MATEMATIKA – seminář č. 11 – FUNKČNÍ ŘADY

FUNKČNÍ ŘADA A JEJÍ SOUČET

Nechť $f_1(x), f_2(x)$, atd. je posloupnost funkcí. *Funkční řada* je symbol:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

Součet funkční řady je funkce $s(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$$

Řada je konvergentní, jestliže funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$ konverguje k funkci $s(x)$ na množině M. Pokud k $s(x)$ konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, hovoříme o absolutní konvergenci.

Množina všech $x \in M$, pro které řada konverguje (konverguje absolutně), se nazývá *obor konvergence* (obor absolutní konvergence), a značí se OK a OAK.

MOCNINNÁ ŘADA

Speciální případ funkční řady: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a)^1 + c_2 (x-a)^2 + \dots$

Mocninná řada konverguje absolutně na intervalu $(a-\rho, a+\rho)$, kde ρ je *poloměr konvergence* a daný interval je *interval konvergence* (IK). Poloměr konvergence se vypočte pomocí následujících limit:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \text{ nebo } \rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

V krajních bodech $a + \rho$, $a - \rho$, řada může, ale nemusí konvergovat, a proto se tyto případy řeší zvlášť. Platí, že $IK \subseteq OAK \subseteq OK$.

GEOMETRICKÁ ŘADA

Řada tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} f^n(x)$, $f(x) = q$, řada konverguje pro $|q| < 1$, a součet řady: $s(x) = \dfrac{a_1}{1-q}$.

KONVERGENCE FUNKČNÍCH ŘAD

Pro absolutní konvergenci můžeme použít podílové kritérium: $L(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}$, nebo odmocninové kritérium: $L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|}$. Platí, že pokud $L(x) < 1$, řada pro dané x absolutně konverguje, pro $L(x) > 1$ diverguje a pro $L(x) = 1$ nelze rozhodnout.

....

1. Určete obor případně poloměr konvergence funkčních řad, u geometrických řad určete i jejich součet:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^n$ c $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{nx}}{n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{(x+3)^n}{n2^n}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

h) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{x}{x+2}\right)^n$ i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$ j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{(2n-1)(2n+1)}$ l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$ m) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^{n+1}(x+1)$

n) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n$ o) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ p) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n$

Výsledky: a) IK=OK=OAK=(-1,1) , b) IK=OK=OAK=(-3,-1) , c) OK=OAK=(1/e,e) , d) $OK = OAK = (-\infty, 0)$, e) $OAK = (-\infty, 0)$, $OK = (-\infty, 0>$, f) $OK = (-5, -1>$, IK = $OAK = (-5, -1)$, g) IK=OK=OAK=(-1,1), h) $OK = OAK = (-1, \infty)$, i) $OAK = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, $OK = (-\infty, -1) \cup <1, \infty)$, j) IK=OAK=(-1,1), OK = <-1,1) , k) IK=(-1,1), OK=OAK=<-1,1>, l) IK=(-4,-2), OK=OAK=<-4,-2>, m) OK=OAK=(1/e-1,e-1), n) $OK = OAK = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, o) IK = OK = OAK= R, p) IK=OK=OAK=(-3,3).