# MATEMATIKA V EKONOMII – PŘEDNÁŠKA Č. 9

## NEKONEČNÉ ČÍSELNÉ ŘADY

### POJEM NEKONEČNÉ ČÍSELNÉ ŘADY

*Číselnou řadou* nazýváme součet (reálných) čísel $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ .

Je-li počet sčítanců konečný, mluvíme o **konečné číselné řadě**, je-li počet sčítanců nekonečný ($n \to \infty$), jedná se o **nekonečnou řadu**:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (10.1)$$

Veličina $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ se nazývá *n-tý částečný součet řady*. Je to součet prvních *n* členů řady. **Součet řady s** je pak limitou posloupnosti částečných součtů $s_n$:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s \qquad (10.2)$$

Jestliže má daná řada konečný součet, nazývá se **konvergentní**.

V opačném případě, to jest když je součet nekonečný anebo vůbec neexistuje, je řada **divergentní**.

Řadu mohou obecně tvořit kladné i záporné členy, a proto musíme ještě rozlišovat **neabsolutní konvergenci** a **absolutní konvergenci**: řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ne, pak daná řada konverguje neabsolutně. Absolutní konvergence je tedy „silnější“, a je tomu tak proto, že u řady bez absolutních hodnot se mohou kladné a záporné členy řady částečně odečíst.

O konvergenci řad platí tato tvrzení:

1. Vynechání nebo přidání konečného počtu členů nemá vliv na konvergenci či divergenci řady.
2. Pokud daná řada konverguje absolutně, pak také konverguje neabsolutně. Opačné tvrzení neplatí.

Konvergenci (divergenci) řad zjišťujeme pomocí *podmínek konvergence* a/nebo užitím *kritérií konvergence*, které jsou obsahem následující kapitoly.

**Příklad 10.1**. Uvažujme dělení pizzy, při kterém nejprve ukrojíme polovinu pizzy, pak ukrojíme polovinu z toho, co zbylo (tedy čtvrtinu původní pizzy), pak ukrojíme polovinu zbytku (tedy osminu původní pizzy), atd. Tímto dělením získáme nekonečnou řadu: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$

Částečné součty této řady jsou:

$s_1 = \frac{1}{2}$,

$s_2 = \sum_{i=1}^{2} a_1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,

$s_3 = \sum_{i=1}^{3} a_1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$, atd.

Tyto částečné součty se blíží k jedné, a podle vztahu (10.2) je tedy součet řady $s = 1$. Nakonec odkrojíme celou pizzu (jednotku).■

**Příklad 10.3**. Určete součet následující nekonečné řady: $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+4+5+6+\dots.$

## PODMÍNKY KONVERGENCE ŘAD, KRITÉRIA KONVERGENCE

Aby řada měla konečný součet (aby konvergovala), musí splňovat **nutnou podmínku konvergence**:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (10.3)$$

Podmínka (10.3) říká, že členy řady se musí zmenšovat k nule. Ale tato podmínka sama o sobě ke konvergenci nestačí, viz např. harmonická řada.

**Příklad 10.4**. Určete součet *harmonické řady*: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$

**Příklad 10.5**. Je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+4}{3n-1}$ konvergentní nebo divergentní?

Podmínka, která s jistotou zaručuje konvergenci řady, se nazývá *postačující podmínka*. Takovou podmínku nalezli v 19. století matematikové L. A. Cauchy[1] a B. Bolzano[2], a proto se nazývá *Bolzano-Cauchyova nutná a postačující podmínka konvergence nekonečné řady*:

***Věta 10.1**. (Bolzano-Cauchyova podmínka): Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými nebo zápornými členy je konvergentní právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo N takové, že pro $n > N$ a libovolné přirozené číslo p platí: $\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} \right| < \varepsilon$.*

[1] L.A. Cauchy (1789-1857), francouzský matematik.
[2] B. Bolzano (1781-1848), český matematik.

## V praxi používaná kritéria:

### - Srovnávací kritérium:

---

***Věta 10.2.*** *(Srovnávací kritérium). Mějme dvě nekonečné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*, a nechť platí* $a_n \geq b_n$ *pro všechna n větší než nějaký index k (tato podmínka říká, že od k-tého členu jsou všechny členy řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *větší než tytéž členy řady* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*). Nechť dále řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní. Potom také řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje. Řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nazývame majorantou řady* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

---

Často používanou řadou pro srovnávací kritérium je *Dirichletova řada*: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Tato řada konverguje pro $\alpha > 1$.

---

**Příklad 10.6**. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ pomocí srovnávacího kritéria.

**Příklad**. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n+1}}$ pomocí srovnávacího kritéria.

Další kritéria konvergence řad pro řady s kladnými členy: **podílové**, **odmocninové** a **integrální kritérium**:

***Věta 10.3. (Limitní podílové kritérium)****. Nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je nekonečná číselná řada s kladnými členy, a nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$*. Potom:*

- *Je-li* $L < 1 \Rightarrow$ *řada konverguje.*
- *Je-li* $L > 1 \Rightarrow$ *řada diverguje.*
- *Je-li* $L = 1 \Rightarrow$ *nelze rozhodnout.*

Toto kritérium používáme především tehdy, když daná řada obsahuje faktoriál.

**Příklad 10.8**. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ pomocí podílového kritéria.

**Příklad**. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^3}$ pomocí podílového kritéria.

***Věta 10.4. (Limitní odmocninové kritérium)****. Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je nekonečná číselná řada s kladnými členy, a nechť* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$*. Potom:*

- *Je-li* $L < 1 \Rightarrow$ *řada konverguje.*
- *Je-li* $L > 1 \Rightarrow$ *řada diverguje.*
- *Je-li* $L = 1 \Rightarrow$ *nelze rozhodnout.*

Toto kritérium používáme především tehdy, když daná řada obsahuje $n$ v exponentu.

**Příklad**. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$ .

**Příklad**. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln}{n}\right)^{n+1}$ .

***Věta 10.5. (Integrální kritérium)****.* *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy,* $a_n = f(n)$*, a nechť* $f(x)$ *je spojitá a nerostoucí funkce na intervalu* $(a,+\infty)$. *Potom daná řada konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

**Příklad 10.11**. Rozhodněte o konvergenci harmonické řady.

**Příklad** . Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Pro **alternující řady** ve tvaru $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n a_n$ se používá **Leibnizovo kritérium**. Alternující řady jsou řady, v nichž se střídají kladné a záporné členy. Střídání znamének členů řady způsobuje výraz $(-1)^n$.

***Věta 10.6.*** *(Leibnizovo kritérium). Nechť* $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *je alternující řada a nechť platí:*

*i)* $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

*ii)* $a_{n+1} \le a_n, \forall n \in N$

*Pak je řada* $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ *konvergentní.*

**Příklad 10.12**. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ (*Leibnizova řada*).

## OPERACE S ŘADAMI

Nekonečné řady můžeme za jistých podmínek násobit reálným číslem (různým od nuly), sčítat je a odčítat, nebo přerovnávat jejich členy.

***Věta 10.7****. Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *jsou konvergentní nekonečné řady,* $k \in R, k \neq 0$. *Potom platí:*

*i)* $\sum_{n=1}^{\infty}k \cdot a_n = k\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

*ii)* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty}b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \pm b_n\right)$

*iii) Součet řady je nezávislý na přerovnání členů řady.*

Bod i) říká, že když vynásobíme všechny členy řady konstantou $k$, pak se součet řady změní $k$ krát. Bod ii) říká, že nezáleží na pořadí sčítání členů obou řad.

## GEOMETRICKÁ ŘADA

Jednou z nejjednodušších nekonečných řad je **geometrická řada**. Vznikne součtem členů geometrické posloupnosti. Připomeňme, že u geometrické posloupnosti je podíl každých dvou sousedních členů $a_n$ a $a_{n+1}$ stejný a roven kvocientu $q$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \forall n \in N$.

Součet prvních $n$ členů geometrické posloupnosti lze vypočíst ze vztahu (10.4):

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{10.4}$$

Součet nekonečné řady:

$$s = \frac{a_1}{1-q} \tag{10.5}$$

Pokud je kvocient $q$ v absolutní hodnotě menší než 1, je geometrická řada konvergentní. Ve všech ostatních případech (pro $|q| \geq 1$) je řada divergentní.

---

**Příklad 10.15**. Určete součet $s$ geometrické řady: $s = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$

---

**Příklad 10.16**. Určete součet geometrické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{5} \right)^n$ .

## Další speciální typy nekonečných řad

Kromě geometrických řad lze určit součet řady i u takzvaných **teleskopických řad**. Teleskopickou řadou nazýváme řadu ve tvaru: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+k})$, kde $k \in N$. Svůj název obdržela řada proto, že pokud ji rozepíšeme člen po členu (vysuneme řadu jako teleskop), její členy se až na několik ($k$) členů na začátku řady vzájemně odečtou.

Součet teleskopické řady pro nejjednodušší případ $k = 1$ lze určit takto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n \qquad (10.6)$$

Podmínkou konvergence teleskopické řady je tedy konvergence samotné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

---

**Příklad 10.18**. Určete součet řady: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

*Řešení:*

Danou řadu upravíme takto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Vidíme, že počínaje druhým členem se členy řady postupně po dvojicích odečtou. Proto je součet řady $s = 1$. Stejný výsledek bychom obdrželi i použitím vztahu (10.6). ■

## Ekonomické aplikace nekonečných řad

V ekonomii jsou samozřejmě všechny číselné řady konečné. Některé řady však mohou obsahovat velký počet stále menších a menších členů, takže je lze aproximovat (přibližně vyjádřit) pomocí nekonečných řad. Typickým ekonomickým odvětvím, ve kterém se setkáme s řadami, je bankovnictví a finance (a možná překvapivě i zábavní průmysl). Asi nejdůležitější aplikací nekonečných řad je výpočet současné hodnoty pravidelně se opakujících (konstantních) plateb v budoucnosti, například anuity. Díky diskontování budoucnosti a inflaci se ve skutečnosti současná hodnota těchto plateb neustále snižuje, a takto vzniká nekonečná geometrická řada, jejíž součet je možné určit ze vztahu (10.5).

**Příklad 10.20**. Rentiér pan *X* obdrží od společnosti *Y* každý rok 1000 eur až do své smrti. Jakou *současnou hodnotu* má celková částka, kterou obdrží pan *X*? První platbu obdrží pan *X* dnes.

Současná hodnota (*present value*) 1000 eur za 1 rok je rovna $\frac{1000}{1+i+r}$, kde *i* je inflace a *r* diskontní míra. Řekněme, že $i+r=0,07$ (7 %). Potom 1000 eur za rok má *nyní* hodnotu pouze $\frac{1000}{(1+i+r)^1}=934,6$ euro. 1000 eur za dva roky má dnes hodnotu $\frac{1000}{(1+i+r)^2}$ a tak dále. Dostáváme tedy řadu:

$$\frac{1000}{(1+i+r)^0}+\frac{1000}{(1+i+r)^1}+\frac{1000}{(1+i+r)^2}+\frac{1000}{(1+i+r)^3}+...=1000+934,6+873,4+....$$

Jaký je součet této řady? Předpokládejme, že pan *X* bude žít ještě dlouho (dejme tomu 40 let), potom můžeme tento součet určit jako součet nekonečné geometrické řady s prvním členem $a_1=1000$ a kvocientem $q=\frac{1}{1,07}=0,93458$:

$$s=\frac{1000}{1-0,93458}=15286$$

Současná hodnota celé renty pana *X* je tedy přibližně 15 300 euro.

**Příklad 10.21**. Filmová studia mohou odhadnout celkové příjmy ze vstupného z daného filmu ze znalosti příjmů z prvního (premiérového) víkendu a předpokládaného procentuálního poklesu tržeb o dalších víkendech. Pokud při premiérovém víkendu film utrží například 70 milionů dolarů, a každý další víkend návštěvnost filmu klesá dejme tomu o 30 % (podle magazínů specializovaných na show business činí týdenní poklesy příjmů průměrně kolem 45-50 %). Určete horní odhad celkového příjmu filmu.

*Řešení:*

Celkové příjmy ze vstupného můžeme vyjádřit jako řadu (v milionech dolarů):

$$s=70+49+34,3+24+...$$

Tato řada je geometrická s kvocientem $q = 0,7$. Je tedy konvergentní a bude mít konečný součet. Aplikujeme na ni vztah (10.5) pro výpočet součtu nekonečné geometrické řady:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{70}{1-0,7} = 233,3$$

Film tedy utrží přibližně (pamatujeme, že jde o horní odhad) 233,3 milionu dolarů. Jak se tato hodnota liší od přesné hodnoty (součtu 26 sčítanců)? Jak by se změnily příjmy z filmu, pokud by počet diváků klesal jen o 10 % za víkend?

[Odpověď na 1. otázku: rozdíl je naprosto zanedbatelný. Odpověď na 2. otázku: 700 mil. dolarů.] ■