



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Název projektu	Rozvoj vzdělávání na Slezské univerzitě v Opavě
Registrační číslo projektu	CZ.02.2.69/0.0./0.0/16_015/0002400

Expertní systémy

Neurčitost – Bayesovské sítě

Jan Górecki



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Neurčitost (opakování)



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- Neurčitost je charakteristickým rysem složitých systémů. Vlastní povaha reality způsobuje, že poznatky, které z ní získáváme, jsou neurčité či vágní.
-

Příčiny neurčitosti (opakování)



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- problémy s daty; např.:
 - chybějící nebo nedostupná data
 - nespolehlivá data (např. z důvodu chyb měření)
 - nepřesná nebo nekonzistentní reprezentace dat
-

Příčiny neurčitosti (opakování)



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- nejisté znalosti; např.:
 - znalost nemusí být platná ve všech případech
 - znalost může obsahovat vágní pojmy.
-



- ***Bayesovská síť*** (*Bayesian belief network*) je orientovaný acyklický graf, jehož uzlům odpovídají náhodné proměnné a vazby reprezentují kauzální závislosti mezi těmito proměnnými.
-



- Hrana $X \rightarrow Y$ znamená, že X kauzálně ovlivňuje Y (pozorování X poskytuje kauzální podporu Y , pozorování Y poskytuje diagnostickou podporu pro X). Bayesovská síť umožňuje provádět prediktivní i diagnostické inference.
-



- Každému uzlu je přiřazena tabulka rozdělení pravděpodobnosti. Jestliže uzel nemá žádné předchůdce (rodiče), jedná se o nepodmíněnou pravděpodobnost, v opačném případě jde o podmíněnou pravděpodobnost.
-

Pojmy potřebné pro definici bayesovské sítě



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Nechť $G = (V, E)$ je orientovaný acyklický graf a necht' $v \in V$.

Definujme následující množiny:

$$C(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E\},$$

$$D(v) = \{w \in V \mid \text{existuje cesta z } v \text{ do } w\},$$

$$A(v) = \{x \in V \mid x \neq v \text{ a } x \notin C(v) \cup D(v)\}.$$

Množina $C(v)$ je množinou bezprostředních předchůdců (rodičů) uzlu v , $D(v)$ je množinou všech následníků uzlu v (nejen bezprostředních). V případě bayesovské sítě prvky $C(v)$ nazýváme také *příčinami*.

Definice bayesovské sítě



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Nechť (Ω, P) je pravděpodobnostní prostor, kde $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$, a necht' X_i ($i = 1, \dots, n$) je projekce Ω na Ω_i (tj. $X_i : \Omega \rightarrow \Omega_i$ je náhodná proměnná).
Nechť (V, E) je orientovaný acyklický graf, kde $V = \{X_1, \dots, X_n\}$.

Definice bayesovské sítě



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Řekneme, že (V, E, P) je **bayesovská síť**, jestliže pro všechna $X_i \in V$ a všechna $W \subseteq A(X_i)$ jsou X_i a W podmíněně nezávislé při daném $C(X_i)$. To znamená, že když $W = \{Y_1, \dots, Y_k\}$, $C(X_i) = \{Z_1, \dots, Z_m\}$,

$P(Y_1 \wedge \dots \wedge Y_k \wedge Z_1 \wedge \dots \wedge Z_m) \neq 0$, pak

$$P(X_i | Y_1 \wedge \dots \wedge Y_k \wedge Z_1 \wedge \dots \wedge Z_m) = P(X_i | Z_1 \wedge \dots \wedge Z_m).$$

Definice bayesovské sítě



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Zjednodušeně řečeno, když známe příčiny X_i , nic jiného než X_i samotné nebo jeho následníci nám nemůže dát nějaké další informace o X_i . Místo pojmu bayesovská síť se někdy užívají pojmy *kauzální síť* či *influenční diagram*.

Poznámky k symbolice



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Nechť X je náhodná proměnná s oborem hodnot $O(X)$ a P je pravděpodobnost. Symbolem $P(X)$ rozumíme funkci definovanou na $O(X)$ tak, že pro $x \in O(X)$ je $P(x) = P(X = x)$.

Poznámky k symbolice



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Zápisy pravděpodobností můžeme dále zjednodušit následujícím způsobem.

Nechť $V = \{X_1, \dots, X_n\}$, $C(X_i) = \{Z_1, \dots, Z_m\}$. Pak definujeme

$$P(V) = P(\{X_1\} \cup \dots \cup \{X_n\}) = P(X_1, \dots, X_n) = P(X_1 \wedge \dots \wedge X_n),$$

$$P(X_i | C(X_i)) = P(X_i | Z_1, \dots, Z_m) = P(X_i | Z_1 \wedge \dots \wedge Z_m).$$

Poznámky k symbolice



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Pomocí uvedené symboliky můžeme definici bayesovské sítě přepsat takto:

Řekneme, že (V, E, P) je bayesovská síť, jestliže pro všechna

$X_i \in V$ a všechna $W \subseteq A(X_i)$, $P(W \cup C(X_i)) \neq 0$, platí, že

$$P(X_i | W \cup C(X_i)) = P(X_i | C(X_i)).$$

Vlastnosti bayesovské sítě



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Necht' (V, E, P) je bayesovská síť. Pak platí:

$$P(V) = \prod_{\substack{X \in V \\ P(C(X)) \neq 0}} P(X | C(X))$$

Vlastnosti bayesovské sítě



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Nechť (V, E) je orientovaný acyklický graf, kde $V = \{X_1, \dots, X_n\}$, přičemž X_i jsou proměnné s obory hodnot $O(X_i)$. Nechť $f(X | C(X))$

je nezáporná reálná funkce taková, že $\sum_{x \in O(X)} f(x | C(X)) = 1$

pro všechny kombinace hodnot proměnných z $C(X)$. Pak

$$\Omega = O(X_1) \times \dots \times O(X_n) \quad \text{a} \quad P(V) = \prod_{X \in V} f(X | C(X))$$

definují pravděpodobnostní prostor, pro nějž (V, E, P) je bayesovská síť. Přitom $P(X | C(X))$ je buď 0 nebo $f(X | C(X))$.

Konstrukce bayesovské sítě



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

1. Specifikujeme veličiny X_1, \dots, X_n a jejich obory hodnot $O(X_i)$.
-

Konstrukce bayesovské sítě



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

1. Specifikujeme veličiny X_1, \dots, X_n a jejich obory hodnot $O(X_i)$.
-

Konstrukce bayesovské sítě



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

2. Zkonstruujeme orientovaný acyklický graf (V, E) , kde

$V = \{X_1, \dots, X_n\}$, vyjadřující kauzální závislosti mezi veličinami.

3. Odhadneme pravděpodobnost P tak, že odhadneme $P(X | C(X))$ pro všechna X , všechny hodnoty X a všechny kombinace hodnot proměnných z $C(X)$. Podle předchozí věty je nezbytné splnění pouze těchto podmínek:

$$0 \leq P(X | C(X)) \leq 1$$

$$\sum_{x \in O(X)} P(x | C(X)) = 1$$

Problém pro bayesovskou síť



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Problém řešený pomocí bayesovské sítě je možno zjednodušeně formulovat takto:

Problém pro bayesovskou síť



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Nechť je dána bayesovská síť (V, E, P) a množiny $U \subseteq V$, $W \subseteq V$, $U \cap W = \emptyset$. Jsou-li zadány hodnoty proměnných z množiny U , je třeba zjistit $P(W | U)$.

Problém pro bayesovskou síť



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Po zadání hodnot některých proměnných se provádí *inference*, což znamená přepočítání podmíněných pravděpodobností pro ostatní proměnné. Inference v bayesovské síti je založena na Bayesových vzorcích.

Problém pro bayesovskou síť



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Obecně je výše zmíněný problém NP-těžký, což znamená, že pro něj neexistují algoritmy s polynomiální časovou složitostí. Pokud bayesovská síť nemá speciální strukturu, je nutné použít aproximační techniky, které jsou obvykle založeny na nějakých transformacích bayesovské sítě na jednodušší tvar.

Jednoduše souvislá bayesovská síť



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Řekneme, že bayesovská síť je *jednoduše souvislá*, jestliže mezi každými dvěma uzly existuje právě jedna neorientovaná cesta.

Jednoduše souvislá bayesovská síť



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Jednoduše souvislá síť se také nazývá *polystrom* nebo *les*.
Zvláštním případem polystromu je *strom*, což je graf, kde každý uzel má nejvýše jednoho rodiče.

Jednoduše souvislá bayesovská síť



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Pro polystromovou bayesovskou síť existují algoritmy pro inferenci, které mají polynomiální časovou složitost.

Typické použití Bayesovských sítí



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- pro modelování a vysvětlení chování problémů v různých oblastech např. model chování vody v krajině
-



- pro nalezení nejpravděpodobnějších konfigurací proměnných – např. při automatickém rozpoznávání řeči nebo při dekódování zakódovaných zpráv
-

Typické použití Bayesovských sítí



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- pro podporu rozhodování při nejisté informaci
 - použití teorie maximalizace očekávaného užitku
-

Typické použití Bayesovských sítí



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- pro nalezení dobrých strategií pro řešení problémů v oblastech s nejistotou - např. technická diagnostika laserových tiskáren, nebo návrh adaptivních testů.
-

Děkuji za pozornost

Některé snímky převzaty od:

RNDr. Jiří Dvořák, CSc. dvorak@fme.vutbr.cz