MATEMATIKA V EKONOMII- PŘEDNÁŠKA Č. 3

-Určit **průběh funkce** znamená určit všechny důležité vlastnosti dané funkce.

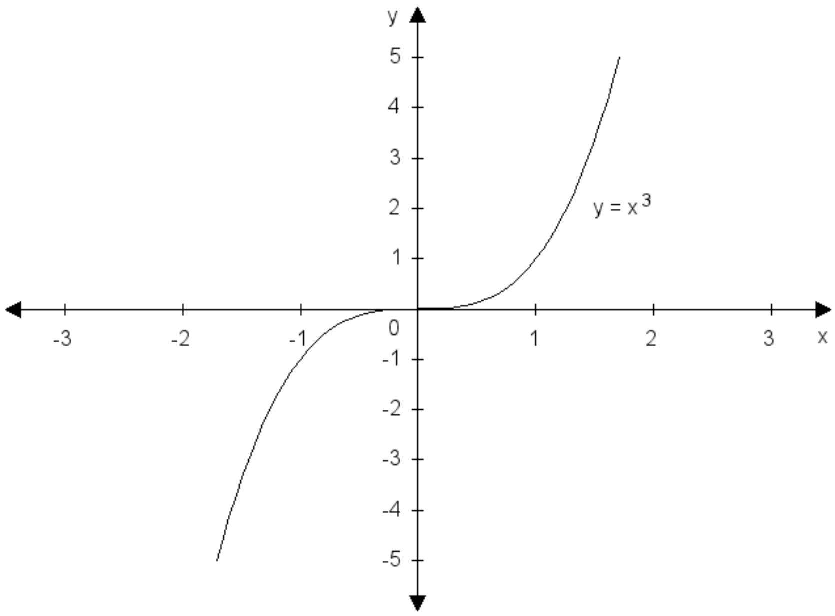
-**Monotónnost funkce**:

- Nechť má funkce $y = f(x)$ v každém bodě x z intervalu (a,b) ***kladnou derivaci***, pak je na tomto intervalu ***rostoucí***.
- Nechť má funkce $y = f(x)$ v každém bodě x z intervalu (a,b) ***zápornou derivaci***, pak je na tomto intervalu ***klesající***.

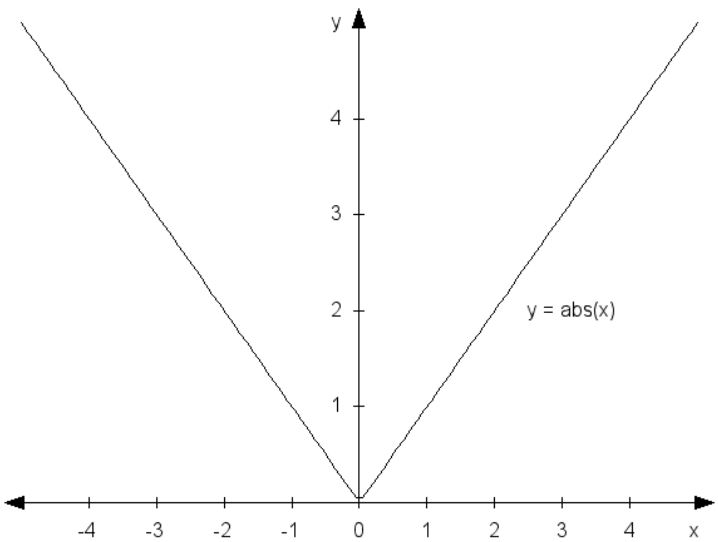
-Extrémy funkce:

- Je-li v bodě $x = a$ maximum nebo minimum funkce, a první derivace v tomto bodě existuje, pak je $f'(a) = 0$. Opačné tvrzení neplatí!
- ***Stacionární bod*** (bod podezřelý z extrému) je bod, v němž je první derivace nulová : $f'(a) = 0$. Ve stacionárním bodě může být ***maximum***, ***minimum*** nebo ***inflexní bod***.
- Pro ***lokální maximum*** platí: $f'(a) = 0$ a $f''(a) < 0$
- Pro ***lokální minimum*** platí: $f'(a) = 0$ a $f''(a) > 0$.
- Pokud je $f''(a) = 0$, nelze na základě druhé derivace o extrému rozhodnout.

Extrémy funkce mohou být ve stacionárních bodech nebo bodech, v nichž první derivace neexistuje (např. $y = |x|$ má minimum v bodě $x = 0$, kde první derivace neexistuje).



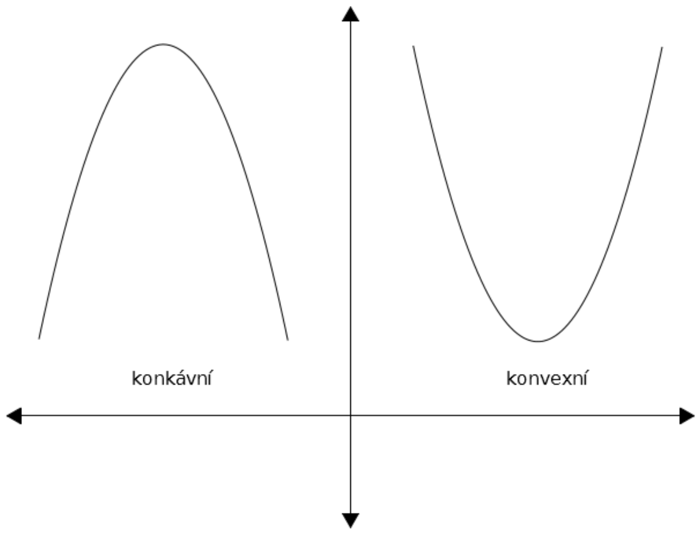
Obr. 3.1. Graf funkce $y = x^3$.



Obr. 3.2. Graf funkce $y = |x|$.

-Konvexnost a konkávnost funkce

- Nechť má funkce $y = f(x)$ v každém bodě x z intervalu (a,b) ***kladnou druhou derivaci***, pak je na tomto intervalu ***konvexní***.
- Nechť má funkce $y = f(x)$ v každém bodě x z intervalu (a,b) ***zápornou druhou derivaci***, pak je na tomto intervalu ***konkávní***.
- ***Inflexní bod*** je bod, v němž se mění konvexnost na konkávnost nebo opačně.



Obr. 3.3. Konkávní a konvexní funkce

Příklad 3.2. Určete extrémy funkce:

a) $y = x^2 - 6x$

b) $y = x^3 - 4x^2$

c) $y = e^x + 1$

Příklad 3.3. Určete hodnotu práce L, pro kterou dosahuje funkce produkce $Q = 12L^2 - L^3$ svého maxima.

Příklad 3.8. Je dána funkce nákladů $TC(Q) = 2Q^3 - 6Q^2 + 30Q + 5$. Určete Q, pro které jsou mezní náklady $MC(Q)$ minimální. Načrtněte průběh funkce $MC(Q)$.

-Asymptoty funkce

- ***Asymptotami funkce*** $y = f(x)$ nazýváme přímky, pro které platí, že jejich vzdálenost od grafu funkce se pro x jdoucí do nekonečna blíží nule.

- Asymptoty existují ***svislé***, ***vodorovné*** a ***šikmé***.

Šikmá asymptota má obecnou rovnici stejnou jako lineární funkce (je to přímka!), tedy $y = ax + b$. Koeficienty a a b se vypočtou pomocí následujících limit:

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \text{ resp. } a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{3.1}$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax \right], \text{ resp. } b = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - ax \right] \tag{3.2}$$

Při ***určování průběhu funkce*** obvykle postupujeme podle následující osnovy:

1. $D(f)$, sudost, lichost, periodičnost.
2. Limity (jednostranné) v bodech nespojitosti a v nevlastních bodech.
3. Průsečíky s osami x a y, znaménka funkčních hodnot.
4. První derivace, její nulové body.
5. Lokální extrémy a intervaly monotónnosti.
6. Druhá derivace a její nulové body.
7. Inflexní body, konkávnost, konvexnost.
8. Asymptoty.
9. Omezenost funkce, $H(f)$.
10. Graf funkce.

Příklad 3.4. Určete průběh funkce f: $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Příklad 3.5. Určete průběh funkce $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

-Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

- ***Racionální lomenou funkcí*** nazýváme výraz $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou dané mnohočleny.
- ***Rozkladem na parciální zlomky*** rozumíme rozklad dané racionální lomené funkce na součet jednodušších (parciálních) zlomků.
- Nejprve ***rozložíme jmenovatel*** $Q(x)$ na součin kořenových činitelů, tedy na součin závorek, v nichž je vždy (x – kořen Q), nebo nerozložitelný kvadratický dvojčlen či trojčlen.
- Při rozkladu Q(x) mohou nastat tyto případy:

a) Všechny kořeny $Q(x)$, označíme je x_1, x_2 až x_k jsou reálná čísla, a žádný kořen se neopakuje (má násobnost jedna). Pak:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots(x-x_k)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\ldots+\frac{K}{x-x_k}$$

b) Všechny kořeny $Q(x)$, označíme je x_1, x_2 až x_k jsou reálná čísla, ale některý kořen, například x_1 se opakuje n-krát (říkáme, že má násobnost n). Pak:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-x_1)^n\cdot(x-x_2)\cdot\ldots(x-x_k)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(x-x_1)^n}+\frac{B}{x-x_2}+\ldots+\frac{K}{(x-x_k)}$$

c) Jmenovatel obsahuje nerozložitelný kvadratický dvojčlen nebo trojčlen násobnosti jedna. Příkladem budiž například x^2+1 nebo x^2+2x+4. Pak:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)\cdot(x-x_1)\ldots}=\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)}+\frac{C}{x-x_1}\ldots.$$

Příklad 6.3. Rozložte na parciální zlomky $\frac{7x-9}{x^2+x-6}$.

Příklad 6.4. Rozložte na parciální zlomky $\dfrac{3x+3}{(x+2)(x-1)}$.

Příklad 6.5. Rozložte na parciální zlomky $\dfrac{6x^3+21x^2+18x+5}{(x+1)^3 x}$.

Odbočka: Jak dělíme mnohočlen mnohočlenem?

$$\left(3x^3+5x^2+5x+2\right):\left(x^2+x+1\right)$$

Pokud v racionální funkci $\frac{P(x)}{Q(x)}$ je stupeň čitatele větší než jmenovatele, nejprve mnohočleny dělíme, teprve poté rozkládáme.

Příklad 6.5. Rozložte na parciální zlomky $\frac{3x^2-3x+2}{x^3+x}$