MATEMATIKA V EKONOMII – PŘEDNÁŠKA Č. 7:
Integrační metody

INTEGRACE SOUČINU FUNKCÍ (METODA PER PARTES)

Smyslem této metody je **rozložit** jeden složitější integrál **na dva jednodušší členy** (odtud název metody: *per partes* je latinsky „po částech“).

- Vzorec, který používáme při integraci per partes, si odvodíme z pravidla pro derivaci součinu dvou funkcí, které označíme $u(x)$ a $v(x)$.

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

Nyní osamostatníme vlevo člen uv': $uv' = (uv)' - u'v$, a tuto rovnost integrujeme:

$$\int uv'dx = \int (uv)'dx - \int u'vdx$$

Prostřední člen obsahuje integrál i derivaci, proto se tyto dvě operace vyruší, a dostaneme:

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

- Důležitá je **správná volba** funkcí u a v'. Nesprávná volba funkcí vede k tomu, že složitost úlohy naroste. V takovém případě je zapotřebí zvolit funkce u a v' opačně.

Příklad 6.7. Vypočtěte: $\int x \cdot e^x dx$.

Příklad 6.8. Vypočtěte: $\int x \cdot \ln x dx$.

Příklad 6.10. Vypočtěte: $\int arctgx dx$.

Příklad 6.11. Vypočtěte: $\int \sin xe^x dx$.

INTEGRACE RACIONÁLNÍCH FUNKCÍ (METODA PARCIÁLNÍCH ZLOMKŮ)

- Racionální funkcí rozumíme výraz $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P(x) a Q(x) jsou polynomy proměnné x. Budeme předpokládat, že stupeň polynomu $P(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$. K integraci (ryzích) racionálních funkcí ve využívá metoda rozkladu na *parciální zlomky*. Smyslem této metody je rozložit zadanou (a obvykle složitou) racionální funkci na součet „nejjednodušších" (*parciální* znamená „částečný") zlomků.

Příklad. Vypočtěte $\int \frac{5x+8}{x^2+2x-8}dx$.

Příklad. Vypočtěte: $\int \frac{5x^2 - 17x + 12}{x^3 - 4x^2 + 4x}\,dx$

Příklad. Integrujte $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5}\,dx$.

Příklad. Integrujte: $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}\,dx$.

CELKOVÉ NÁKLADY A CELKOVÉ PŘÍJMY

- V ekonomii lze (neurčitý) integrál využít k výpočtu **celkových příjmů** nebo **celkových nákladů,** pokud jsou známy (dány) mezní příjmy respektive mezní náklady.

- Funkce **celkových nákladů *TC*(*x*)** a funkce **mezních nákladů *MC*(*x*)**, kde *x* je počet výrobků, spolu souvisejí vztahem:

$$TC(x) = \int MC(x)dx + C \qquad (6.1)$$

Vztah (6.1) říká, že celkové náklady jsou součtem mezních nákladů. Integrační konstanta *C* se určí z jedné známé hodnoty *TC*(*x*) pro dané *x*. Stejný vztah platí také pro **celkové příjmy *TR*(*x*)** a **mezní příjmy *MR*(*x*):**

$$TR(x) = \int MR(x)dx + C \qquad (6.2)$$

Příklad 6.12. Určete funkci celkových nákladů, jestliže funkce mezních nákladů $MC(x) = 140e^{0,2x}$ a náklady na produkci 10 výrobků činí 6000 Kč.

Příklad 6.14. Mezní příjmy jsou popsány funkcí $MR = 140 - 6x + 2$, najděte funkci celkového příjmu.

SUBSTITUCE V NEURČITÉM INTERGRÁLU

- Složitější neurčité integrály je možné řešit pomocí substituce, kterou se integrály zjednoduší.
- **Substituce** = náhrada původní proměnné nebo výrazu novou proměnnou.
- Budeme se zabývat substitucemi složených funkcí, a dále logaritmických, exponenciálních a goniometrických funkcí.

INTEGRACE SLOŽENÝCH FUNKCÍ

Příklad. Vypočtěte $\int (3x-1)^4 \, dx$.

Příklad 7.2. Vypočtěte: $\int e^{2x+3}dx$.

Příklad. Vypočtěte: $\int 2x\cos\left(x^2-4\right)dx$.

INTEGRACE LOGARITMICKÝCH A EXPONENCIÁLNÍCH FUNKCÍ

Obsahují-li integrály exponenciální funkci e^x respektive logaritmickou funkci $\ln x$, provádíme náhradu právě těchto funkcí (u logaritmické funkce je zvláště výhodné, pokud integrál obsahuje člen $\frac{\ln^{\alpha} x}{x}$.)

Příklad 7.4. Vypočtěte: $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

Příklad 7.5. Vypočtěte: $\int \frac{5}{x \ln^2 x} dx$.

Příklad. Vypočtěte: $\int \frac{e^x}{e^x + 5} dx$.

Příklad 7.7. Vypočtěte: $\int \frac{e^x - 2}{e^x + 1} dx$.

INTEGRACE GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

Integrály obsahující goniometrické funkce sinus, kosinus, tangens nebo kotangens lze řešit pomocí následujících substitucí:

- Integrál obsahuje funkce $\sin^\alpha x$ a $\cos^\beta x$, přičemž α je liché a β sudé. V tomto případě užijeme substituci: $\cos x = t$, nahrazujeme tedy sudou funkci. Pokud je situace opačná a α je sudé a β liché, užijeme substituci: $\sin x = t$.
- Integrál obsahuje funkce $\sin^\alpha x$ a $\cos^\beta x$, přičemž α i jsou β sudé. Pak použijeme substituci $tgx = t$.
- Integrál obsahuje funkce $\sin^\alpha x$ a $\cos^\beta x$, přičemž α i jsou β liché. Nahrazujeme tu funkci, která má vyšší exponent.
- Pokud nelze použít žádnou z předchozích substitucí, je možné využít univerzální substituci $tg\frac{x}{2} = t$, viz Tabulka 7.2.

Při úpravách integrandu používáme základní goniometrické vzorce, viz Tabulka 7.1.

Tabulka 7.1. Nejdůležitější goniometrické vztahy

č.	vztah
(1)	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
(2)	$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$
(3)	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
(4)	$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
(5)	$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

Tabulka 7.2. Univerzální goniometrická substituce.

č.	vztah
(1)	$tg\,\frac{x}{2} = t$
(2)	$\sin x = \frac{2t}{t^2 + 1}$
(3)	$\cos x = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}$
(4)	$dx = \frac{2}{1 + t^2}$

Příklad. Vypočtěte: $\int \cos x \cdot \sin^2 x dx$.

Příklad 7.10. Vypočtěte: $\int \sin^3 x dx$

Příklad 7.11. Vypočtěte: $\int \frac{dx}{\sin x}$

INTEGRACE IRACIONÁLNÍCH FUNKCÍ

- Iracionální funkce jsou funkce obsahující proměnnou pod odmocninou. V tomto případě obvykle **nahrazujeme celou odmocninu**.

Příklad 7.12. Vypočtěte: $\int \sqrt{4x+1}dx$.

Příklad 7.13. Vypočtěte: $\int x\sqrt{x^2-1}dx$.

URČITÝ INTEGRÁL

NEWTONŮV URČITÝ INTEGRÁL

***Definice 8.1**.: Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na otevřeném intervalu J. Newtonovým určitým integrálem funkce $f(x)$ od a do b (na intervalu $(a,b) \subset J$) nazýváme symbol $\int_a^b f(x)dx$, kde a je horní integrační mez a b je dolní integrační mez.*

- **Výpočet** určitého integrálu provádíme pomocí **Newtonova-Leibnizova vzorce**:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{8.2}$$

- Zatímco neurčitý integrál je *funkce* (přesněji množina funkcí lišících se o konstantu *C*), **je určitý integrál *číslo***, které vypočteme ze vztahu (8.2). Význam integrační mezí spočívá v tom, že nám říkají „odkud kam integrujeme“.

- **Základní vlastnosti** určitého integrálu:

i) $\int_a^a f(x)dx = 0$

ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

iii) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

iv) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

v) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$, $b \in (a,c)$

- Užití určitého integrálu je velmi široké, zvláště v přírodních a vědách a technických oborech. Určitý integrál se používá nejčastěji k výpočtu:

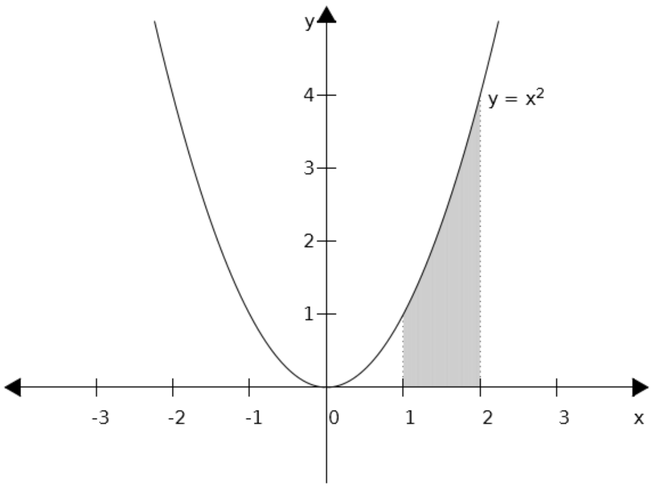
- obsahu plochy ohraničené danými křivkami
- délky křivky
- objemu rotačního tělesa
- povrchu rotačního tělesa
- při řešení diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami

V ekonomii můžeme určitý integrál využít k výpočtu:

- celkových veličin z mezních (marginálních) veličin, například celkového příjmu z mezního příjmu,
- celkové veličiny, je-li dán její tok či intenzita.
- k výpočtu přebytku spotřebitele a výrobce v podmínkách dokonalé konkurence

---

Příklad 8.1. Vypočtěte: $\int_1^2 x^2 dx$.



Obr. 8.2. Obsah plochy pod křivkou $y = x^2$.

Příklad 8.2. Vypočtěte: $\int_0^3 x^2 dx$.

Příklad 8.3. Vypočtěte: $\int_{-2}^{0} x^3 dx$.

Příklad 8.4. Vypočtěte: $\int_{-1}^{2} \left(3x^2 - 4x + 1\right) dx$.

Příklad 8.5. Vypočtěte: $\int_{0}^{1} e^x dx$.

Příklad 8.6. Vypočtěte: $\int_0^{\pi} \sin x dx$.

Příklad 8.8. Vypočtěte: $\int_1^{e} \frac{1}{x} dx$.

Varovný příklad 8.9. Vypočtěte: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx$.

METODA PER PARTES V URČITÉM INTEGRÁLU

Metodu per partes jsme zavedli v Kapitole 6. Pro určitý integrál při užití této integrační metody platí:

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = \left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx \tag{8.3}$$

Příklad 8.10. Vypočtěte: $\int_1^2 xe^x\,dx$.

Příklad 8.11. Vypočtěte: $\int_1^e x^2 \ln x dx$.

SUBSTITUCE V URČITÉM INTEGRÁLU

- Při substituci v určitém integrálu nahrazu**j**eme nejen **integrovanou funkci**, ale také **integrační meze**!

Věta 8.1. *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a,b\rangle$, nechť $\varphi(t)$ a $\varphi'(t)$ jsou spojité funkce v intervalu $\langle \alpha,\beta\rangle$, přičemž nechť $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, nechť $\varphi'(t)$ je ryze monotónní v $\langle \alpha,\beta\rangle$. Potom:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt \tag{8.4}$$

Užití Věty 8.1, respektive vztahu (8.4) si předvedeme na několika řešených úlohách.

Příklad 8.13. Vypočtěte: $\int_0^3 (2x+1)^3 \, dx$.

Příklad 8.14. Vypočtěte: $\int_0^1 x\sqrt{x^2+2}\,dx$.

Příklad 8.15. Vypočtěte: $\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x dx$

NEVLASTNÍ INTEGRÁL

V předchozích kapitolách o určitém integrálu jsme předpokládali, že obě integrační meze a a b jsou konečné, a také, že integrovaná funkce je v daném intervalu spojitá a nabývá pouze konečných hodnot.

- Pokud není splněna první podmínka, hovoříme o *nevlastním integrálu vlivem integrační meze*.
- Pokud není splněna druhá podmínka, hovoříme o *nevlastním integrálu vlivem nespojitosti funkce*.

V nevlastním integrálu je tedy buď integrační mez nekonečná, nebo integrovaná funkce nabývá nekonečné hodnoty v bodě nespojitosti.

Připomeňme, že pojmem „vlastní“ se označují konečné hodnoty (reálná čísla), zatímco pojem „nevlastní“ označuje plus nebo mínus nekonečno. Odtud tedy pojmenování tohoto typu integrálu.

Hodnota nevlastního integrálu může být konečná, v tom případě říkáme, že *konverguje*. V opačném případě říkáme, že integrál *diverguje*.

Výpočet nevlastního integrálu vlivem horní meze se provádí pomocí následujícího vztahu:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \left[F(x)\right]_a^t \qquad (8.5)$$

Výpočet nevlastního integrálu vlivem dolní meze se provádí analogicky.

Příklad 8.17. Vypočtěte: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$.

Příklad 8.18. Vypočtěte: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$.