reálná i komplexní čísla. Úplné řešení (jeho tvar) diferenciální rovnice (12.15) závisí na hodnotě diskriminantu $D = b^2 - 4ac$ charakteristické rovnice (12.16). Mohou nastat tyto tři případy:

- $D > 0$: hodnoty λ_1 a λ_2 jsou různá reálná čísla.

Řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty s nulovou pravou stranou má tvar:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad (12.17)$$

kde C_1 a C_2 jsou reálná čísla.

- $D = 0$: rovnice (12.16) má dvojnásobný kořen λ.

Řešení má tvar:

$$y = C_1 x e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}, \qquad (12.18)$$

- $D < 0$: hodnoty λ_1 a λ_2 jsou komplexně sdružená čísla: $\lambda_1 = m + ni$, $\lambda_2 = m - ni$.

Řešení má tvar:

$$y = C_1 e^{mx} \sin nx + C_2 e^{mx} \cos nx \qquad (12.19)$$

Příklad 12.14. Najděte obecné řešení rovnice: $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, $D = 1$,
řešením jsou reálná čísla $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 3$.
Řešení dané rovnice má tvar (viz 12.17): $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. ■

Příklad 12.15. Najděte obecné řešení rovnice: $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, $D = 16$,
řešením jsou reálná čísla $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -1$.
Řešení dané rovnice má tvar (viz 12.17): $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$. ■

Příklad 12.16. Najděte obecné řešení rovnice: $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, $D = 0$,
řešením je dvojnásobný reálný kořen $\lambda = 3$.
Řešení dané rovnice má tvar (viz 12.18): $y = C_1 x e^{3x} + C_2 e^{3x}$. ■

Příklad 12.17. Najděte obecné řešení rovnice: $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$, $D = -4$,
řešením jsou komplexní čísla $\lambda_1 = -2 + i$, $\lambda_2 = -2 - i$. Je tedy $m = -2$, $n = 1$.
Řešení dané rovnice má tvar (viz 12.19): $y = C_1 e^{-2x} \sin x + C_2 e^{-2x} \cos nx$. ■

Příklad 12.18. Řešte: $y'' - y = 0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 - 1 = 0$, řešením jsou $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -1$.
Řešení dané rovnice: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$. ■

Příklad 12.19. Řešte: $y'' + y = 0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 + 1 = 0$, řešením jsou $\lambda_1 = i$ a $\lambda_2 = -i$.
Řešení dané rovnice: $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. ■

Příklad 12.20. Řešte: $y'' - 4y' = 0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 - 4\lambda = 0$, řešením jsou $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 4$.
Řešení dané rovnice: $y = C_1 + C_2 e^{4x}$. ■

Místo *obecného řešení* můžeme v některých situacích hledat *partikulární řešení* diferenciální rovnice. To je řešení, které je omezeno tzv. *počátečními podmínkami*

(podmínkami pro y a y' v nějakém bodě x, nejčastěji v $x = 0$). Partikulární řešení získáme z obecného řešení tak, že do něj dosadíme počáteční podmínky. Výsledkem je pak jediná funkce neobsahující konstanty C.

Příklad 12.21. Najděte partikulární řešení rovnice: $y''+y'-20y=0$, jestliže $y(0)=1$ a $y'(0)=0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice: $\lambda^2+\lambda-20=0$, $D = 81$,
řešením jsou reálná čísla $\lambda_1 = 4$ a $\lambda_2 = -5$.
Obecné řešení dané rovnice má tvar (12.17): $y = C_1e^{-4x}+C_2e^{5x}$.
Nyní použijeme obě podmínky.
Nejprve první podmínka $y(0)=1$ znamená, že pro $x = 0$ má být $y = 1$.
Dosadíme $x = 0$ a $y = 1$ do obecného řešení $y = C_1e^{-4x}+C_2e^{5x}$:

$$1 = C_1 + C_2$$

Pro druhou podmínku $y'(0)=0$ nejprve derivujeme obecné řešení:
$y' = -4C_1e^{-4x}+5C_2e^{5x}$, a dosadíme:

$$0 = -4C_1 + 5C_2$$

Dostali jsme tak soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou vyřešíme:

$$C_1 = \frac{5}{9}, C_2 = \frac{4}{9}$$

Hledané partikulární řešení má tvar: $y = \frac{5}{9}e^{-4x}+\frac{4}{9}e^{5x}$. ■

12.8 Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a nenulovou pravou stranou

Lineární diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty a s nenulovou pravou stranou $f(x)$ nazýváme rovnici ve tvaru:

$$ay''+by+cy = f(x), \quad a,b,c \in R, a \neq 0 \qquad (12.20)$$

Tento typ rovnice se též nazývá *nehomogenní rovnice*.
Řešení nehomogenní rovnice (12.20) má tvar:

$$C_1y_1 + C_2y_2 + P(x), \qquad (12.21)$$

kde $C_1y_1 + C_2y_2$ je řešení odpovídající homogenní rovnice, a $P(x)$ je tzv. *partikulární integrál*.

Partikulární integrál je řešením rovnice (12.20) a jeho význam spočívá v tom, že „vynuluje“ pravou stranu rovnice (12.20). Partikulární integrál závisí na tvaru funkce $f(x)$, v některých případech je možné jej uhádnout. My si ukážeme, jak jej určit, pokud je funkce $f(x)$ mnohočlen nebo exponenciální funkce.

Nechť funkce $f(x)$ je polynom n-tého stupně a nechť $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ je charakteristická rovnice pro rovnici (12.20) s nulovou pravou stranou.

Pokud má charakteristická rovnice nenulové kořeny, potom partikulární integrál $P(x)$ hledáme ve tvaru polynomu stejného stupně jako $f(x)$.

Pokud má charakteristická rovnice jeden nulový kořen, partikulární integrál $P(x)$ hledáme ve tvaru $x \cdot f(x)$.

Příklad 12.22. Řešte: $y'' - y' - 2y = 4x$.

Řešení:

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, řešením jsou $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = -1$.
Řešení dané homogenní rovnice: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$.
Partikulární integrál $P(x)$ hledáme ve tvaru polynomu stejného stupně jako $f(x)$, tedy $P(x) = ax + b$. Dosadíme $P(x)$ do zadané diferenciální rovnice (místo y):
$-a - 2(ax + b) = 4x$
Přerovnáme členy vlevo a vynásobíme (–1):
$2ax + (a + b) = -4x$
Nyní porovnáme levou a pravou stranu (porovnáme koeficienty u členů s x a u absolutních členů), a dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých (a a b):
$2a = -4$

$a + b = 0$
Řešením je: $a = -2$, $b = 2$. Proto je $P(x) = -2x + 2$.
Obecné řešení příslušné diferenciální rovnice má tvar: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - 2x + 2$. ■

Příklad 12.23. Řešte: $y'' + 4y' = x^2 - 1$.

Řešení:

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 + 4\lambda = 0$, řešením jsou $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = -4$.
Řešení dané homogenní rovnice: $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$.
Protože jeden z kořenů charakteristické rovnice je roven nule, hledáme partikulární integrál $P(x)$ ve tvaru $xf(x)$, tedy $P(x) = x\left(ax^2 + bx + c\right) = ax^3 + bx^2 + cx$. Dosadíme $P(x)$ do zadané diferenciální rovnice (místo y) dostaneme:

$\left(6ax + 2b\right) + 4\left(3ax^2 + 2bx + c\right) = x^2 - 1$,
Sečteme:
$12ax^2 + (6a + 8b)x + (2b + 4c) = x^2 - 1$
Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin na obou stranách rovnice:
$12a = 1$

$6a + 8b = 0$

$2b + 4c = -1$
Řešením této soustavy obdržíme:

$a=\frac{1}{12}, b=-\frac{1}{16}, c=-\frac{7}{32}$

$P(x)=x\left(ax^2+bx+c\right)=ax^3+bx^2+cx$

Úplné řešení dané rovnice je: $C_1+C_2e^{-4x}+\frac{x^3}{12}-\frac{x^2}{16}-\frac{7x}{32}$. ■

Nechť funkce $f(x)$ na pravé straně rovnice (12.20) má tvar exponenciální funkce: $f(x)=ae^{bx}$. Partikulární integrál potom hledáme ve tvaru $P(x)=Ae^{bx}$, jestliže b není kořenem charakteristické rovnice. Pokud je b k-násobným kořenem charakteristické rovnice, potom má partikulární integrál tvar: $P(x)=Ax^k e^{bx}$.

Příklad 12.24. Řešte: $y''+4y'+3y=3e^{2x}$.

Řešení:

Charakteristická rovnice: $\lambda^2+4\lambda+3=0$, řešením jsou $\lambda_1=-3$ a $\lambda_2=-1$.

Řešení dané homogenní rovnice: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$.

Protože $b=2$ není kořenem charakteristické rovnice, partikulární integrál hledáme ve tvaru $P(x)=Ae^{2x}$.

Dosadíme do zadané rovnice:

$4Ae^{2x}+8Ae^{2x}+3Ae^{2x}=3e^{2x}$

Vydělíme rovnici výrazem e^{2x}:

$4A+8A+3A=3$,

Odtud dostáváme $A=\frac{1}{5}$, partikulární integrál je $P(x)=\frac{1}{5}e^{2x}$, a úplné řešení dané diferenciální rovnice je: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+\frac{1}{5}e^{2x}$. ■

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1. Najděte obecné a partikulární řešení rovnic:

a) $y'=3x^2+6x-1$, $y(0)=1$

[obecné řešení: $y=6x+3x^2-x+C$, partikulární řešení: $y=6x+3x^2-x+1$]

b) $y'=\frac{5}{x}+1$, $y(2)=2$

[obecné řešení: $y=5\ln|x|+x+C$, partikulární řešení: $y=5\ln|x|+x-5\ln 2$]

c) b) $y''=12x+4$, $y(0)=1$, $y'(1)=1$

[obecné řešení: $y=2x^3+2x^2+C_1x+C_2$, partikulární řešení: $y=2x^3+2x^2-9x+1$]

2. Řešte rovnice se separovatelnými proměnnými:

a) $y'-2y=0$, $y(0)=2$

[obecné řešení: $y=Ce^{2x}$, partikulární řešení: $y=2e^{2x}$]

b) $xy' + 2y = 0$, y (3) = 3

[obecné řešení: $y = x^{-2} + C$, partikulární řešení: $y = x^{-2} + \frac{8}{9}$]

c) $y' - \frac{(x+1)}{y} = 0$, y (2) = 1

[obecné řešení: $y = \frac{x^2}{2} + x + C$, partikulární řešení: $y = \frac{x^2}{2} + x - 3$]

d) $y' = \frac{y-1}{x+1}$, y (0) = 3

[obecné řešení: $(y-1) = C(x+1)$, partikulární řešení: $(y-1) = 2(x+1)$]

e) $2x(2+y^2) + y(4-x^2)y' = 0$, y (0) = 1

[obecné řešení: $\ln\left|4-x^2\right| = \frac{1}{2}\ln\left|2-y^2\right| + C$, partikulární řešení:

$\ln\left|4-x^2\right| = \frac{1}{2}\ln\left|2-y^2\right| + \ln 4$]

3. Řešte homogenní rovnici $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$.

[obecné řešení: $y = \frac{2x}{1-Cx^2}$]

4. Řešte homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu:

a) $y' - (x+5)y = 0$

[$y = ce^{-\frac{x^2}{2}+5x}$]

b) $y' - \frac{y}{\cos^2 x} = 0$

[$y = ce^{-tgx}$]

c) $y' + \frac{y}{x} = 0$

[$y = \frac{c}{x}$]

5. Řešte homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty:

a) $y'' + 4y' - 12y = 0$

[$y = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{2x}$]

b) $2y'' - 10y' = 0$

[$y = C_1 e^{5x} + C_2$]

c) $y'' + 2y' + 5y = 0$

[$y = C_1 e^{-x}\sin 2x + C_2 e^{-x}\cos 2x$]

d) $y'' - 7y' + 10y = 0$

[$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{2x}$]

e) $y'' + 4y' + 4y = 0$
[$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$]

6. Najděte partikulární řešení rovnice $y'' + y' - 6y = 0$, jestliže $y(0) = 2$ a $y'(0) = 1$.
[$y = \frac{3}{5} e^{-3x} + \frac{7}{5} e^{2x}$].

7. Řešte lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty se speciální pravou stranou:
a) $y'' + 3y' + 2y = x$
[$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x - \frac{3}{4}$]
b) $y'' + 6y' + 8y = 8x^2 + 12x + 2$
[$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-4x} + x^2$]
c) $y'' + y' - 2y = 10e^{3x}$
[$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} + e^{3x}$]

ZÁVĚR

Předložená studijní opora Matematika v ekonomii určená studentům navazujícího magisterského studia na Obchodně podnikatelské fakultě (OPF) v Karviné měla za cíl demonstrovat užití matematické analýzy v ekonomii, především pak při aplikaci ekonomických funkcí jako jsou příjmy, náklady, užitek a podobně. Podobně zaměřené učebnice na pomezí matematiky a ekonomie zaměřené primárně na studenty ekonomických oborů jsou v České republice spíše výjimkou (viz např. Mezník, 2011). Autor doufá, že učebnice bude pro studenty OPF v tomto směru přínosná. Dále autor děkuje Bc. Tomáši Fiedorovi z VUT Brno za pomoc při kreslení grafů, recenzentům za připomínky a své rodině za trpělivost.

V Karviné 28.10.2012.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

BARTSCH, Hans-Jochen. *Matematické vzorce*. Praha: Academia, 2008. ISBN: 80-200-1448 -9.

ČERNÝ, Ilja. *Úvod do inteligentního kalkulu*. Praha: Academia, 2002. ISBN 80-200-1017-3.

FUCHS, Kamil, TULEJA, Pavel. Základy ekonomie. Praha: Ekopress, 2004. ISBN 80-86119-88-2

GODULOVÁ, Marie, JANŮ, Ivana., KOCURKOVÁ, Radmila. *Matematika A*. Karviná: OPF, 2000. ISBN 80-7248-073-1.

GODULOVÁ, Marie, JANŮ, Ivana., KOCURKOVÁ, Radmila. *Matematika B*. Karviná: OPF, 2002. ISBN 80-7248-143-6.

HOLMAN, Robert. *Ekonomie*, 5. vydání. Praha: C. H. Beck, 2011. ISBN: 80-740-0006-0.

CHIANG, Alpha C., Wainwright, Kevin *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 4th edition. New York:McGraw-Hill, 2005.

CHEN, Chia-Hun. *Principles of Macroeconomics*. MIT lectures, 2007.

KAŇKA, Miloš, HENZLER, Jiří. *Matematika 2*. Praha: Ekopress, 2003.

MEZNÍK, Ivan. *Úvod do matematické ekonomie pro ekonomy*. Brno: VUT, 2011. ISBN: 978-80-214-4239-9.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*, 9. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN:80-719-6356-9.

REKTORYS, Karel a kolektiv. *Přehled užité matematiky I, II.*. Praha: SNTL, 1995. ISBN 80-85849-92-5.

ŠKRÁŠEK, Josef, TICHÝ, Zdeněk. *Základy aplikované matematiky II*. Praha: SNTL, 1986.

Wikipedia. [online]. [cit. 2012-12-07]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Cobb-Douglas.

ZIMKA, Rudolf. *Matematika I – s aplikáciami v ekonómii*. Bratislava: Mat-centrum, 1999. ISBN: 80-967-3153-X