

## MATEMATIKA V EKONOMII – PŘEDNÁŠKA Č. 4 (Parciální zlomky a funkce dvou a více proměnných)

### ROZKLAD RACIONÁLNÍ LOMENÉ FUNKCE NA PARCIÁLNÍ ZLOMKY

- **Racionální lomenou funkcí** nazýváme výraz  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , kde  $P(x)$  a  $Q(x)$  jsou dané mnohočleny.
- **Rozkladem na parciální zlomky** rozumíme rozklad dané racionální lomené funkce na součet jednodušších (parciálních) zlomků.
- Nejprve **rozložíme jmenovatel**  $Q(x)$  na součin kořenových činitelů, tedy na součin závorek, v nichž je vždy  $(x - \text{kořen } Q)$ , nebo nerozložitelný kvadratický dvojčlen či trojčlen.
- Při rozkladu  $Q(x)$  mohou nastat tyto případy:

a) Všechny kořeny  $Q(x)$ , označíme je  $x_1, x_2$  až  $x_k$  jsou reálná čísla, a žádný kořen se neopakuje (má násobnost jedna). Pak:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_k)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \dots + \frac{K}{x-x_k}$$

b) Všechny kořeny  $Q(x)$ , označíme je  $x_1, x_2$  až  $x_k$  jsou reálná čísla, ale některý kořen, například  $x_1$  se opakuje  $n$ -krát (říkáme, že má násobnost  $n$ ). Pak:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)^n \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_k)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n} + \frac{B}{x-x_2} + \dots + \frac{K}{(x-x_k)}$$

c) Jmenovatel obsahuje nerozložitelný kvadratický dvojčlen nebo trojčlen násobnosti jedna. Příkladem budiž například  $x^2 + 1$  nebo  $x^2 + 2x + 4$ . Pak:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(ax^2 + bx + c) \cdot (x-x_1) \cdot \dots} = \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)} + \frac{C}{x-x_1} \dots$$

---

**Příklad 6.3.** Rozložte na parciální zlomky  $\frac{7x-9}{x^2+x-6}$ .

---

**Příklad 6.4.** Rozložte na parciální zlomky  $\frac{3x+3}{(x+2)(x-1)}$ .

---

**Příklad 6.5.** Rozložte na parciální zlomky  $\frac{6x^3 + 21x^2 + 18x + 5}{(x+1)^3 x}$ .



**Odbočka:** Jak dělíme mnohočlen mnohočlenem?

$$(3x^3 + 5x^2 + 5x + 2) : (x^2 + x + 1)$$

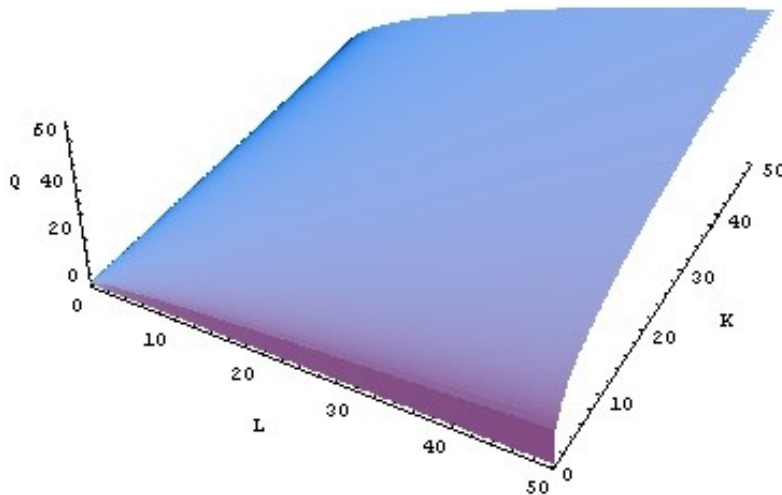
Pokud v racionální funkci  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  je stupeň čitatele větší než jmenovatele, nejprve mnohočleny dělíme, teprve poté rozkládáme.

---

**Příklad 6.5.** Rozložte na parciální zlomky  $\frac{3x^2 - 3x + 2}{x^3 + x}$

## FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

- Funkce **dvou proměnných**:  $z = f(x, y)$ .
- Například **Cobb-Douglasova produkční funkce**  $Q(K, L) = AK^\alpha L^\beta$ .
- **Graf** funkce dvou proměnných si lze představit jako plochu („krajinu“) v trojrozměrném prostoru:



Obr. 4.6. Graf Cobb-Douglasovy funkce. Zdroj: Wikipedia.

-**Definiční obor** funkce dvou proměnných tvoří body  $[x, y]$ , pro které má daná funkce smysl. Určujeme jej graficky.

---

**Příklad 4.1.** Určete definiční obor funkce  $f(x, y) = \sqrt{x + y - 2}$ .

---

**Příklad 4.2.** Určete definiční obor funkce  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ .

---

**Příklad 4.3.** Určete definiční obor funkce  $f(x, y) = \log(x^2 - y)$ .

---

**Příklad 4.5.** Určete definiční obor funkce  $f(x, y) = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$ .

- **Derivace** funkce dvou proměnných: Necht' funkce  $f(x, y)$  je funkcí dvou proměnných  $x$  a  $y$ . Derivaci funkce dvou proměnných podle jedné z nich nazýváme *parciální derivace*. Pro parciální derivace funkce  $f(x, y)$  podle  $x$  respektive  $y$  užíváme následující značení:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, f'_x(x, y), f'_x, \text{ respektive } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, f'_y(x, y), f'_y$$

Definice parciálních derivací se zavádí obdobně jako derivace funkce jedné proměnné:

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Při výpočtu parciální derivace podle  $x$  postupujeme tak, že  $y$  považujeme za konstantu (pouze ji opisujeme) a funkci  $f(x, y)$  derivujeme podle  $x$ . Při výpočtu parciální derivace podle  $y$  postupujeme přesně opačně.

---

**Příklad 4.6.** Vypočtěte parciální derivace funkce  $f(x, y) = x^2 y + 2y^3$ .

---

**Příklad 4.7.** Vypočtěte parciální derivace funkce  $f(x, y) = x^2 e^y + \ln(xy)$ .



- **Druhé derivace** funkce dvou proměnných:

Druhá derivace podle  $x$ :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

Druhá derivace podle  $y$ :  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Smíšená derivace:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  respektive  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .

U smíšené derivace nezáleží na pořadí derivování (věta o záměnnosti pořadí derivování), platí tedy:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .

---

**Příklad 4.8.** Vypočtěte druhé partiální derivace funkce  $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 5$ .

- **Cobb-Douglasova produkční funkce** udává závislost produkce  $Q$  na práci  $L$  a kapitálu  $K$ :

$$Q = AK^a L^b \quad (4.1)$$

Ve vztahu (4.1) jsou  $A$ ,  $a$ ,  $b$  kladné konstanty. Konstanta  $A$  souvisí s technologickým pokrokem: při stejném  $K$  a  $L$  vyšší  $A$  znamená, že je produkce vyšší (ze stejného množství kapitálu a práce se vyprodukuje více díky efektivnějším technologiím). Podle hodnoty  $a + b$  říkáme o produkční funkci, že má:

- konstantní výnosy z rozsahu, je-li  $a + b = 1$
- rostoucí výnosy z rozsahu, je-li  $a + b > 1$
- klesající výnosy z rozsahu, je-li  $a + b < 1$ .

### - Mezní produkt práce a kapitálu

Derivacemi produkční funkce podle práce respektive kapitálu získáme **mezní produkt práce  $MP_L$**  respektive **mezní produkt kapitálu  $MP_K$** :

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L},$$
$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K}$$

---

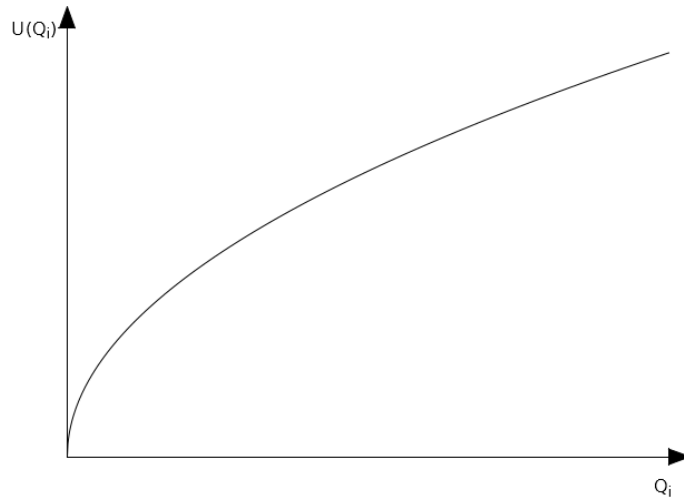
**Příklad 4.9.** Je dána Cobb-Douglasova funkce  $Q = 80K^{0,3}L^{0,7}$ . Určete:

- a) mezní produkt práce a kapitálu,
- b) mezní produkt práce pro  $K = 100$  a  $L = 50$ .

- **Funkce užitku:** Mějme  $n$  druhů zboží, jejichž množství bud'  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ . Předpokládejme, že spotřebitel je schopen přiřadit každé skupině zboží jednu hodnotu, která vyjadřuje *užitečnost (užitek)* dané skupiny zboží. Zmíněné přiřazení nazýváme *funkce užitečnosti (utility fiction)*, a zapisujeme:

$$U(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$$

V dalším výkladu se omezíme pouze na funkce užitečnosti dvou proměnných.



Obr. 4.8. Obvyklý tvar funkce užitku.

- **Mezní užitečnost (užitek)** je derivace užitku:

$$MU_i = \frac{\partial U(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)}{\partial Q_i}$$

---

**Příklad 4.10.** Je dána funkce užitečnosti pro dva druhy zboží  $U(Q_1, Q_2) = Q_1 \sqrt{Q_2}$ . Zjistěte, zda je spotřebitelem preferován stav  $Q_1 = 10$ ,  $Q_2 = 5$  nebo stav s hodnotami  $Q_1 = 7$ ,  $Q_2 = 8$ .

---

**Příklad 4.11.** Vypočtěte mezní užitek  $MU_1$  a  $MU_2$  pro funkci  $U = Q_1^{0,5} \cdot Q_2^{0,2}$ :

- a) obecně,
- b) pro  $Q_1 = 10$  a  $Q_2 = 8$ .

**Příklad 4.12.** Pan Tomáš má k dispozici důchod 200 jednotek (například eur). Může si za ně koupit dva statky, které mají cenu  $P_1 = 4$  a  $P_2 = 2$  jednotky. Funkce užitku  $U$  pana Tomáše je dána takto:  $U(Q_1, Q_2) = Q_1 \cdot Q_2$ , kde  $Q_1$  je množství prvního statku a  $Q_2$  je množství druhého statku. Jaké množství statků má pan Tomáš koupit tak, aby maximalizoval svůj užitek a přitom utratil veškerý důchod?