V. Diskrétní pravděpodobnostní modely

Náhodná veličina

Náhodná veličina = soubor všech hodnot znaku + rozdělení pravdě-podobnosti hodnot

- některé hodnoty se nabývají častěji než jiné → mají větší pravděpodobnost výskytu

- hodnoty znaku statistických jednotek se „generují“ podle **pravděpodobnostního rozdělení**

Statistický soubor (SS)

- Statistický soubor je tvořen statistickými jednotkami
- Sledujeme (kvantitativní) hodnotu statistického znaku
- Každá jednotka = jedna hodnota (číslo) statistického znaku
- **SS vzniká realizací NV neboli**
- **NV generuje SS** – obecná představa vzniku SS pomocí NV

Diskrétní náhodná veličina - Příklady

1. Jistý hotel má 100 pokojů, celkový počet obsazených pokojů 1. července je náhodná veličina X s možnými hodnotami x = 0,1,2,...,100

2. Počet zákazníků v supermarketu mezi 12 až 18 hod. je náhodná veličina X, která může **teoreticky** nabývat jakékoliv nezáporné celočíselné hodnoty $x \geq 0$

Diskrétní náhodná veličina - Příklady

3. Rozdíl mezi počtem zákazníků ve dvou supermarketech (Kaufland, Tesco) v jednom dni je náhodná veličina X, jež může teoreticky nabýt jakékoliv celočíselné hodnoty

$$x = ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...$$

1. Diskrétní model pr-sti rozdělení: Stejnoměrné rozdělení

Diskrétní náhodná veličina X nabývá právě k různých hodnot:

$1, 2, 3, ..., k$

se stejnou pravděpodobností

$$\boxed{P(x) = \frac{1}{k}}$$

pro $x = 1,2,3,...,k$

Stejnoměrné rozdělení

Střední hodnota: $$E(X)=\frac{k+1}{2}$$

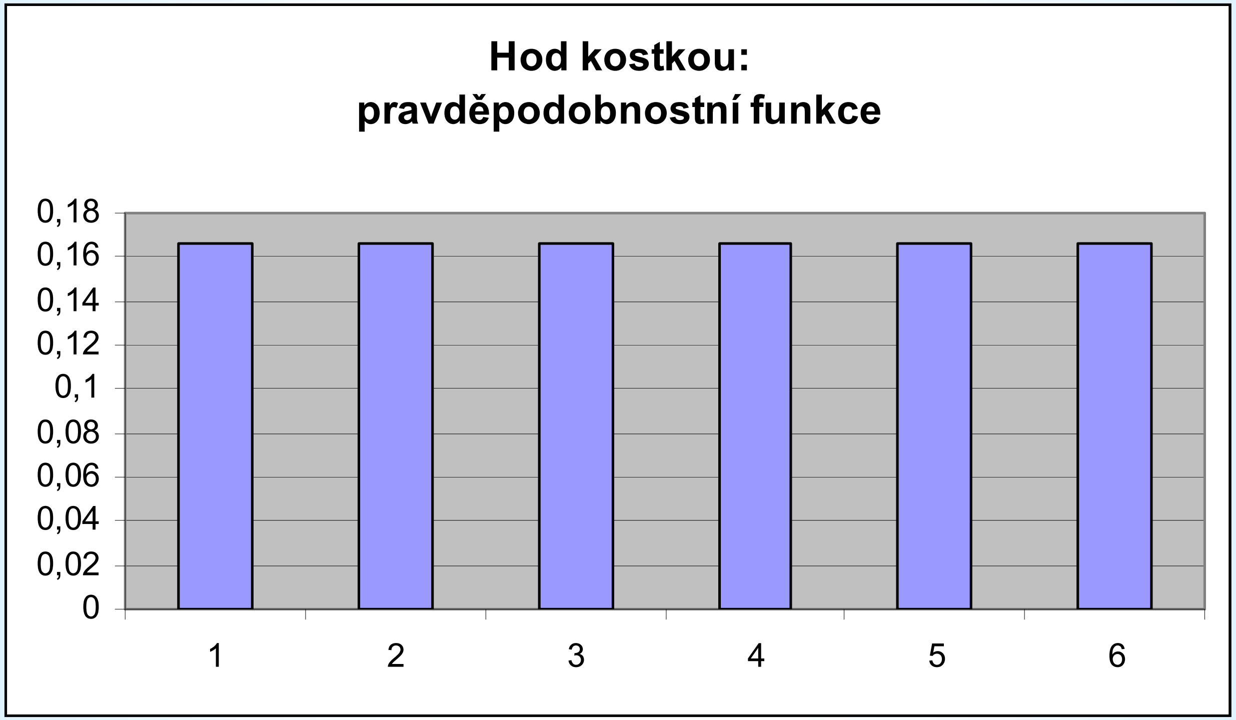
obecný vzorec: $$E(X)=\sum_{x} x p(x)$$

Rozptyl: $$Var(X)=\frac{k^2-1}{12}$$

obecný vzorec: $$Var(X)=\sum_{x}\left[x-E(X)\right]^2 p(x)$$

Příklad 1: „Vrh kostkou“

- Střední hodnota: $E(X) = (6+1)/2 = 3,5$
- Rozptyl: $Var(X) = (6^2 - 1)/12 = 2,92$



2. Model: Alternativní rozdělení

Dva vzájemně se vylučující výsledky - „úspěch“= 1 a „neúspěch“ = 0 s pravděpodobnostmi p a $(1 - p)$

$$\boxed{P(x \mid p) = p^x (1-p)^{1-x}} \qquad x = 0,\ 1$$

Příklady:

(1) Hod mincí „hlava“ vers. „orel“ $p = 1/2$

(2) Hod kostkou „šestka“ vers. „nešestka“ $p=1/6$

3. Model: Binomické rozdělení

n pokusů s alternativním rozdělením celkem ***x*** krát úspěch a ***n-x*** krát neúspěch p pravděpodobnost úspěchu

Binomické rozdělení pravděpodobnosti:

$$\boxed{P(x \mid n; p) = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x (1-p)^{n-x}}$$

pravděpodobnost, že při n-krát opakovaném alternativním procesu nastane x krát úspěch a n-x krát neúspěch

Charakteristiky binomického rozdělení

- Střední hodnota: $E(X) = n.p$

- Rozptyl: $Var(X) = n.p.(1- p)$

- Směrodatná odchylka: $\sigma(X) = \sqrt{n.p.(1-p)}$

Příklad 2:

Je známo, že při epidemii chřipky onemocní každý třetí student, tj. pravděpodobnost onemocnění je 1/3 =0,333 , tj. p = 1/3

Zjistěte pravděpodobnost, že ve studijní skupině s 20 studenty onemocní každý druhý

$$n = 20,\ p = 1/3,\ \ x = 10 \quad \Rightarrow \ P(10|\ 20;1/3) =$$

$$= \quad \frac{20!}{10!.10!} 0{,}333^{10} . 0{,}667^{10} \qquad = 20*0{,}333 = 0{,}092 \ \ (9{,}2\ \%)$$

$$E(X) = 20.\ 1/3 = 6{,}67$$

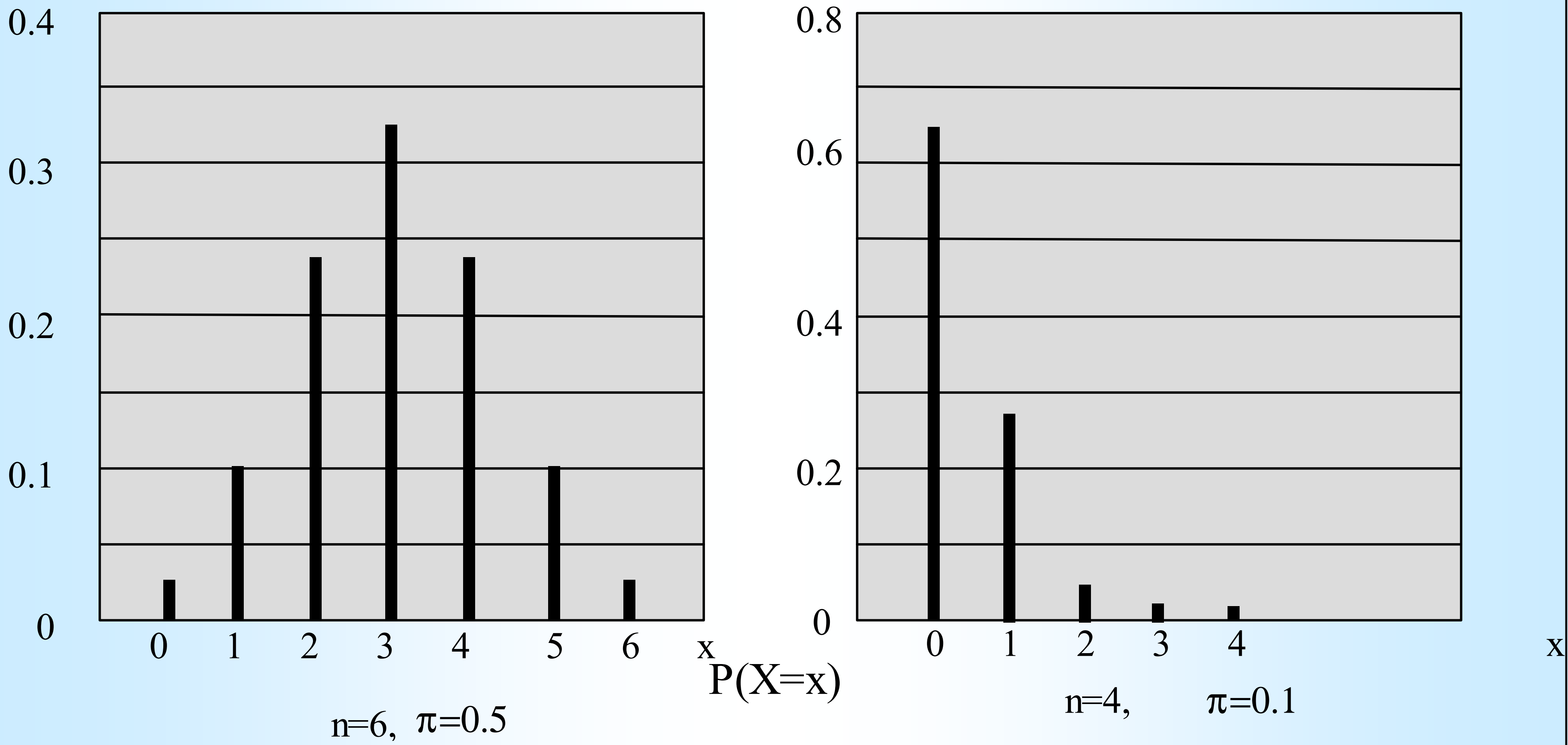
$$Var(X) = 20\ .1/3.2/3 = 4{,}44$$

$$\sigma(X) = 2{,}11$$

Binomické rozdělení

s různými parametry

pravděpodobnostní funkce



4. Model: Poissonovo rozdělení

[Čti: *Poasonovo*]

Uvažujme jevy, které nastávají v průběhu časového intervalu, například:

- požadavky na telefonní spojení přicházející na ústřednu
- zákazníci přicházející do prodejny
- automobily zastavující u benzínového čerpadla

Takové jevy vznikají v tzv.

Poissonově procesu

Poissonovo rozdělení

X - náhodná veličina = počet výskytu jevu Poissonova procesu

v daném časovém intervalu délky t

(např. za 1 minutu, 1 hodinu apod.)

\+ rozdělení pr-sti počtu výskytů

(tj. s jakou pr-stí nastane v daném čas. intervalu určitý počet výskytů jevu)

Vlastnosti Poissonova procesu

3 vlastnosti:

1. Počet výskytu jevu je nezávislý na počtu výskytu tohoto jevu v jiném intervalu
2. Střední hodnota počtu výskytu jevu v daném intervalu je přímo úměrná délce zvoleného intervalu
3. Ve velmi malém časovém intervalu může nastat nejvýše jeden výskyt daného jevu

Vlastnosti Poissonova rozdělení

- Pravděpodobnost výskytu x jevů Poissonova procesu X:

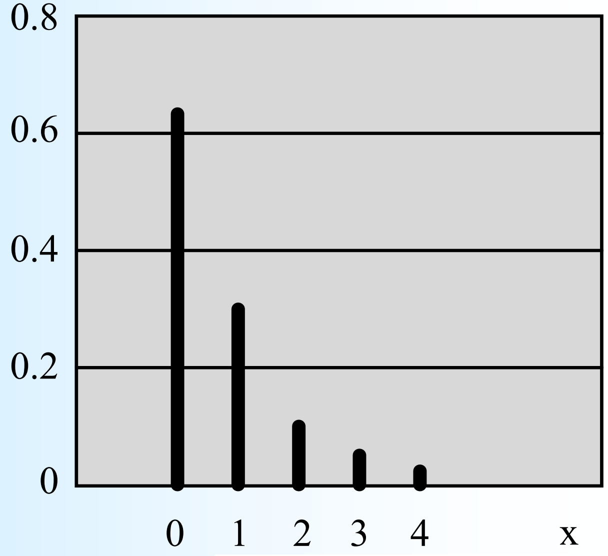
$$\boxed{P(x \mid \lambda, t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}}$$

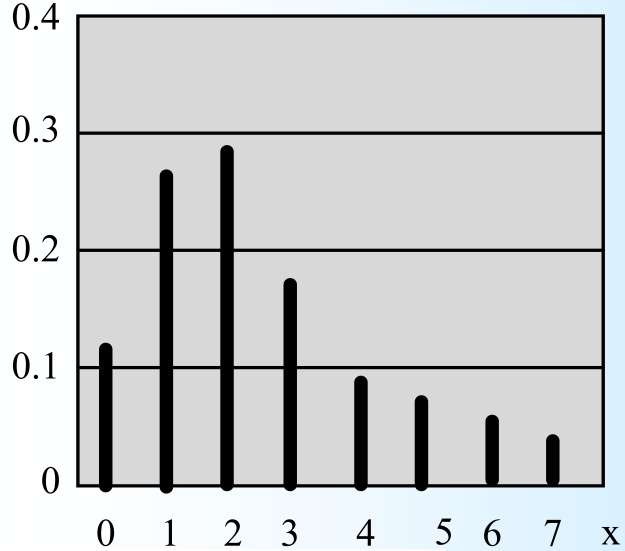
- λ, t - parametry Poiss. rozdělení
- x – počet výskytů jevu
- λ - intenzita Poissonova procesu (tj. střední hodnota výskytů jevů)
- t - délka časového intervalu

$$\boxed{E(X) = \lambda.t \quad Var(X) = \lambda.t \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda t}}$$

Poissonovo rozdělení s různými parametry (t = 1)

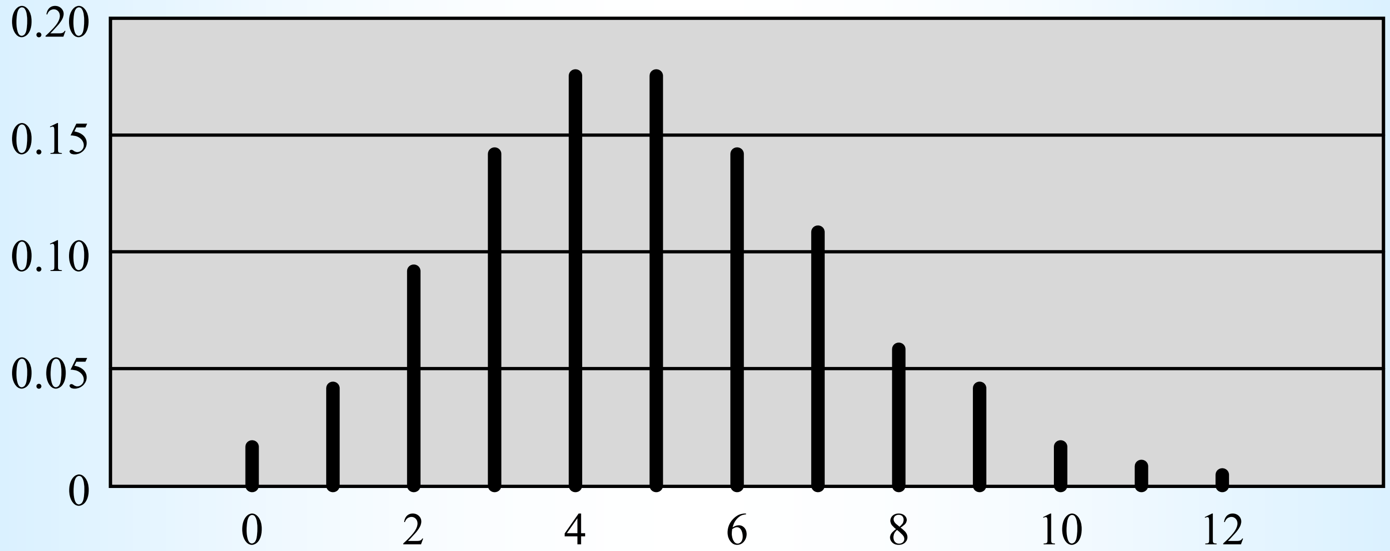
$\lambda = 0{,}5$





$\lambda = 2$

$\lambda = 5$



Příklad 3:

Zákazníci přicházejí náhodně do opravny obuvi s průměrnou intenzitou 4 za hodinu. Zjistěte pravděpodobnost, že do opravny přijdou za hodinu právě 2 zákazníci, vypočtěte střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku.

Řešení:

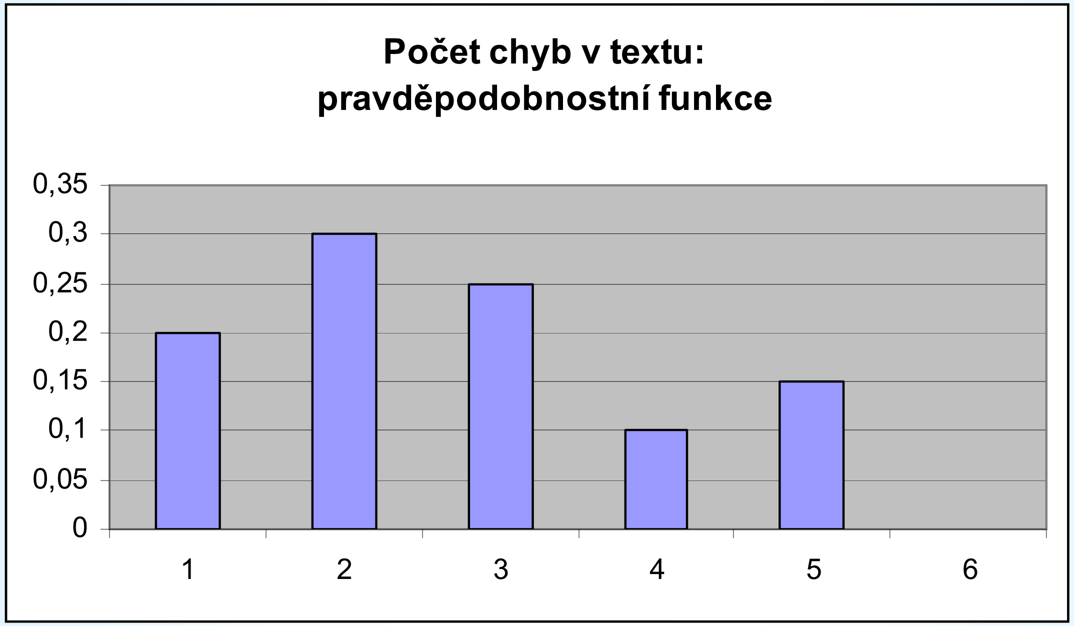
$$P(2 \mid 4{,}1) = \frac{(4)^2 e^{-4}}{2!} = 0{,}1465$$

Střední hodnota $E(X) = 4$, rozptyl $Var(X) = 4$,
směrodatná odchylka $\sigma = \sqrt{4} = 2$

Obecné rozdělení diskrétní NV

- Hodnoty NV: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- Pravděpodobnosti rozdělení: $p_1, p_2, \ldots, p_n$

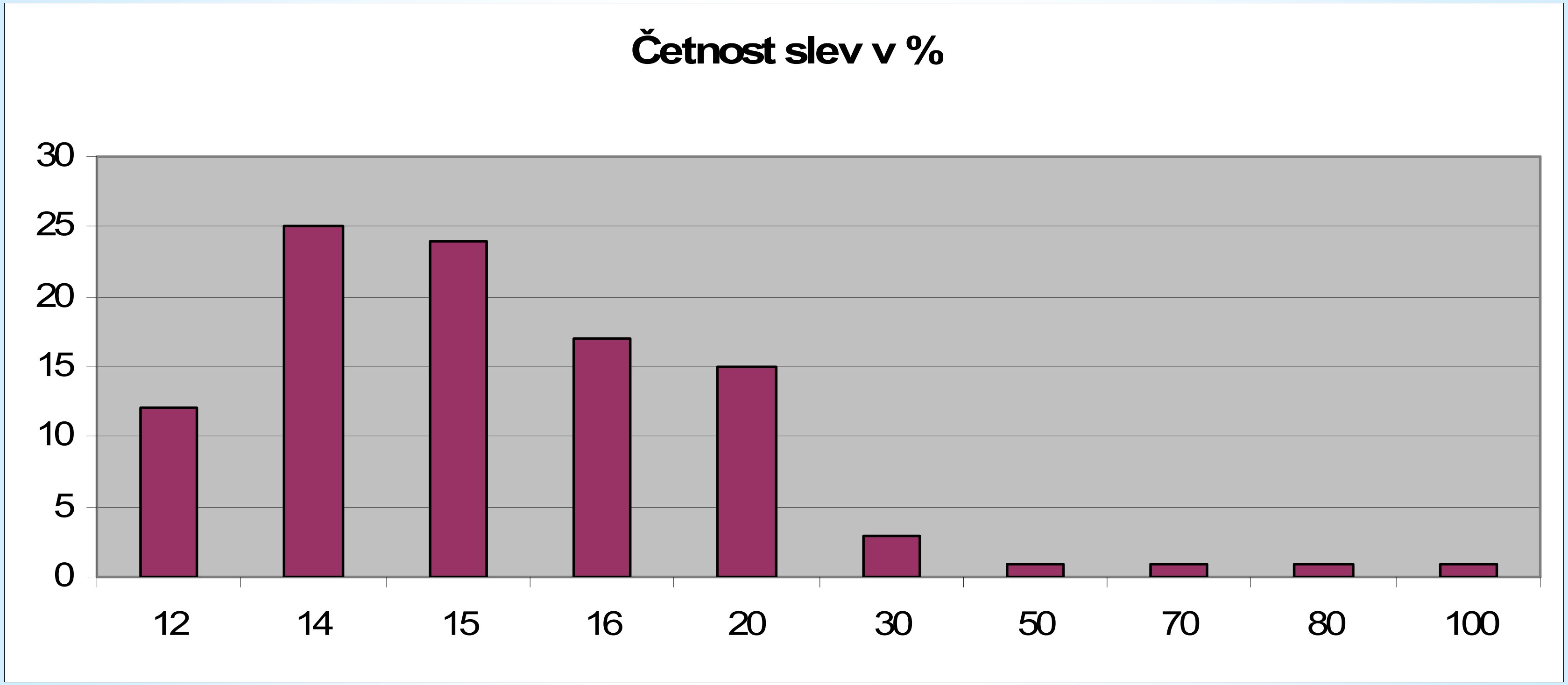
  platí: $\sum p_i = 1$



Kolo štěstí - skutečnost

Příklad 4: Kolo štěstí

http://www.mountfield.cz/



Kolo štěstí - pravděpodobnosti

x_i - Sleva %	n_i - Četnost	p_i - Pr-st
12	12	0,12
14	25	0,25
15	24	0,24
16	17	0,17
20	15	0,15
30	3	0,03
50	1	0,01
70	1	0,01
80	1	0,01
100	1	0,01
Suma	100	1,00

Kolo štěstí – průměrná sleva

Průměrná sleva = střední hodnota = $E(X) = \sum_x xp(x)$

= 12*0,12 + 14*0,25 + 15*0,24 +…+80*0,01 +
+100*0,01 = 18,16

Kolo štěstí poskytuje zákazníkům průměrnou slevu

18,16 %

Příklad 5:

Počet různých druhů zboží, které zákazník nakoupí při jedné návštěvě obchodního domu, je náhodná veličina X.

Bylo zjištěno, že tato veličina nabývá hodnot:

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,20	0,40	0,25	0,10	0,03	0,01

Řešení:

Střední hodnota počtu druhů zboží zakoupeného jedním zákazníkem

$E(X)$ = 0*0,2+1*0,4+2*0,25+3*0,1+4*0,03 +5*0,01 = 1,37

Pravděpodobnostní funkce

- Pravděpodobnostní funkce $p(x)$ nabývá maximální hodnotu $0{,}4$ pro $x = 1$:

$$Mod(X) = 1$$

- Medián:

$$p(X \leq 1) = p(X=0) + p(X=1) = 0{,}2+0{,}4 = 0{,}6 \geq 0{,}5$$

$$p(X \geq 1) = p(X=1) + p(X=2) + \ldots + p(X=5) =$$
$$0{,}4+0{,}25+0{,}1+0{,}03+0{,}01 = 0{,}7 \geq 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

Podle definice je medián:

$$Med(X) = 1$$

- $Var\,(X) = 0^2.0{,}2+1^2.0{,}4+2^2.0{,}25+3^2.0{,}1+4^2.0{,}03 + 5^2.0{,}01 - 1{,}37^2 = 3{,}39 - 1{,}88 = 1{,}51$
- $\sigma(x) = \sqrt{1{,}51} = 1{,}23$

Shrnutí

- Co je to NV: číselné hodnoty + pravděpodobnosti
- Diskrétní NV: individuální č. hod. + pr-sti
- Charakteristiky NV (polohy - 3, variability - 2)
- NV se stejnoměrným rozdělením pr-sti
- NV s alternativním rozdělením pr-sti
- NV s binomickým rozdělením pr-sti (též multinomickým)
- NV s Poissonovým rozdělením pr-sti
- NV s obecným rozdělením pr-sti