MATEMATIKA V EKONOMII – PŘEDNÁŠKA Č. 8:
Určitý integrál a jeho aplikace

URČITÝ INTEGRÁL

NEWTONŮV URČITÝ INTEGRÁL

***Definice 8.1**.: Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na otevřeném intervalu J. Newtonovým určitým integrálem funkce $f(x)$ od a do b (na intervalu $(a,b)\subset J$) nazýváme symbol $\int_a^b f(x)dx$, kde a je horní integrační mez a b je dolní integrační mez.*

- **Výpočet** určitého integrálu provádíme pomocí **Newtonova-Leibnizova vzorce**:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{8.2}$$

- Zatímco neurčitý integrál je *funkce* (přesněji množina funkcí lišících se o konstantu *C*), **je určitý integrál *číslo***, které vypočteme ze vztahu (8.2). Význam integrační mezí spočívá v tom, že nám říkají „odkud kam integrujeme“.

- **Základní vlastnosti** určitého integrálu:

i) $\int_a^a f(x)dx = 0$

ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

iii) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

iv) $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

v) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$, $b\in(a,c)$

- Užití určitého integrálu je velmi široké, zvláště v přírodních a vědách a technických oborech. Určitý integrál se používá nejčastěji k výpočtu:

- obsahu plochy ohraničené danými křivkami
- délky křivky
- objemu rotačního tělesa

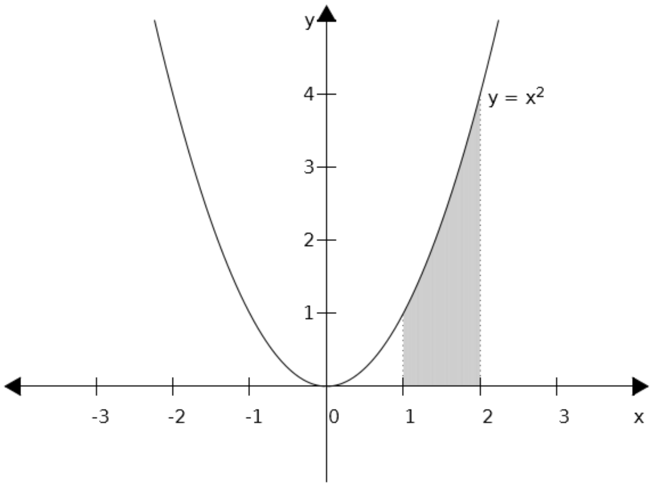
- povrchu rotačního tělesa
- při řešení diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami

V ekonomii můžeme určitý integrál využít k výpočtu:

- celkových veličin z mezních (marginálních) veličin, například celkového příjmu z mezního příjmu,
- celkové veličiny, je-li dán její tok či intenzita.
- k výpočtu přebytku spotřebitele a výrobce v podmínkách dokonalé konkurence

---

Příklad 8.1. Vypočtěte: $\int_1^2 x^2 dx$.



Obr. 8.2. Obsah plochy pod křivkou $y = x^2$.

Příklad 8.2. Vypočtěte: $\int_0^3 x^2 dx$.

Příklad 8.3. Vypočtěte: $\int_{-2}^{0} x^3 dx$.

Příklad 8.4. Vypočtěte: $\int_{-1}^{2} \left(3x^2 - 4x + 1\right) dx$.

Příklad 8.5. Vypočtěte: $\int_{0}^{1} e^x dx$.

Příklad 8.6. Vypočtěte: $\int_0^{\pi} \sin x dx$.

Příklad 8.8. Vypočtěte: $\int_1^{e} \frac{1}{x} dx$.

Varovný příklad 8.9. Vypočtěte: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx$.

METODA PER PARTES V URČITÉM INTEGRÁLU

Metodu per partes jsme zavedli v Kapitole 6. Pro určitý integrál při užití této integrační metody platí:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = \left[u(x) \cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx \qquad (8.3)$$

Příklad 8.10. Vypočtěte: $\int_1^2 xe^x\, dx$.

Příklad 8.11. Vypočtěte: $\int_1^e x^2 \ln x dx$.

SUBSTITUCE V URČITÉM INTEGRÁLU

- Při substituci v určitém integrálu nahrazu**j**eme nejen **integrovanou funkci**, ale také **integrační meze**!

Věta 8.1. *Nechť funkce* $f(x)$ *je spojitá v intervalu* $\langle a,b\rangle$, *nechť* $\varphi(t)$ *a* $\varphi'(t)$ *jsou spojité funkce v intervalu* $\langle \alpha,\beta\rangle$, *přičemž nechť* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, *nechť* $\varphi'(t)$ *je ryze monotónní v* $\langle \alpha,\beta\rangle$. *Potom:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt \tag{8.4}$$

Užití Věty 8.1, respektive vztahu (8.4) si předvedeme na několika řešených úlohách.

Příklad 8.13. Vypočtěte: $\int_0^3 (2x+1)^3 \, dx$.

Příklad 8.14. Vypočtěte: $\int_0^1 x\sqrt{x^2+2}\,dx$.

Příklad 8.15. Vypočtěte: $\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x dx$

APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU

Určitý integrál má mnoho aplikací především v technických a přírodovědných oborech. Lze jej využít například k výpočtu:

- obsahu plochy omezené danými křivkami
- objemu rotačního tělesa
- plochy rotačního tělesa
- délky křivky (rektifikaci)
- Řešení diferenciálních rovnic s danými okrajovými nebo počátečními podmínkami

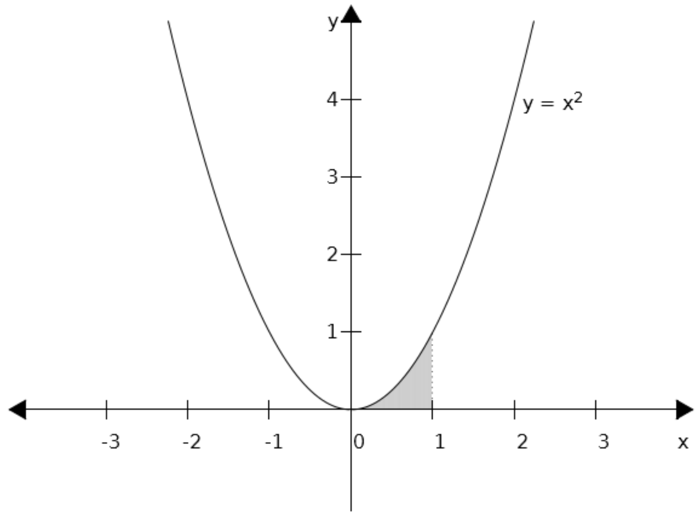
OBSAH PLOCHY VYMEZENÝ DANOU KŘIVKOU A OSOU X NA DANÉM INTERVALU

Nejjednodušším užitím určitého integrálu je výpočet obsahu plochy pod (nad) danou křivkou, tedy mezi danou křivkou a osou x (viz Obr. 9.1.).

***Věta 9.1**. Nechť $y = f(x)$ je (všude) nezáporná funkce na intervalu (a,b). Potom obsah plochy S vymezený křivkami $y = f(x)$, x = a, x = b a y = 0 vypočteme užitím Newton-Leibnizovy formule:*

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (9.1)$$

Příklad 9.1. Vypočtěte obsah plochy pod křivkou $y = x^2$ na intervalu $(0,1)$.

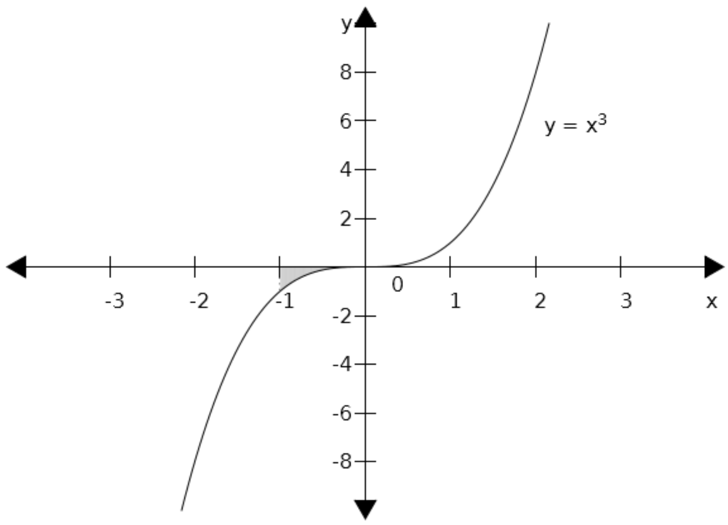


Obr. 9.1.

Pokud je funkce $y = f(x)$ na daném intervalu (a,b) záporná, dostaneme užitím vztahu (9.1) obsah plochy rovněž záporný, což je z geometrického hlediska nesmysl. V tomto případě tedy musíme vzít místo funkce $y = f(x)$ její absolutní hodnotu, čímž je zaručen kladný výsledek:

$$S = \int_a^b |f(x)|\, dx = |F(b) - F(a)| \qquad (9.2)$$

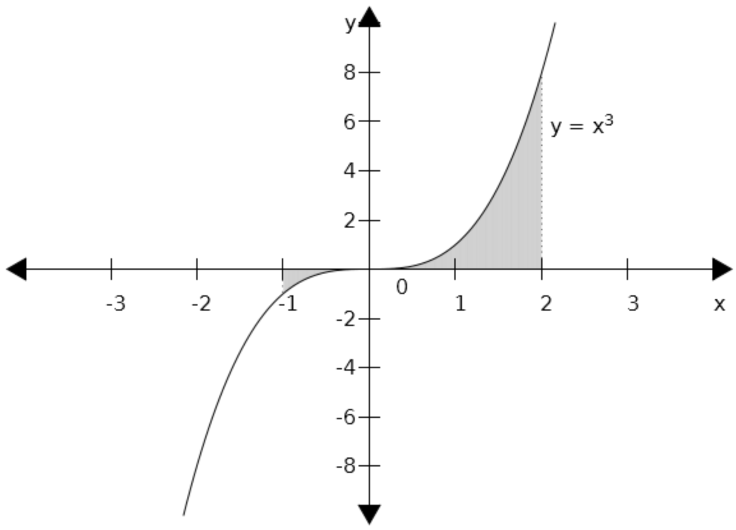
Příklad 9.2. Vypočtěte obsah plochy pod křivkou $y = x^3$ na intervalu $(-1,0)$.



Obr. 9.2.

Pokud je funkce $y = f(x)$ na intervalu (a,b) kladná i záporná, rozdělíme interval (a,b) na několik dílčích na sebe navazujících intervalů tak, aby v každém takovém intervalu byla daná funkce buď jen kladná nebo jen záporná. Vypočteme obsahy ploch pod (nad) danými úseky funkce a vše nakonec sečteme.

Příklad 9.3. Vypočtěte obsah plochy vymezené křivkou $y = x^3$, osou x, a přímkami $x = -1$ a $x = 2$ (viz Obrázek 9.3).



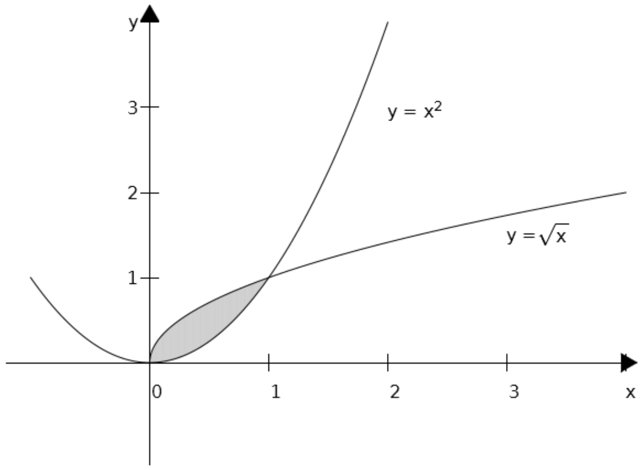
Obr. 9.3.

Obsah plochy sevřené dvěma a více křivkami

Obsah plochy mezi křivkami $f(x)$ a $h(x)$, kde $h(x)$ je horní křivka a $f(x)$ dolní křivka, a kde a a b jsou průsečíky obou křivek, počítáme podle vztahu:

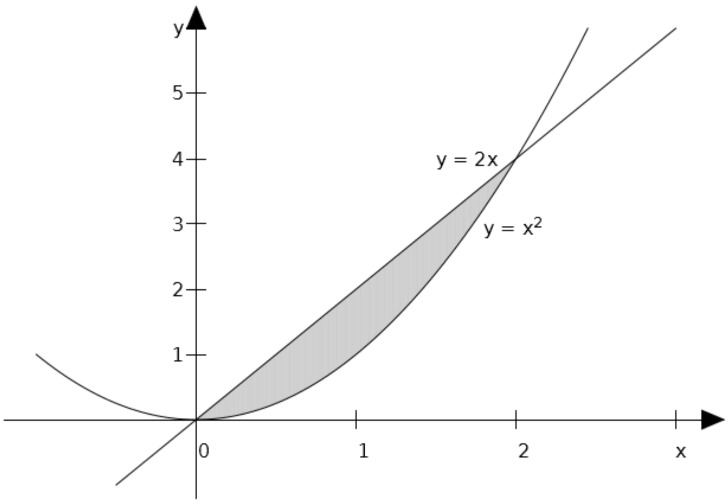
$$S = \int_a^b \left(h(x) - f(x)\right) dx \tag{9.3}$$

Příklad 9.4. Vypočtěte obsah plochy sevřené křivkami $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$ (viz Obr. 9.4).



Obr. 9.4.

Příklad 9.5. Vypočtěte obsah plochy sevřené křivkami $y = x^2$ a $y = 2x$ (viz Obr. 9.5.).



Obr. 9.5.

Objem rotačního tělesa

Objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky $y = f(x)$ kolem osy x na intervalu (a,b) počítáme ze vztahu:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Podobně lze vypočítat objem rotačního tělesa, pokud rotujeme křivku kolem osy y, pak jen zaměníme x za y.

Příklad 9.7. Vypočtěte objem tělesa (jde o *rotační paraboloid*), které vznikne rotací křivky $y = \sqrt{x}$ kolem osy x na intervalu $(a,b) = (0,3)$.

Příklad 9.8. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací křivky $y = x^2$ kolem osy x na intervalu $(1,2)$.

CELKOVÝ PŘÍJEM JAKO URČITÝ INTEGRÁL INTENZITY TOKU PŘÍJMU

Celkový příjem může být v některých situacích dán jako součet toku příjmu za nějaké období. To je typické pro příjmy telefonních operátorů, obchodních řetězců, apod., kde lze tok příjmů považovat za *spojitý* (tyto společnosti inkasují od zákazníků každou sekundu), nebo *diskrétní*, což je případ nejrůznějších rent, dividend, apod. V obou případech lze intenzitu toku modelovat pomocí spojitých funkcí (které lze derivovat a integrovat).

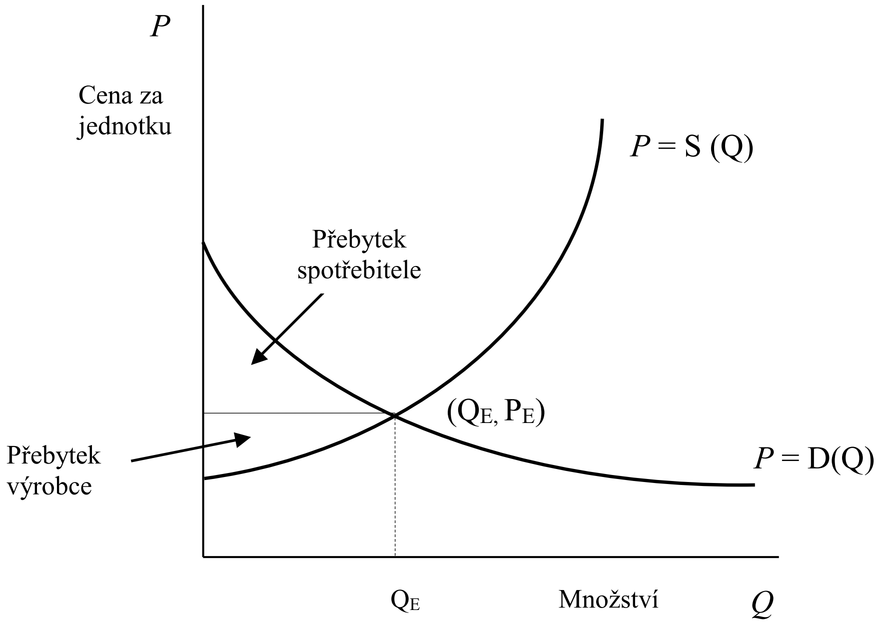
Celkový příjem TR za období ($t_1;t_2$), jestliže funkce $f(t)$ vyjadřuje *intenzitu toku příjmu* (velikost renty) v čase t, se vypočte jako:

$$TR = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt \qquad (9.4)$$

Příklad. Okamžitý tok peněz do určité finanční instituce je vyjádřen funkcí $f(t) = 2t^3 - \frac{1}{t}$ Kč. Určete celkový tok za období od $t = 1$ do t = 10.

PŘEBYTEK SPOTŘEBITELE A VÝROBCE V PODMÍNKÁCH DOKONALÉ KONKURENCE

Víme, že průsečík P_E je průsečíkem křivky nabídky a poptávky, a je nazývaný rovnovážná cena. Někdy jsou spotřebitelé ochotni zaplatit cenu, která je vyšší než rovnovážná cena P_E za každou jednotku produkce. V tomto případě spotřebitelé získávají tím, že jsou schopni koupit produkt za nižší cenu P_E.



Obr. 9.6. Zdroj: Godulová et. al. (2000).

Přebytek spotřebitele CS (customer surplus) je dán plochou oblasti nad horizontálou $P = P_E$ a pod křivkou poptávky, viz Obr. 9.6. Plocha této oblasti se vypočte jako plocha pod křivkou poptávky na intervalu $(0,Q_E)$ mínus plocha obdélníka s šířkou Q_E a výškou P_E. Přebytek spotřebitele CS je tedy:

$$CS = \int_0^{Q_E} D(Q)dQ - Q_E P_E \tag{9.5}$$

Producent, který je ochoten nabízet produkt za cenu pod P_E, bude realizovat zisk z prodeje produktu za cenu $P_{E.}$ *Přebytek výrobce PS* (*producer surplus*) je dán plochou oblasti pod horizontální křivkou $P = P_E$ a nad křivkou nabídky, viz Obr. 9.6. Graficky je PS určeno jako plocha obdélníka o šířce Q_E a výšce P_E mínus plocha oblasti pod křivkou nabídky na intervalu $(0,\ Q_E)$. Přebytek výrobce (PS) je tedy:

$$PS = Q_E P_E - \int_0^{Q_E} S(Q)dQ \tag{9.6}$$

Příklad 9.12. Vypočtěte přebytek spotřebitele a přebytek výrobce v podmínkách dokonalé konkurence za předpokladu, že funkce nabídky $S(Q) = 4 + Q$ a funkce poptávky $D(Q) = \frac{54}{Q+1}$.