MATEMATIKA V EKONOMII– seminář č. 2

LOGARITMICKÁ DERIVACE

Máme za úkol derivovat funkci $y = f(x)^{g(x)}$. Dva způsoby řešení:

i) Použijeme úpravu $y = f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ a derivujeme jako exponenciální funkci.

ii) Funkci y nejprve logaritmujeme: $y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = \ln f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x)\ln f(x)$,

a pak derivujeme: $\dfrac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + g(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

1.) Derivujte: a) $y = x^{\ln x}$, b) $y = (\sin 4x)^{2x+3}$

Výsledky: a) $y = 2x^{\ln x - 1}\ln x$, b) $y' = (\sin 4x)^{2x+3}\left[2\ln(\sin 4x) + \dfrac{4(2x+3)\cos 4x}{\sin 4x}\right]$

DERIVACE IMPLICITNÍ FUNKCE

Je dána funkce $f(x, y) = 0$, kterou nelze upravit do tvaru $y = f(x)$ (y je funkcí x, ale nejde osamostatnit). Pak derivujeme takto: $y' = \dfrac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$.

1.) Derivujte funkci a) $f(x, y) = \sin x + 2x^2 y$, b) $\ln y + e^{x^2} + 5x^3 y = 0$

Výsledky: a) $y' = -\dfrac{\cos x + 4xy}{2x^2}$, b) $y' = -\dfrac{2xe^{x^2} + 15x^2 y}{\frac{1}{y} + 5x^3}$

TAYLOROVA a MACLAURINOVA ŘADA

Složité funkce, které mají derivace až do n-tého řádu, můžeme přibližně nahradit (aproximovat) Taylorovým polynomem stupně n v okolí zvoleného bodu a. Taylorův polynom funkce $f(x)$ v bodě a je definován takto:

$$T_n(f, a, x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ \dots \ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Pokud zvolíme $a = 0$, dostaneme Maclaurinův polynom:

$$T_n(f, 0, x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ \dots \ + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

1. Určete Maclaurinovu řadu funkcí:

a) $y = e^{2x}$ b) $y = \ln(x+1)$ c) $y = \sin x$

Výsledky:

$e^{2x} \cong 1+2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}+\frac{2x^4}{3}+\ldots$ $\ln(x+1) \cong x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$

2.) Porovnejte hodnoty daných funkcí s hodnotou jejich Maclaurinova polynomu (pro $n = 3$) v bodě $x = 1$. Jak dobrá je tato aproximace?
3.) Zapište Taylorovu řadu funkce $y = e^x$ v bodě $a = 2$.

Výsledek: $e^x \cong e^2+\frac{e^2}{1!}(x-2)+\frac{e^2}{2!}(x-2)^2+\frac{e^2}{3!}(x-2)^3+\ldots$

EKONOMICKÉ APLIKACE (první derivace)

-elasticita funkce, cenová elasticita poptávky a nabídky, výpočet mezních veličin.

1. Vypočtěte elasticitu funkce $y = 2x^3$ v bodě $x = 2$.

Výsledek: $E(x)=\frac{6x^3}{y}$, $E(2)=3$

2. Je dána poptávka $Q = 90-3P$. Určete:
a) elasticitu poptávky obecně,
b) elasticitu poptávky pro $P = 10$, $P = 15$ a $P = 20$, rozhodněte, zda je poptávka při těchto hodnotách elastická, jednotkově elastická nebo neelastická.

Výsledek: a) $E(P)=\frac{P}{30-P}$, b) $E(10)=\frac{1}{2}$, neelastická; $E(15)=1$, jednotkově elastická; $E(20)=2$, elastická.

3. Jsou dány celkové náklady $TC(Q)=60+3Q-9Q^2+2Q^3$. Určete FC, TVC, AC, AVC, AFC a MC.

Výsledek: $FC=60$, $TC(Q)=3Q-9Q^2+2Q^3$, $AC=\frac{60}{Q}+3-9Q+2Q^2$, $AVC=3-9Q+2Q^2$, $AFC=\frac{60}{Q}$, $MC=3-18Q+6Q^2$.

4. Jsou dány celkové náklady $TC(Q)=32-2Q+2Q^3$. Minimalizujte průměrné náklady.

Výsledek: Minimum AC nastává pro $Q = 2$.

5. Jsou dány celkové náklady $TC(Q)=8Q+12$ a celkové příjmy $TR(Q)=-2Q^2+22Q$. Najděte: a) body zvratu, b) hodnotu Q, pro kterou je zisk maximální.
Výsledek: a) $Q = 1$ a $Q = 6$, b) $Q = 3{,}5$.

6. Určete maximální zisk firmy, jestliže celkové příjmy jsou popsány funkcí $TR(Q) = 150Q – 80$ a náklady funkcí $TC(Q) = 120 + 0{,}3Q^2$.
Výsledek: $Q = 250$.