# <u>Funkce jedné reálné proměnné</u>

1. Zopakujte si algebraické funkce (funkce tvořené mnohočleny, mocninami a odmocninami) a transcendentní funkce (exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické funkce). Měli byste znát předpisy funkcí, jejich grafy a vlastnosti.

2. Načrtněte a určete vlastnosti funkcí

a) $y = x^2 - 1$

b) $y = e^x + 2$

c) $y = \ln(x-3)$

3. Jsou dány funkce $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ a $g(x) = \sqrt{x}$. Určete složené funkce $g[f(x)]$ a $f[g(x)]$ a jejich definiční obory.

4. Určete definiční obor funkcí:

a) $f(x) = \ln\dfrac{x+3}{x-3}$,

b) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{-x^2-5x-6}} + \arcsin(2x+5)$

5. Najděte rovnovážnou cenu a množství, je-li funkce poptávky: $D(P) = 83 - 3P$ a funkce nabídky: $S(P) = 2P + 3$. Úlohu řešte početně i graficky.

6. Najděte nulové body polynomu, upravte polynom na součin: $x^3 + 3x^2 - 10x$

7. Derivujte:

a) $y = 5 + x + x^2 + x^3$

b) $y = 24x^5 - 3x^2 + 8x - 4$

c) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

d) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

e) $y = \dfrac{3}{x^4} - 2\sqrt[3]{x} + \dfrac{4}{\sqrt[4]{x^3}}$

f) $y = 2\ln x + 5\sin x - \cos x + e^x$

g) $y = 3^x + 2\log x + \sqrt{\sqrt[3]{x^2}}$

h) $y = 4tgx - \cot gx$

i) $y = 2arctgx + 5arc\sin x$

8. Vypočtěte derivaci funkce a určete monotónnost v daném bodě:

a) $f(x) = x^2, f'(4) = ?$

b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1,\ f'(3) = ?$
c) $f(x) = 3\ln x + 1,\ f'(1) = ?$

9. Derivujte součin funkcí:

a) $y = x \cdot e^x$

b) $y = \left(x^2 + 1\right) \cdot e^x$

c) $y = x^3 \cdot \ln x$

d) $y = \left(x^2 + 4\right) \cdot \sin x$

e) $y = x^2 \cdot arctgx$

10. Derivujte podíl funkcí:

a) $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x}$

b) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

c) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

d) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

e) $y = \dfrac{e^x + 3}{e^x}$

11. Derivujte složenou funkci:

a) $y = \ln \dfrac{x+3}{x^2}$

b) $y = \sqrt{x^3 - 6x + 1}$

c) $y = \sin^4 (x^2 - 3)$

Výsledky

3: $f(g(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$, $f(g(x)) = \sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$, $D(f) =< 0{,}1) \cup (1, \infty)$, $D(g) = (1, \infty)$

4: a) $D(f) = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ , b) $D(f) = (-3, -2)$

5: $P_E = 16$, $Q_E = S(P) = D(P) = 35$
6: nulové body: –5, 0 a 2, $x^3 + 3x^2 - 10x = x(x+5)(x-2)$

7: a) $y' = 1 + 2x + 3x^2$ b) $y' = 120x^4 - 6x + 8$ , c) $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$

d) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$ , e) $y' = -\frac{12}{x^5} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{\sqrt[4]{x^7}}$ , f) $y' = \frac{2}{x} + 5\cos x + \sin x + e^x$

g) $y' = 3^x \cdot \ln 3 + \frac{2}{x \ln 10} + \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$ , h) $y' = \frac{4}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$ , i) $y' = \frac{2}{x^2 + 1} + \frac{5}{\sqrt{1 - x^2}}$

8: $f'(4) = 8, f'(3) = 9, f'(1) = 3.$

9: a) $y' = (x+1)e^x$ , b) $y' = (x^2 + 2x + 1)e^x$ , c) $y' = 3x^2 \ln x + x^2$ , d) $y' = 2x\sin x + (x^2 + 4)\cos x$ , e)

$y' = 2x\,arctgx + \frac{x^2}{1 + x^2}$

10: a) $y' = \frac{2x^2 - 1}{x^2}$ , b) $y' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ , c) $y' = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$ , d) $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ , e) $y' = \frac{-3}{e^x}$

11: a) $y' = -\frac{x + 6}{x^2 + 3x}$ , b) $y' = \frac{3x^2 - 6}{2\sqrt{x^3 - 6x + 1}}$ , c) $y' = 8x \sin^3(x^2 - 3) \cdot \cos(x^2 - 3)$