MATEMATIKA V EKONOMII – PŘEDNÁŠKA Č. 6:
Neurčitý integrál, metoda per partes, integrace racionálních funkcí

POJEM NEURČITÉHO INTEGRÁLU, ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

- Funkce $F(x)$ se nazývá **primitivní funkcí** k funkci $f(x)$ na otevřeném intervalu $J \subseteq R$ právě tehdy, když $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in J$. Primitivní funkce existuje ke každé spojité funkci na J.

- Množina všech primitivních funkcí k dané funkci se nazývá **neurčitý integrál, a značí se takto:**

$$\int f(x)dx = F(x) + C\,,$$

kde $\int$ je integrační znak,
x integrační proměnná,
$f(x)$ integrovaná funkce neboli integrand,
$F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$,
C integrační konstanta.

Neurčitý integrál je lineární operátor, což znamená, že splňuje následující dvě podmínky:

i) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$,

ii) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Tabulka 6.1. Základní integrály.

řádek	$f(x)$	$\int f(x)dx$
1	0	C
2	1	x + C
3	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ + C
4	e^x	e^x + C
5	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$ + C
6	$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
7	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$ + C

8	sin$x$	–cos$x$ + C
9	cos$x$	sin$x$ + C
10	$\frac{1}{\cos^2 x}$	tg$x$ + C
11	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	cotg$x$ + C
12	$\frac{1}{1+x^2}$	arctg$x$ + C
13	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
14	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arcsin$x$ + C
15	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arccos$x$ + C
16	$\frac{1}{\sqrt{1\pm x^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{1\pm x^2}\right\rvert$ + C

Příklad 6.2. Integrujte:

a) $\int x^2 dx$.

b) $\int \left(x^3 + 2x^2 + 6x + 1\right) dx$.

c) $\int \sqrt[3]{x} dx$.

d) $\int \frac{1}{x^3} dx$.

e) $\int \left(5\sin x - 2\cos x + 3^x\right) dx$.

INTEGRACE SOUČINU FUNKCÍ (METODA PER PARTES)

Smyslem této metody je **rozložit** jeden složitější integrál **na dva jednodušší členy** (odtud název metody: *per partes* je latinsky „po částech").

- Vzorec, který používáme při integraci per partes, si odvodíme z pravidla pro derivaci součinu dvou funkcí, které označíme $u(x)$ a $v(x)$.

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

Nyní osamostatníme vlevo člen uv': $uv' = (uv)' - u'v$, a tuto rovnost integrujeme:

$$\int uv'dx = \int (uv)'dx - \int u'vdx$$

Prostřední člen obsahuje integrál i derivaci, proto se tyto dvě operace vyruší, a dostaneme:

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

- Důležitá je **správná volba** funkcí u a v'. Nesprávná volba funkcí vede k tomu, že složitost úlohy naroste. V takovém případě je zapotřebí zvolit funkce u a v' opačně.

Příklad 6.7. Vypočtěte: $\int x \cdot e^x dx$.

Příklad 6.8. Vypočtěte: $\int x \cdot \ln x dx$.

Příklad 6.10. Vypočtěte: $\int arctgx dx$.

Příklad 6.11. Vypočtěte: $\int \sin x e^{x} dx$.

INTEGRACE RACIONÁLNÍCH FUNKCÍ (METODA PARCIÁLNÍCH ZLOMKŮ)

- Racionální funkcí rozumíme výraz $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P(x) a Q(x) jsou polynomy proměnné x. Budeme předpokládat, že stupeň polynomu $P(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$. K integraci (ryzích) racionálních funkcí ve využívá metoda rozkladu na *parciální zlomky*. Smyslem této metody je rozložit zadanou (a obvykle složitou) racionální funkci na součet „nejjednodušších“ (*parciální* znamená „částečný“) zlomků.

Příklad. Vypočtěte $\int \frac{5x+8}{x^2+2x-8}dx$.

Příklad. Vypočtěte: $\int \frac{5x^2 - 17x + 12}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$

Příklad. Integrujte $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$.

Příklad. Integrujte: $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}\,dx$.

CELKOVÉ NÁKLADY A CELKOVÉ PŘÍJMY

- V ekonomii lze (neurčitý) integrál využít k výpočtu **celkových příjmů** nebo **celkových nákladů,** pokud jsou známy (dány) mezní příjmy respektive mezní náklady.

- Funkce **celkových nákladů *TC*(*x*)** a funkce **mezních nákladů *MC*(*x*)**, kde x je počet výrobků, spolu souvisejí vztahem:

$$TC(x) = \int MC(x)dx + C \tag{6.1}$$

Vztah (6.1) říká, že celkové náklady jsou součtem mezních nákladů. Integrační konstanta C se určí z jedné známé hodnoty $TC(x)$ pro dané x. Stejný vztah platí také pro **celkové příjmy *TR*(*x*)** a **mezní příjmy *MR*(*x*):**

$$TR(x) = \int MR(x)dx + C \tag{6.2}$$

Příklad 6.12. Určete funkci celkových nákladů, jestliže funkce mezních nákladů $MC(x) = 140e^{0,2x}$ a náklady na produkci 10 výrobků činí 6000 Kč.

Příklad 6.14. Mezní příjmy jsou popsány funkcí $MR = 140 - 6x + 2$, najděte funkci celkového příjmu.