MATEMATIKA V EKONOMII – PŘEDNÁŠKA Č. 10

(Nekonečné číselné řady-pokračování, nekonečné funkční řady)

Pro **alternující řady** ve tvaru $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n a_n$ se používá **Leibnizovo kritérium**. Alternující řady jsou řady, v nichž se střídají kladné a záporné členy. Střídání znamének členů řady způsobuje výraz $(-1)^n$.

Věta 10.6. *(Leibnizovo kritérium). Nechť* $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *je alternující řada a nechť platí:*

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ii) $a_{n+1} \le a_n, \forall n \in N$

Pak je řada $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ *konvergentní.*

Příklad 10.12. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ (*Leibnizova řada*).

Příklad. Rozhodněte o konvergenci následujících nekonečných řad. U geometrických řad určete součet

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{n!}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^n$

NEKONEČNÁ FUNKČNÍ ŘADA A JEJÍ SOUČET

-Nekonečná řada, jejíž členy jsou funkce, se nazývá **nekonečná funkční řada.**

Příklad. Mějme funkční řadu $\sum_{x=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$. Ukážeme si některé její vlastnosti...

Nechť $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... je posloupnost funkcí. **Nekonečná funkční řada** je symbol:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

Součet funkční řady je funkce $s(x)$, kterou získáme (stejně jako u nekonečných číselných řad) jako limitu posloupnosti částečných součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$$

-Řada je **konvergentní**, jestliže funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$ konverguje k funkci $s(x)$ na jisté množině *M*.

-Pokud k $s(x)$ konverguje i řada absolutních hodnot $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, hovoříme o **absolutní konvergenci**.

-Množina všech $x \in M$, pro které řada konverguje (konverguje absolutně), se nazývá **obor konvergence** (**obor absolutní konvergence**), a v dalším textu bude značen jako *OK* (*OAK*).

GEOMETRICKÁ ŘADA

Geometrickou řadou nazýváme řadu ve tvaru: $\sum_{n=1}^{\infty} f^n(x)$,

Označíme-li $f(x) = q$, pak řada konverguje pro $|q| < 1$, a součet řady:

$$s(x) = \frac{a_1}{1-q} \qquad (11.5)$$

Příklad 11.6. Určete obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ a její součet.

Příklad. Určete obor konvergence a součet řady $\sum_{n=1}^{\infty}(x+3)^n$.

Příklad 11.9. Určete obor konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty}\ln^n x$.

Příklad 11.10. Určete obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$.

MOCNINNÁ ŘADA

-Mocninná řada je speciálním případem obecné funkční řady, a je dána následujícím předpisem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a)^1 + c_2 (x-a)^2 + \ldots$$

-Mocninná řada konverguje absolutně na intervalu $(a-\rho, a+\rho)$, kde $\boldsymbol{a}$ je **střed řady** a $\boldsymbol{\rho}$ je **poloměr konvergence**.

-Tento interval se nazývá **interval konvergence (IK)**. Interval konvergence je souměrný podle středu a, a obsahuje všechna x, která mají od středu menší vzdálenost než ρ.

- Poloměr intervalu konvergence ρ se vypočte pomocí následujících limit:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \tag{11.3}$$

nebo

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \tag{11.4}$$

V krajních bodech intervalu $a + \rho$, $a - \rho$, řada může, ale nemusí konvergovat, a proto se tyto případy musí vyšetřit zvlášť. Obecně pak platí: $IK \subseteq OAK \subseteq OK$.

Příklad 11.2. Určete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$.

Příklad 11.3. Určete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^n}$.

Příklad 11.4. Určete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+5)$.

Příklad 11.5. Určete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{n^3}$.