

MATEMATIKA V EKONOMII – PŘEDNÁŠKA Č. 6: Neurčitý integrál, metoda per partes, integrace racionálních funkcí

POJEM NEURČITÉHO INTEGRÁLU, ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

- Funkce $F(x)$ se nazývá **primitivní funkcí** k funkci $f(x)$ na otevřeném intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$ právě tehdy, když $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in J$. Primitivní funkce existuje ke každé spojitě funkci na J .

- Množina všech primitivních funkcí k dané funkci se nazývá **neurčitý integrál**, a značí se takto:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

kde \int je integrační znak,

x integrační proměnná,

$f(x)$ integrovaná funkce neboli integrand,

$F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$,

C integrační konstanta.

Neurčitý integrál je lineární operátor, což znamená, že splňuje následující dvě podmínky:

i) $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx,$

ii) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Tabulka 6.1. Základní integrály.

řádek	$f(x)$	$\int f(x)dx$
1	0	C
2	1	$x + C$
3	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
4	e^x	$e^x + C$
5	$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
6	$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a} \ln ax+b + C$
7	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

8	$\sin x$	$-\cos x + C$
9	$\cos x$	$\sin x + C$
10	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
11	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{cotg} x + C$
12	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
13	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
14	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsin} x + C$
15	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arccos} x + C$
16	$\frac{1}{\sqrt{1\pm x^2}}$	$\ln \left x + \sqrt{1\pm x^2} \right + C$

Příklad 6.2. Integrujte:

a) $\int x^2 dx$.

b) $\int (x^3 + 2x^2 + 6x + 1) dx$.

c) $\int \sqrt[3]{x} dx$.

d) $\int \frac{1}{x^3} dx$.

e) $\int (5 \sin x - 2 \cos x + 3^x) dx$.

INTEGRACE SOUČINU FUNKCÍ (METODA PER PARTES)

Smyslem této metody je **rozložit** jeden složitější integrál **na dva jednodušší členy** (odtud název metody: *per partes* je latinsky „po částech“).

- Vzorec, který používáme při integraci per partes, si odvodíme z pravidla pro derivaci součinu dvou funkcí, které označíme $u(x)$ a $v(x)$.

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

Nyní osamostatníme vlevo člen uv' : $uv' = (uv)' - u'v$, a tuto rovnost integrujeme:

$$\int uv' dx = \int (uv)' dx - \int u'v dx$$

Prostřední člen obsahuje integrál i derivaci, proto se tyto dvě operace vyruší, a dostaneme:

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

- Důležitá je **správná volba** funkcí u a v' . Nesprávná volba funkcí vede k tomu, že složitost úlohy naroste. V takovém případě je zapotřebí zvolit funkce u a v' opačně.

Příklad 6.7. Vypočtete: $\int x \cdot e^x dx$.

Příklad 6.8. Vypočtete: $\int x \cdot \ln x dx$.

Příklad 6.10. Vypočtete: $\int \arctg x dx$.

Příklad 6.11. Vypočtěte: $\int \sin x e^x dx$.

INTEGRACE RACIONÁLNÍCH FUNKCÍ (METODA PARCIÁLNÍCH ZLOMKŮ)

- Racionální funkcí rozumíme výraz $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy proměnné x . Budeme předpokládat, že stupeň polynomu $P(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$. K integraci (ryzích) racionálních funkcí ve využívá metoda rozkladu na *parciální zlomky*. Smyslem této metody je rozložit zadanou (a obvykle složitou) racionální funkci na součet „nejjednodušších“ (*parciální* znamená „částečný“) zlomků.

Příklad. Vypočtete $\int \frac{5x + 8}{x^2 + 2x - 8} dx$.

Příklad. Vypočtete: $\int \frac{5x^2 - 17x + 12}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$

Příklad. Integrujte $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$.

Příklad. Integrujte: $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5} dx$.

CELKOVÉ NÁKLADY A CELKOVÉ PŘÍJMY

- V ekonomii lze (neurčitý) integrál využít k výpočtu **celkových příjmů** nebo **celkových nákladů**, pokud jsou známy (dány) mezní příjmy respektive mezní náklady.

- Funkce **celkových nákladů** $TC(x)$ a funkce **mezních nákladů** $MC(x)$, kde x je počet výrobků, spolu souvisejí vztahem:

$$TC(x) = \int MC(x)dx + C \quad (6.1)$$

Vztah (6.1) říká, že celkové náklady jsou součtem mezních nákladů. Integrační konstanta C se určí z jedné známé hodnoty $TC(x)$ pro dané x . Stejný vztah platí také pro **celkové příjmy** $TR(x)$ a **mezní příjmy** $MR(x)$:

$$TR(x) = \int MR(x)dx + C \quad (6.2)$$

Příklad 6.12. Určete funkci celkových nákladů, jestliže funkce mezních nákladů $MC(x) = 140e^{0,2x}$ a náklady na produkci 10 výrobků činí 6000 Kč.

Příklad 6.14. Mezní příjmy jsou popsány funkcí $MR = 140 - 6x + 2$, najděte funkci celkového příjmu.