

MATEMATIKA V EKONOMII - PŘEDNÁŠKA č. 1

Přednášející: Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D.

Vedoucí seminářů: Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D., Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D.

Kredity: 5

Podmínka absolvování: zkouška (alespoň 60 bodů ze dvou písemných testů) + účast na seminářích (alespoň 70 %)

Skripta: Mazurek, J. *Matematika v Ekonomii* a Mazurek, J. *Sbírka úloh - Matematika v Ekonomii*. (viz IS). Starší učebnice: *Matematika B*.

Materiály ke cvičením a ke zkoušce: viz IS.

Videozáznamy přednášek: <http://media.slu.cz/videolist.php?idsada=42>

Obsah předmětu: diferenciální a integrální počet jedné a dvou reálných proměnných s aplikacemi v ekonomii. (podrobněji viz Plán přednášek nebo Syllabus předmětu).

Hodnocení: 0-59: F, 60-65: E, 66-70: D, 71-80: C, 81-90: B, 91-100: A.

Funkce jedné reálné proměnné

POJEM FUNKCE

-**Funkcí** rozumíme předpis, který každému číslu x z jedné množiny (definičního oboru) přiřadí právě jedno číslo y z druhé množiny (oboru hodnot).

-**Definiční obor** $D(f)$ nebo D_f

-**Obor hodnot** $H(f)$ nebo H_f .

-**Funkční předpis** se značí $y = f(x)$, například $y = x^2 + 1$.

-**Explicitní funkce**: Je-li možné upravit funkci na tvar $y = f(x)$.

-**Implicitní funkce**: nelze osamostatnit y na levé straně, značíme $f(x, y) = 0$.

- V ekonomii se nejčastěji setkáváme s funkcemi **poptávky**, **nabídky**, **příjmů**, **nákladů**, **užitku**, **produkce**, atd.

-Funkce mohou být definovány pro různé **číselné obory** (čísla přirozená, celá, reálná, komplexní, reálná kladná, apod.).

-**Funkce jedné proměnné a funkce více proměnných** (např. Cobb-Douglasova funkce).

GRAF FUNKCE

-**Grafem funkce** $y = f(x)$ nazýváme množinu všech bodů o souřadnicích $[x, f(x)]$, kde $x \in D(f)$.

-**Vybrané grafy** viz dále.

-Přehledně **znázorňuje** závislost x na y , a je možné z něj vyčíst vlastnosti funkce.

-**Průsečíky** grafu funkce s grafem jiné funkce jsou body, kde jsou si obě funkce rovny, což bývá v ekonomické teorii interpretováno jako stav rovnováhy (například mezi poptávkou a nabídkou).

VLASTNOSTI FUNKCE

-**Definiční obor funkce** $D(f)$

-V **ekonomii** platí, že většina veličin může nabývat pouze kladných hodnot.

-Je užitečné si pamatovat, že funkce ve tvaru polynomu a exponenciální funkce mají definiční obor vždy rovný \mathbf{R} .

- Pak existují funkce, kde se definiční obor obecně nerovná \mathbf{R} , a mezi ně patří především tyto:

- racionální lomené funkce (zlomky s proměnnou x ve jmenovateli): jmenovatel nesmí být roven nule,
- logaritmické funkce: výraz v logaritmu musí být kladný,
- odmocninné funkce: výraz pod odmocninou musí být nezáporný,
- tangens a cotangens: výraz ve jmenovateli (tedy cosinus, resp. sinus) nesmí být roven nule.

- arcsinus a arccosinus: definičním oborem je interval $\langle -1,1 \rangle$.

Příklad 1.1. Určete definiční obor funkcí:

a) $f: y = \sqrt{3x-1}$

b) $f: y = \frac{x+5}{x^2-1}$

c) $f: y = \log(4-x^2)$

d) $f: y = \sqrt{x^2-x-2} + \frac{1}{x-2}$

-Obor hodnot $H(f)$: je množina všech y , které získáme z funkčního předpisu $y = f(x)$ pro všechna x z definičního oboru. Je-li funkce $y = f(x)$ omezená (viz níže), je rovněž obor hodnot omezený.

-Monotónnost funkce: funkce je na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ monotónní, pokud je na tomto intervalu rostoucí, klesající, nerostoucí nebo neklesající.

Funkce je na intervalu I :

- rostoucí, pokud pro všechna $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, platí: $f(x_1) < f(x_2)$,
- klesající, pokud pro všechna $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, platí: $f(x_1) > f(x_2)$,
- nerostoucí, pokud pro všechna $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, platí: $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- neklesající, pokud pro všechna $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, platí: $f(x_1) \leq f(x_2)$.

-Extrémy funkce: globální a lokální:

Funkce má v bodě a *globální maximum*, jestliže pro všechna x ($x \neq a$) z definičního oboru je $f(a) \geq f(x)$.

Funkce má v bodě a *globální minimum*, jestliže pro všechna x ($x \neq a$) z definičního oboru je $f(a) \leq f(x)$.

Funkce má v bodě a *lokální maximum*, jestliže pro všechna x ($x \neq a$) z nějakého okolí bodu a je $f(a) \geq f(x)$.

Funkce má v bodě a *lokální minimum*, jestliže pro všechna x ($x \neq a$) z nějakého okolí bodu a je $f(a) \leq f(x)$.

Okolím bodu a nazýváme otevřený interval $(a-\delta, a+\delta)$. Platí-li v předešlých vztazích ostrá nerovnost (" $>$ " nebo " $<$ "), je extrém ostrý, v opačném případě neostrý.

-Omezenost funkce: funkce je *omezená shora*, jestliže existuje takové reálné číslo h , že $f(x) \leq h$ pro všechna x z definičního oboru funkce. Podobně, funkce je *omezená zdola*, jestliže existuje takové reálné číslo d , že $f(x) \geq d$ pro všechna x z definičního oboru funkce. Pokud je funkce omezená shora i zdola, říkáme krátce, že je *omezená*. V ekonomii jsou všechny funkce omezené, neboť produkce, příjmy, náklady, práce, kapitál či zdroje surovin nejsou nekonečné.

-Prostá funkce: Funkce $y = f(x)$ se nazývá *prostá*, jestliže platí:

$$\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2).$$

Význam prostých funkcí tkví v tom, že k nim existují funkce *inverzní* (opačné).

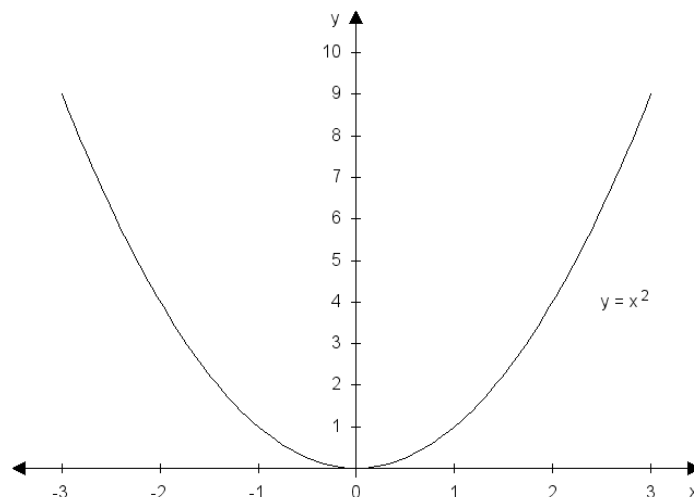
ALGEBRAICKÉ FUNKCE

-Lineární funkce má předpis $y = ax + b$, jejím grafem je přímka (řecky *linea* je přímka). Koeficient a se nazývá směrnice přímky, neboť udává sklon (směr) přímky vzhledem k ose x . Koeficient b udává průsečík grafu funkce s osou y . Je užitečné si pamatovat, že:

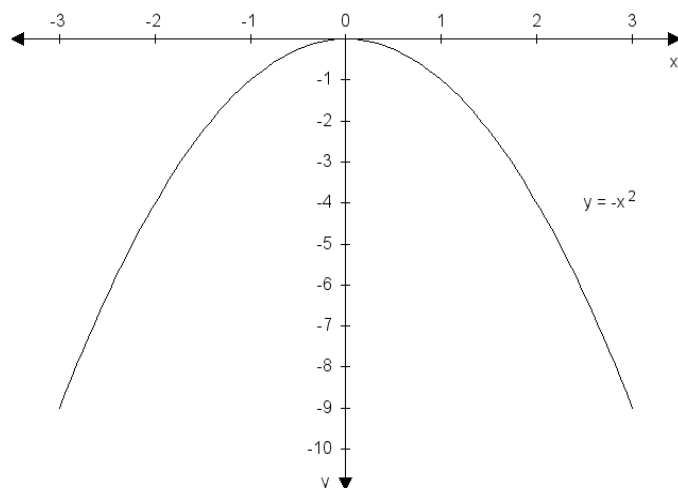
- Pro $a > 0$ je funkce rostoucí.
- Pro $a < 0$ je funkce klesající.
- Pro $a = 0$ je funkce konstantní.

-Kvadratická funkce má předpis $y = ax^2 + bx + c$. Grafem je parabola.

Pro $a > 0$ je graf funkce (parabola) orientovaná „nahoru“, pro $a < 0$ „dolů“, viz Obr. 1.2 a 1.3. Koeficienty b a c v předpisu funkce posouvají parabolu ve směru osy x nebo y .



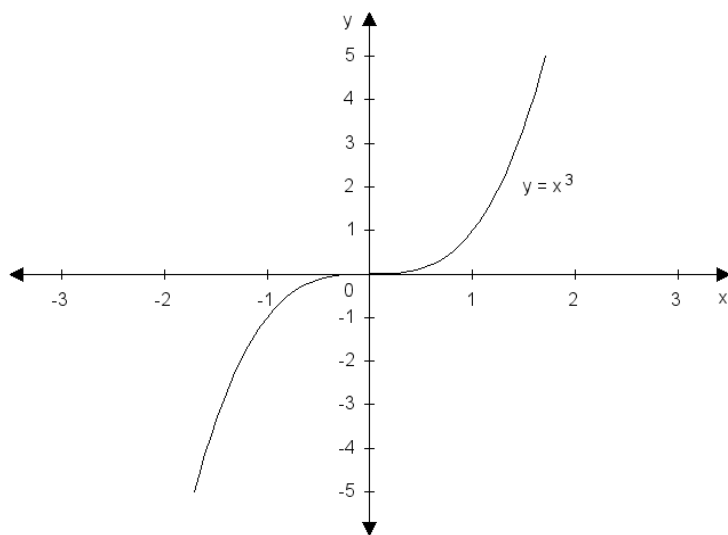
Obr. 1.2. Graf funkce $y = x^2$.



Obr. 1.3. Graf funkce $y = -x^2$.

Příklad 1.4. Najděte vrchol paraboly $y = x^2 - 2x + 4$.

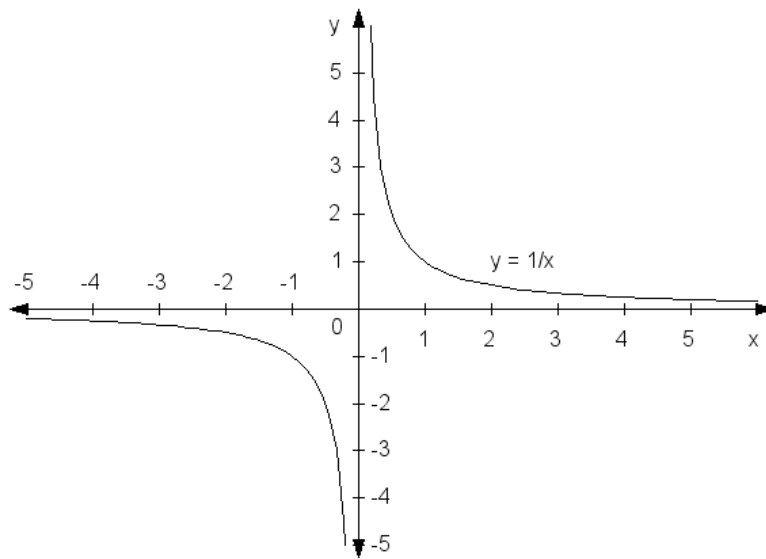
-Mocninná funkce má předpis $y = x^n$, kde n je celé číslo. Na základě toho, jestli je n kladné/záporné a liché/sudé má mocninná funkce jeden ze 4 typů grafů. Na Obr. 1.4. je pro ilustraci graf kubické funkce $y = x^3$.



Obr. 1.4. Graf funkce $y = x^3$.

- Racionální lomená funkce: $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Grafem racionální funkce bývají obvykle složité

křivky, viz Kapitola 3. **Nepřímá úměrnost:** $y = \frac{k}{x}$, kde k je kladná konstanta. Grafem nepřímé úměrnosti je *hyperbola*, viz Obr 1.5.



Obr. 1.5. Graf funkce $y = 1/x$.

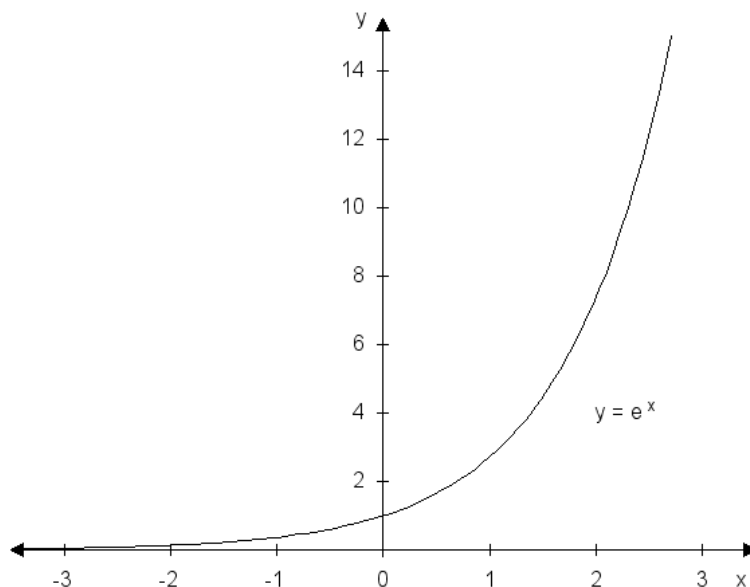
TRANSCENDENTNÍ FUNKCE

Funkce, které nejsou algebraické, se označují jako *transcendentní*. Mezi transcendentní funkce patří především funkce exponenciální, logaritmické a goniometrické.

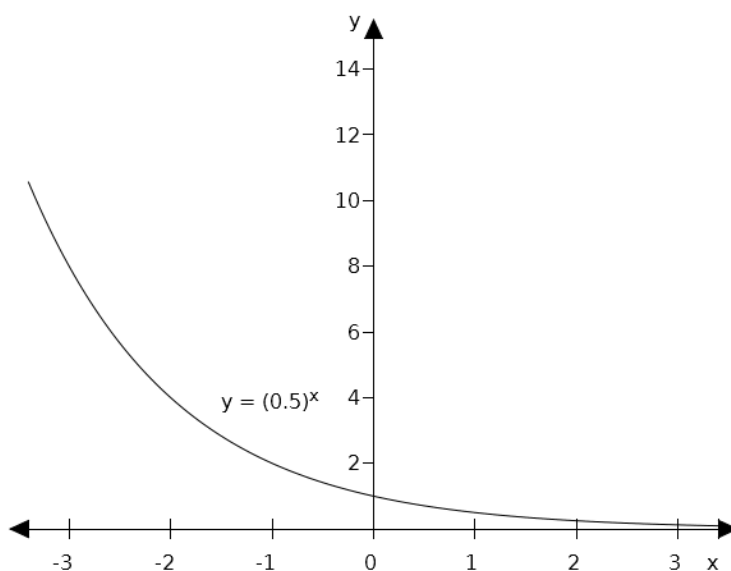
-Exponenciální funkce má předpis $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Číslo a je základ mocniny a musí být kladné a různé od 1, x je exponent. Vlastnosti exponenciální funkce závisí na základu a :

- Je-li $a > 1$, funkce je rostoucí, viz Obr. 1.6.
- Je-li $a < 1$, funkce je klesající, viz Obr. 1.7.

Graf (základní) exponenciální funkce vždy prochází bodem 1 na ose y , obor hodnot $H(f) = \mathbb{R}^+$ a funkce je omezená zdola osou x . Nejčastěji používanou exponenciální funkcí je $y = e^x$, kde konstanta $e = 2,718\dots$ se nazývá Eulerova konstanta, a jedná se o iracionální číslo, podobně jako π .



Obr. 1.6. Graf funkce $y = e^x$.

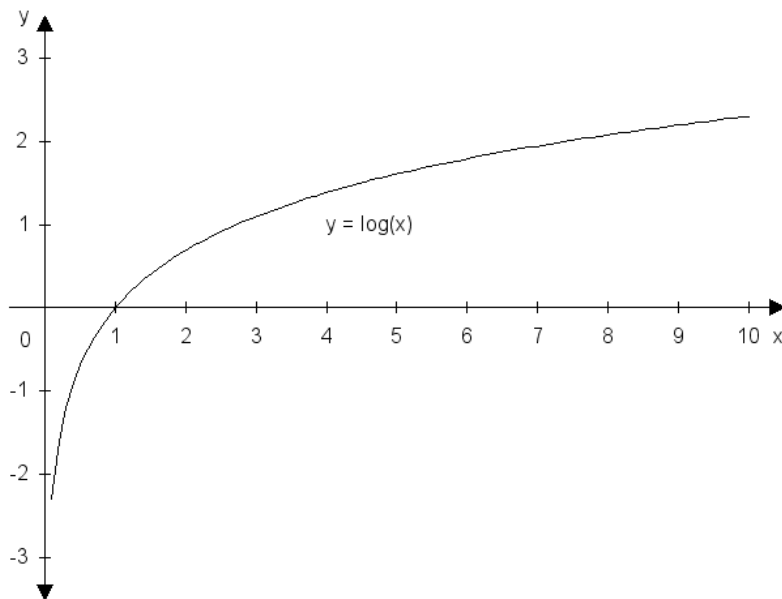


Obr. 1.7. Graf funkce $y = (0,5)^x$.

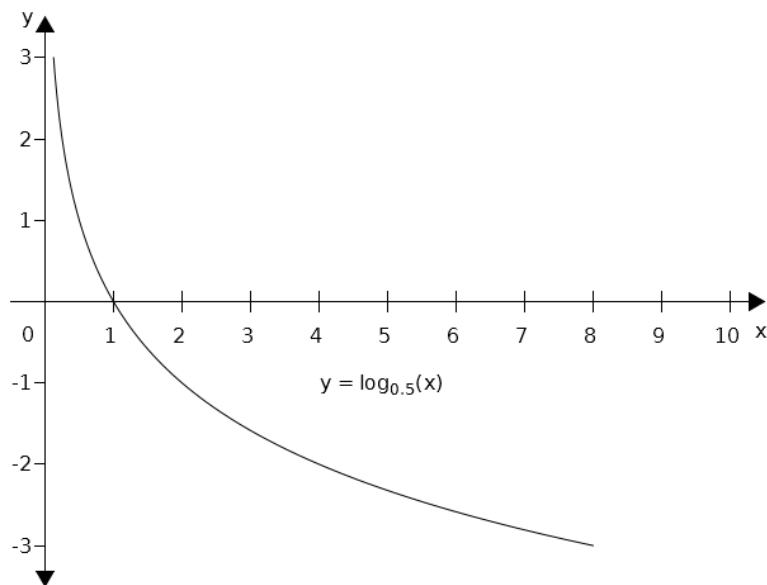
-Logaritmická funkce má předpis $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$. Číslo a se nazývá *základ logaritmu* a musí být kladné a různé od 1. Pro $a = 10$ se logaritmus nazývá *dekadický* (značka $\log x$, pro $a = e = 2,718\dots$ *přirozený logaritmus* (značka $\ln x$). Logaritmická funkce je inverzní funkcí k funkci exponenciální, což znamená, že definiční obor logaritmické funkce je roven oboru příslušné inverzní exponenciální funkce a naopak.

- Je-li $a > 1$, funkce je rostoucí, viz Obr. 1.8.
- Je-li $a < 1$, funkce je klesající, viz Obr. 1.9.

Graf (základní) logaritmické funkce vždy prochází bodem 1 na ose x , definiční obor je $H(f) = \mathbb{R}^+$ a funkce není omezená.



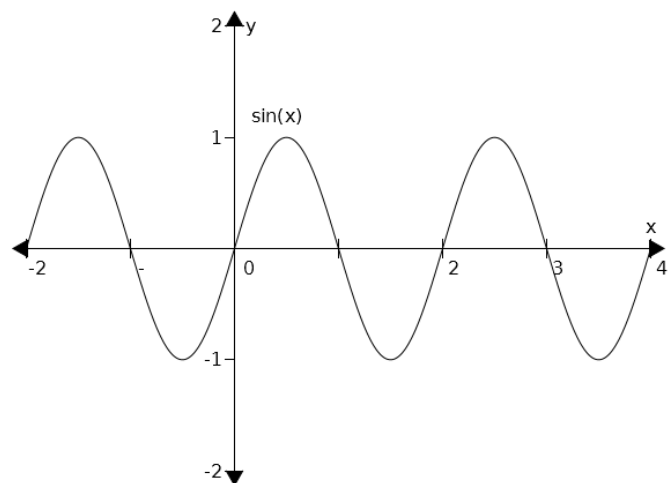
Obr. 1.8. Graf funkce $y = \log x$.



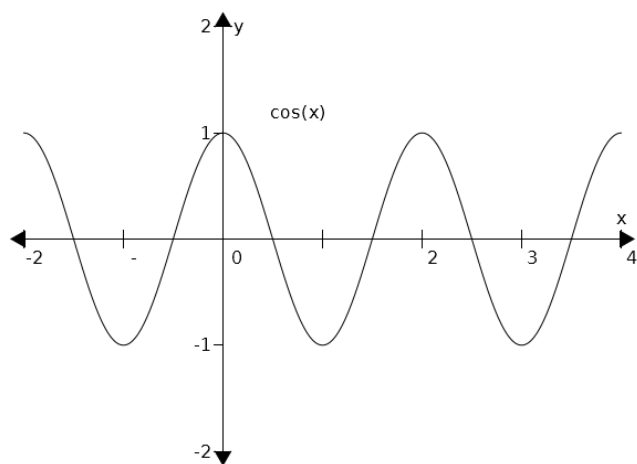
Obr. 1.9. Graf funkce $y = \log_{0,5} x$.

- **Goniometrické funkce:** sinus, kosinus, tangens a kotangens.

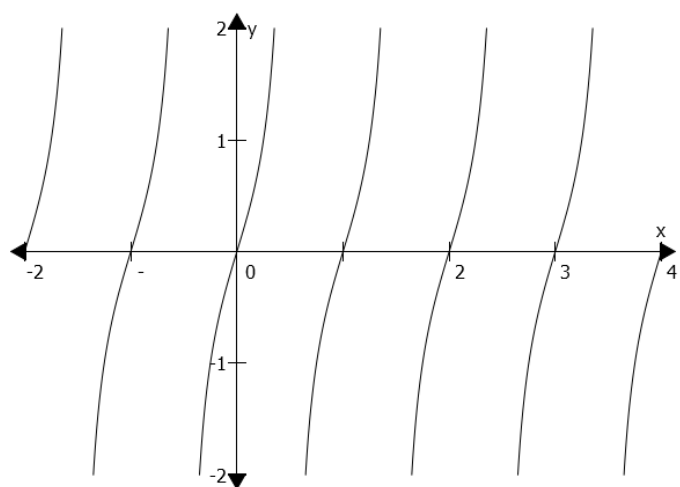
- **Cyklometrické funkce:** $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$ a $\operatorname{arctg} x$. Na kalkulačkách jsou značeny jako \sin^{-1} , \cos^{-1} a tg^{-1} .



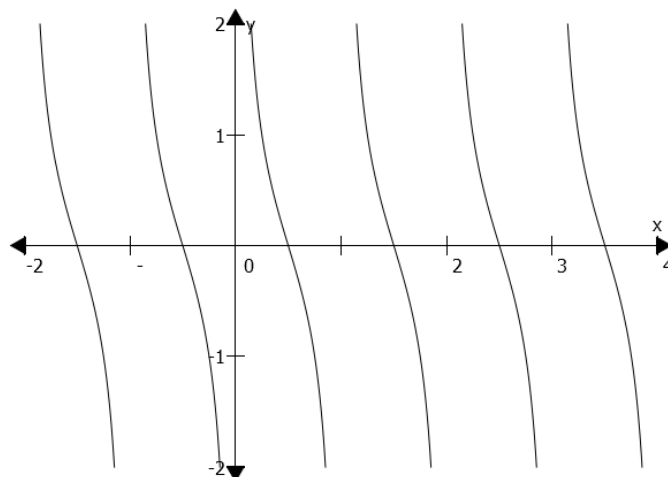
Obr. 1.10. Graf funkce $y = \sin x$.



Obr. 1.11. Graf funkce $y = \cos x$.



Obr. 1.12. Graf funkce $y = \tan x$.



Obr. 1.13. Graf funkce $y = \cot x$.

SLOŽENÁ FUNKCE

V některých případech může být argumentem funkce jiná funkce. V tom případě hovoříme o *složené* funkci.

Definice 1.1. Necht' jsou dány funkce $y = f(x)$ a $y = g(x)$, a necht' pro $x \in M \subseteq D(g)$ platí, že $g(x) \in D(f)$. Potom funkci $y = f(g(x))$ nazýváme *složenou funkcí*. Funkce $f(x)$ je *vnější funkce* a funkce $g(x)$ je *vnitřní funkce*.

Typickým příkladem složené funkce je například $y = \log(x^2 + 1)$ nebo $y = \sqrt{2x + 5}$.

Příklad 1.5. Jsou dány funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = x^2$. Určete $y = f(g(x))$ a $y = g(f(x))$.

POLYNOMY

- **polynom** (česky *mnohočlen*): výraz $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

Je-li $n = 0$, je polynom roven konstantě a_0 ; je-li $n = 1$, je polynom lineární: $a_0 + a_1x$; pro $n = 2$ je polynom kvadratický: $a_0 + a_1x + a_2x^2$, atd.

- **Nulovým bodem (kořenem)** polynomu je takové číslo x_0 , pro které platí $P_n(x) = 0$.

- **Rozklad polynomu na součin** lze využít při zjednodušování algebraických výrazů krácením nebo při integraci metodou partiálních zlomků.

Příklad 1.6. Určete nulové body polynomu a upravte na součin:

a) $x^2 - x + 5$

b) $x^4 - 4x^2$

c) $x^3 - 27$

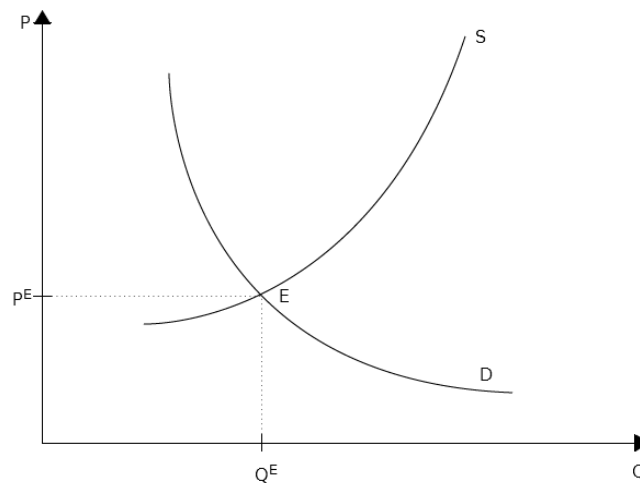
FUNKCE NABÍDKY, POPTÁVKY A ROVNOVÁHA NA TRHU V PODMÍNKÁCH DOKONALÉ KONKURENCE

-**Funkce poptávky D** (angl. *demand*) vyjadřuje vztah mezi cenou výrobku P (*price*) a poptávaným množstvím Q (*quantity*): $Q = D(P)$ resp. $P = D(Q)$. Tato funkce je vždy klesající, což znamená, že s rostoucí cenou P klesá poptávané množství Q .

Dále pro funkci poptávky platí, že veličiny P i Q musí být nezáporné, neboť záporné množství ani záporná cena nemají v této situaci smysl. Rovněž P ani Q nemohou růst do nekonečna, proto říkáme, že jsou omezené.

-**Funkce nabídky S** (angl. *supply*) vyjadřuje vztah mezi cenou výrobku P (*price*) a nabízeným množstvím Q (*quantity*): $Q = S(P)$ resp. $P = S(Q)$. Tato funkce je vždy rostoucí, což znamená, že s rostoucí cenou P roste nabízené množství Q .

Při grafickém znázornění obou křivek je zvykem nanášet na osu x množství Q a na osu y cenu P .



Obr. 1.14. Typický tvar křivek funkce poptávky a nabídky s rovnovážným bodem E .

-Lineární funkce poptávky je dána vztahem: $Q_D = a - bP$, kde a a b jsou konstanty, pro které platí: $a \geq 0$, $b > 0$.

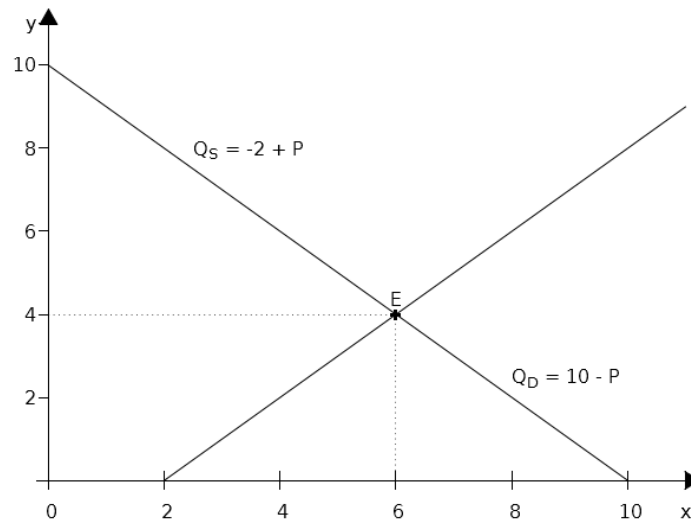
-Lineární funkce nabídky je dána vztahem: $Q_S = c + dP$, kde c a d jsou konstanty, pro které platí: $c \geq 0$, $d > 0$.

-Rovnováha: $Q_D = Q_S$.

-Rovnovážná cena P_E : $P_E = \frac{a - c}{b + d}$.

-Rovnovážné množství Q_E : $Q_E = \frac{ad + bc}{b + d}$.

Příklad 1.8 (Chen, 2007). Předpokládejme, že $Q_D = 10 - P$ a $Q_S = -2 + P$. Najděte rovnováhu mezi poptávkou a nabídkou.



Obr. 1.15. Rovnováha mezi poptávkou a nabídkou.

Úvod do diferenciálního počtu funkce jedné reálné proměnné

DERIVACE FUNKCE

- Mějme funkci $y = f(x)$. Výraz $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y'$ nazýváme **derivací funkce** $y = f(x)$.

- **Geometrický význam** derivace: je rovna směrnici tečny ke grafu funkce v daném bodě.

-**Značení:** $y', f'(x), \frac{dy}{dx}$ (čteme dy podle dx), $\frac{df}{dx}$ (čteme df podle dx).

Příklad 2.1. Určete derivaci funkce $y = x^3 + 2x$ v bodě $x = 2$.

Příklad 2.2. Určete rovnici tečny ke křivce $y = x^2$ v bodě $[2,4]$.

Příklad 2.3. Užitím definice derivace odvoďte derivaci funkce $y = x^2$.

Řešení:

$$(x^2)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{+2hx + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x \quad \blacksquare$$

Protože je výpočet derivací pomocí definice derivace často zdlouhavý, používáme pro derivování základních funkcí již odvozené vzorce, které najdete v Tabulce 2.1.

Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají derivaci na intervalu $J \subseteq R$. K výpočtu derivací součtu, rozdílu, součinu a podílu těchto funkcí používáme následující pravidla:

- i) $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$
ii) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
iii) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
iv) $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, g(x) \neq 0$
v) $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Příklad 2.4. Derivujte následující funkce:

- a) $y = x^3 + 4x - 1$
b) $y = x^2 + 5x$
c) $y = 6x^3$
d) $y = 10 \sin x + 3 \cos x + 2e^x + 5^x + 1$
e) $y = (x^2 + 3) \cdot e^x$
f) $y = \frac{\ln x}{x + 2}$
g) $y = \ln(x^2 + 4x + 1)$

Tabulka 2.1. Přehled derivací elementárních funkcí.

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|----------------------------|---------------------------|
| konstanta | 0 |
| x | 1 |
| x^n | nx^{n-1} |
| e^x | e^x |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| a^x | $a^x \cdot \ln a$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x \ln a}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\operatorname{cotg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\operatorname{arctg} x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\operatorname{arccotg} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ |

DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

-První, druhá, třetí a další derivace: $f'(x), f''(x), f'''(x)$, atd.

-**Význam** mají především první a druhá derivace, užití vyšších derivací je v ekonomii spíše výjimečné.

Příklad 2.5. Vypočtěte první, druhou a třetí derivaci funkce $y = x^3 + 4x^2 - 1$.

Historická poznámka: Americký prezident R. Nixon použil v roce 1972 v jednom televizním přenosu v rámci prezidentské kampaně následující argument: „Tempo růstu inflace zpomaluje.“

Jistý komentátor to okomentoval: „Je to poprvé v historii, co americký prezident použil pro své znovuzvolení argument obsahující třetí derivaci.“

Je tomu opravdu tak: Pokud inflaci považujeme za danou veličinu (y), pak její růst je první derivace, tempo tohoto růstu druhá derivace a zpomalování tohoto tempa pak představuje třetí derivaci.

Podobně můžeme z televizní obrazovky slyšet, že „růst nezaměstnanosti zpomaluje“ nebo „pokles stavební výroby zrychluje“, což jsou vlastně druhé derivace.

EXTRÉMY FUNKCE

- **Maxima a minima** funkce hledáme takto:

1. Najdeme body, v nichž je první derivace nulová: $f'(x) = 0$ – jsou to **stacionární body** (body podezřelé z extrému).

2. Pomocí druhé derivace rozhodneme, zda jde o maximum, minimum nebo inflexní

bod:

$f''(x) < 0$... maximum

$f''(x) > 0$... minimum

$f''(x) = 0$... nelze rozhodnout

Příklad. Určete extrémy funkce a) $y = x^4 - 4x^2$, b) $y = x \cdot e^x$.

DIFERENCIÁL FUNKCE

Diferenciálem funkce $y = f(x)$ nazýváme funkci $df(x) = f'(x)dx$. Diferenciál funkce závisí na x a dx , a vyjadřuje přibližně přírůstek funkce df při změně argumentu x o dx v bodě x . (Toto přibližné vyjádření je tím přesnější, čím menší je dx).

Příklad 2.6. Určete přírůstek funkce $y = x^3$ v bodě $x = 3$ pro přírůstek argumentu $dx = 0,2$ pomocí diferenciálu funkce.