STATISTIKA

6. PŘEDNÁŠKA

Téma přednášky:

diskrétní náhodná veličina

a) Stejnoměrné rozdělení,

b) Binomické rozdělení,

c) Poissonovo rozdělení.

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

Náhodná veličina

Náhodná veličina = soubor všech hodnot znaku + rozdělení pravdě-podobnosti hodnot

- některé hodnoty se nabývají častěji než jiné → mají větší pravděpodobnost výskytu

- hodnoty znaku statistických jednotek se „generují“ podle **pravděpodobnostního rozdělení**

Příklady diskrétní náhodné veličiny

1. Jistý hotel má 100 pokojů, celkový počet obsazených pokojů 1. července je náhodná veličina X s možnými hodnotami $x = 0,1,2,...,100$
2. Počet zákazníků v supermarketu mezi 12 až 18 hod. je náhodná veličina X, která může **teoreticky** nabývat jakékoliv nezáporné celočíselné hodnoty $x \geq 0$

Příklady diskrétní náhodné veličiny

3. Rozdíl mezi počtem zákazníků ve dvou supermarketech (Kaufland, Tesco) v jednom dni je náhodná veličina *X*, jež může teoreticky nabýt jakékoliv celočíselné hodnoty

$$x = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

1. Diskrétní model pr-sti rozdělení: Stejnoměrné rozdělení

Diskrétní náhodná veličina X

nabývá právě k různých hodnot: $1, 2, 3, \ldots, k$

se stejnou pravděpodobností

$$\boxed{P(x) = \frac{1}{k}} \qquad \text{pro } x = 1,2,3,\ldots,k$$

Stejnoměrné rozdělení

Střední hodnota: $E(X) = \frac{k+1}{2}$

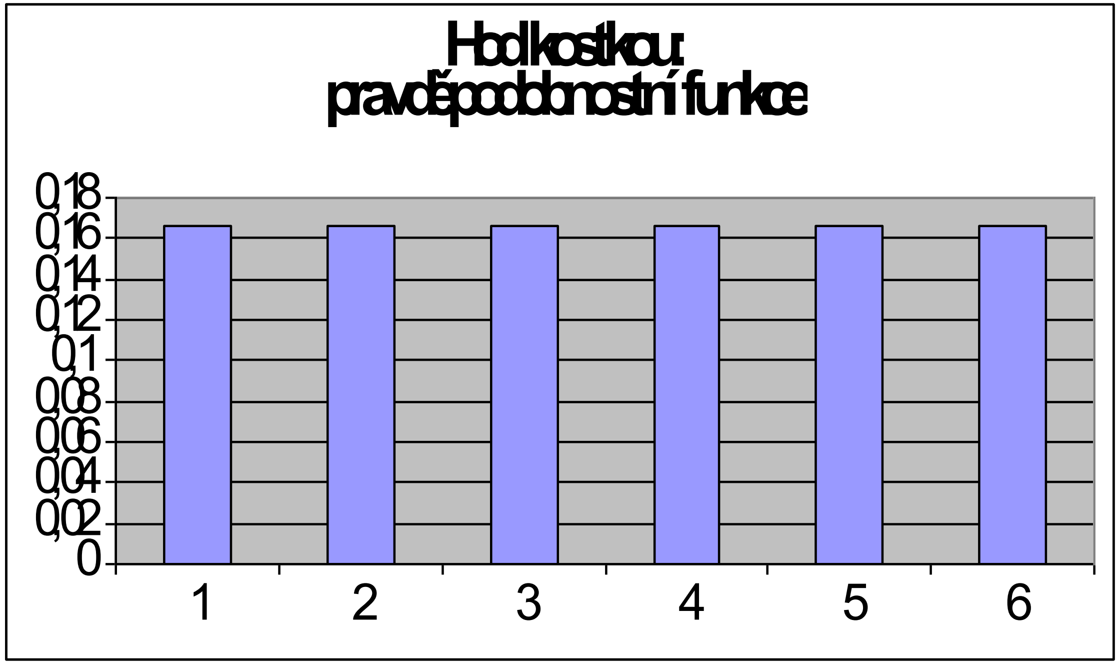
obecný vzorec: $E(X) = \sum_x x p(x)$

Rozptyl: $Var(X) = \frac{k^2 - 1}{12}$

obecný vzorec: $Var(X) = \sum_x [x - E(X)]^2 p(x)$

Příklad – hod kostkou

- Střední hodnota: $E(X) = (6+1)/2 = 3,5$
- Rozptyl: $Var(X) = (6^2 - 1)/12 = 2,92$



2. Model: Binomické rozdělení

n pokusů s alternativním rozdělením,
celkem ***x*** krát úspěch a ***n-x*** krát neúspěch,
p pravděpodobnost úspěchu

Binomické rozdělení pravděpodobnosti:

$$\boxed{P(x \mid n; p) = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x (1-p)^{n-x}}$$

pravděpodobnost, že při n-krát opakovaném alternativním procesu nastane x krát úspěch a n-x krát neúspěch

Charakteristiky binomického rozdělení

- Střední hodnota: $E(X) = n.p$
- Rozptyl: $Var(X) = n.p.(1- p)$
- Směrodatná odchylka: $\sigma(X) =$

Příklad

Je známo, že při epidemii chřipky onemocní každý třetí student, tj. pravděpodobnost onemocnění je 1/3 =0,333 , tj. p = 1/3.

Zjistěte pravděpodobnost, že ve studijní skupině s 20 studenty onemocní každý druhý

$$n = 20,\ p = 1/3,\ \ x = 10 \quad \Rightarrow \ P(10|\ 20;1/3) =$$

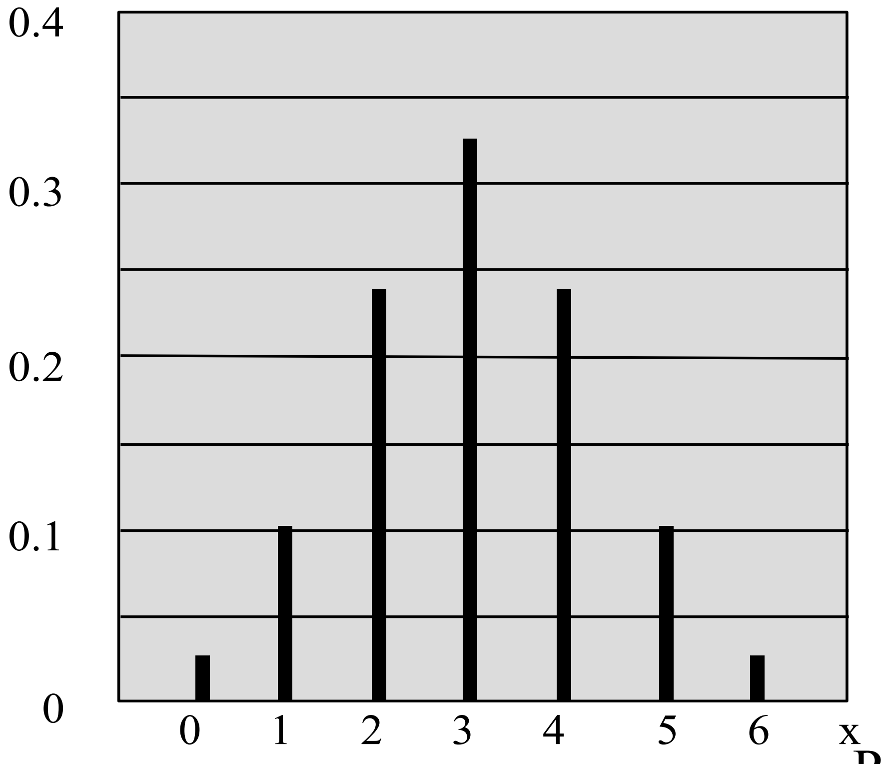
$$= \quad \frac{20!}{10!.10!} 0{,}333^{10} . 0{,}667^{10} \quad = 20*0{,}333 = 0{,}092 \ \ (9{,}2\ \%)$$

$$E(X) = 20.\ 1/3 = 6{,}67$$

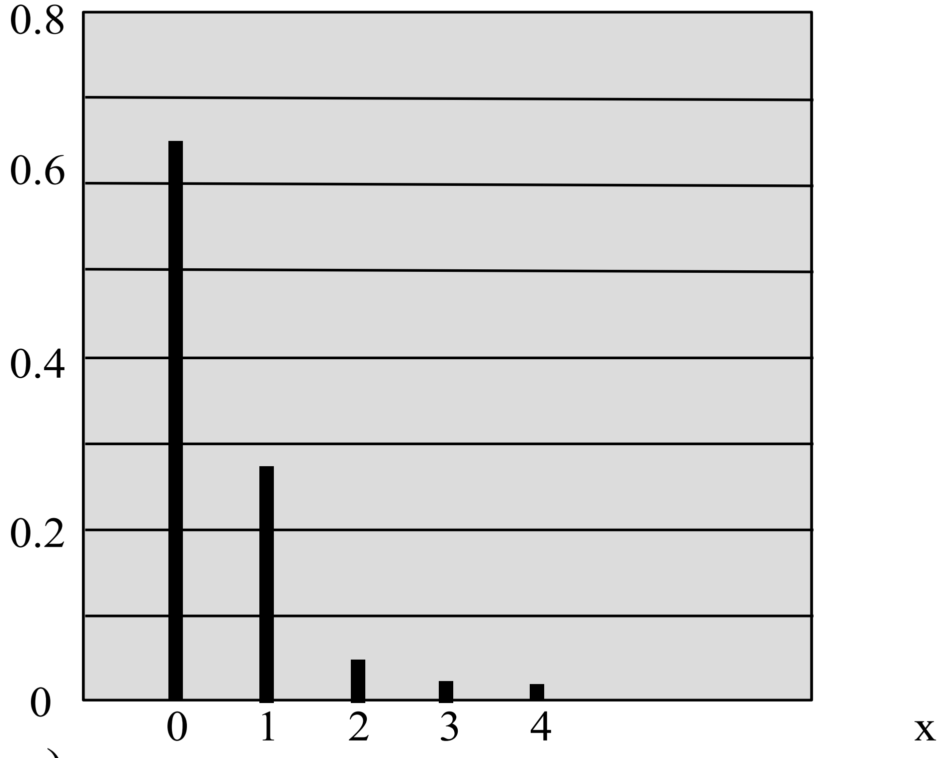
$$Var(X) = 20\ .1/3.2/3 = 4{,}44$$

$$\sigma(X) = 2{,}11$$

Binomické rozdělení – různé parametry



P(X=x)



n=6, π=0.5

n=4, π=0.1

3. Model: Poissonovo rozdělení

Uvažujme jevy, které nastávají v průběhu časového intervalu, například:

- požadavky na telefonní spojení přicházející na ústřednu,
- zákazníci přicházející do prodejny,
- automobily zastavující u benzínového čerpadla.

Takové jevy vznikají v tzv.

Poissonově procesu !!!

Poissonovo rozdělení

X - náhodná veličina = počet výskytu jevu Poissonova procesu

v daném časovém intervalu délky *t*

(např. za 1 minutu, 1 hodinu apod.)

\+ rozdělení pr-sti počtu výskytů

(tj. s jakou pr-stí nastane v daném čas. intervalu určitý počet výskytů jevu)

Vlastnosti Poissonova procesu

3 vlastnosti:

1. Počet výskytu jevu je nezávislý na počtu výskytu tohoto jevu v jiném intervalu

2. Střední hodnota počtu výskytu jevu v daném intervalu je přímo úměrná délce zvoleného intervalu

3. Ve velmi malém časovém intervalu může nastat nejvýše jeden výskyt daného jevu

Vlastnosti Poissonova rozdělení

- Pravděpodobnost výskytu x jevů Poissonova procesu X:

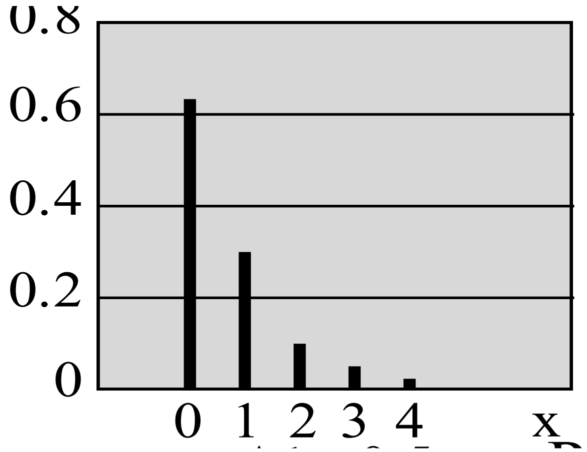
$$\boxed{P(x\,|\,\lambda,t)=\frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}}$$

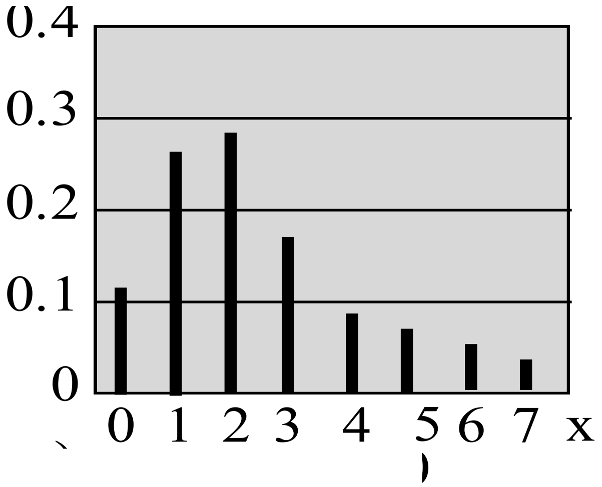
- λ, t - parametry Poissonova rozdělení
- x – počet výskytů jevu
- λ - intenzita Poissonova procesu (střední hodnota výskytů jevů)
- t - délka časového intervalu

$$\boxed{E(X)=\lambda.t \quad Var(X)=\lambda.t \quad \sigma(X)=}$$

Poissonovo rozdělení s různými parametry (t = 1)

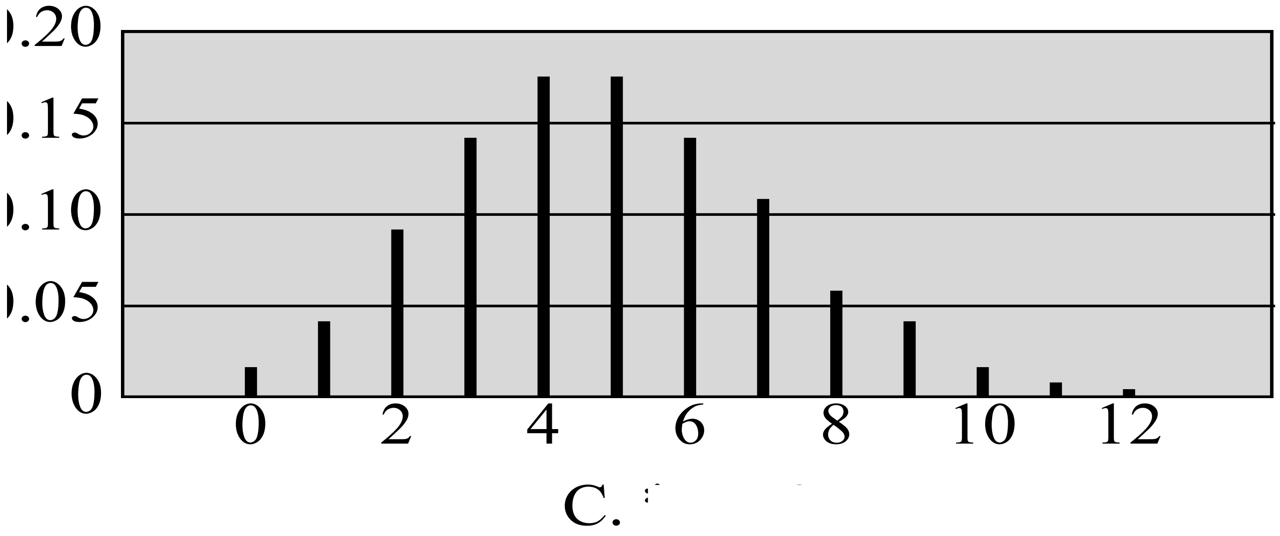
λ= 0,5





λ= 2

λ = 5



Příklad – Poissonovo rozdělení

Zákazníci přicházejí náhodně do opravny obuvi s průměrnou intenzitou 4 za hodinu. Zjistěte pravděpodobnost, že do opravny přijdou za hodinu právě 2 zákazníci, vypočtěte střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku.

Řešení:

$$P(2|4,1) = \frac{(4)^2 e^{-4}}{2!} = 0{,}1465$$

Střední hodnota $E(X) = 4$, rozptyl $Var(X) = 4$,
směrodatná odchylka $\sigma = \sqrt{4} = 2$

Diskrétní náhodná veličina - obecně

Počet různých druhů zboží, které zákazník nakoupí při jedné návštěvě obchodního domu, je náhodná veličina X.
Bylo zjištěno, že tato veličina nabývá hodnot:

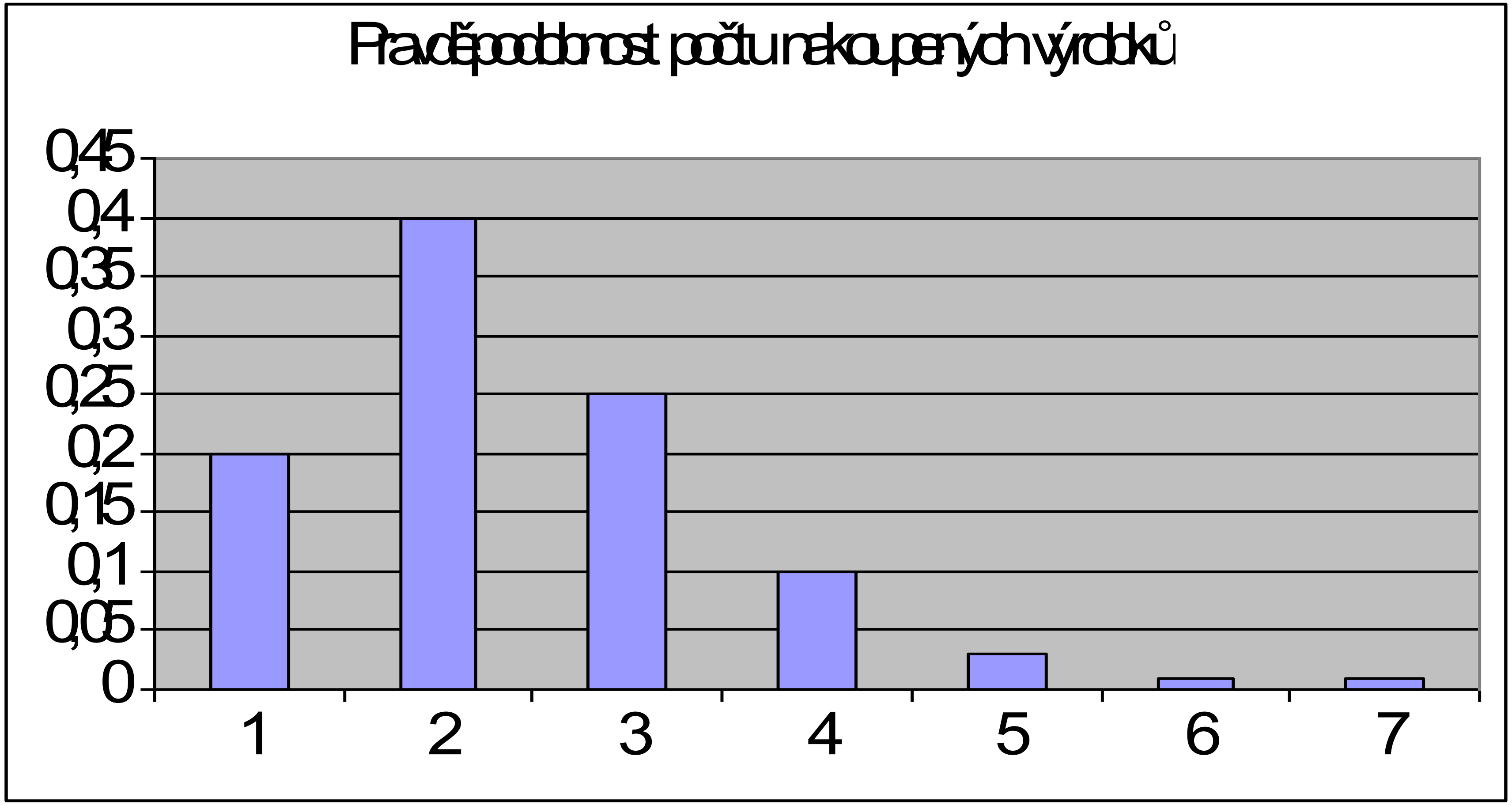
x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,20	0,40	0,25	0,10	0,03	0,01

Řešení:

Střední hodnota počtu druhů zboží zakoupeného jedním zákazníkem

$$E(X) = 0*0,2+1*0,4+2*0,25+3*0,1+4*0,03+5*0,01 = 1,37$$

Diskrétní náhodná veličina - obecně



Diskrétní náhodná veličina - obecně

- Pravděpodobnostní funkce $p(x)$ nabývá maximální hodnotu $0{,}4$ pro $x = 1$: $Mod(X) = 1$

- Medián: $p(X \leq 1) = p(X{=}0) + p(X{=}1) = 0{,}2+0{,}4 = 0{,}6 \geq 0{,}5$

  $p(X \geq 1) = p(X{=}1) + p(X{=}2) + \ldots + p(X{=}5) = 0{,}4+0{,}25+0{,}1+0{,}03+0{,}01 = 0{,}7 \geq 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

  Podle definice je medián: $Med(X) = 1$

- $Var\,(X) = 0^2.0{,}2+1^2.0{,}4+2^2.0{,}25+3^2.0{,}1+4^2.0{,}03 + 5^2.0{,}01 - 1{,}37^2 = 3{,}39 – 1{,}88 = 1{,}51$

- $\sigma(x) = \sqrt{1{,}51} = 1{,}23$

Závěr přednášky

Děkuji Vám za pozornost !!!