EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Název projektu	Rozvoj vzdělávání na Slezské univerzitě v Opavě
Registrační číslo projektu	CZ.02.2.69/0.0./0.0/16_015/0002400

Prezentace předmětu:

KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI

Vyučující:

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI

11. PŘEDNÁŠKA

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

Kvantitativní metody v ekonomické praxi

Struktura přednášky

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Témata přednášky:

a) testování hypotéz,

b) neparametrické testy hypotéz,

c) mediánový test,

d) Chi-kvadrát test.

Co přináší neparametrické testování hypotéz?

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

V případě ordinálních (pořadových) nebo nominálních dat odpovídá na specifické otázky:

1. Existuje významný soulad dané charakteristiky rozdělení četnosti vzorku se zadanou charakteristikou populace?
2. Existuje významný rozdíl dané charakteristiky mezi 2 (nebo více) vzorky?

Charakteristika - např. medián, zadané pořadí, **typ rozdělení pr-sti (četnosti)** aj.

Neparametrické testy hypotéz

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

- Má medián populace s neznámým rozdělením stanovenou hodnotu? (**mediánový test**)
- Pochází výběr z populace se zadaným (známým) rozdělením pravděpodobnosti?

  (**Chi-kvadrát test**)

Mediánový test

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

- Nevíme-li, zda má populace normální rozdělení, předpokládáme, že má medián $\tilde{\mu}_0$ rozsah vzorku n
- H_0: $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$, H_1: $\tilde{\mu} \neq \tilde{\mu}_0$ - oboustranný test
- Testové kritérium: $u = \dfrac{|2m - n|}{\sqrt{n}}$

m je počet počet pozorování ve vzorku < $\tilde{\mu}_0$

- Jestliže $u > z_{1-\alpha/2}$ potom H_0 zamítáme!

$z_{1-\alpha/2}$ je kvantil norm. normál. rozdělení (viz tabulky)

Příklad - MZDY

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Náhodně vybraný vzorek 19 pracovníků jisté (dělnické) profese ve městě Karviná poskytl následující údaje o jejich měsíčních mzdách (v tis.Kč):

10,0	12,3	12,6	12,6	13,0	13,2	13,3	13,3	13,4	13,8
14,1	14,3	14,6	15,1	15,2	15,4	16,5	18,2	20,5	----

Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ testujte hypotézu, že průměrná (mediánová) měsíční mzda pracovníků této profese v Karviné je 15 tis. Kč.

Příklad – MZDY – řešení

Populace - měsíční mzdy všech pracovníků dané profese v Karviné.

Je známo, že **mzdy nemají normální rozdělení** pr-sti!

Proto namísto **střední hodnoty** je lepší charakteristikou **medián**, jemu pak odpovídá neparametrický dvoustranný mediánový test hypotézy $H_0\colon Med(X) = 15$

proti alternativní hypotéze $H_1\colon Med(X) \neq 15$

Příklad – MZDY – řešení

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Z dat: $n = 19$, $m = 13$, vypočteme:

$$u = \frac{|2.13 - 19|}{\sqrt{19}} = 1{,}61$$

NORMSINV(0,975) = 1,96

Protože 1,61 < 1,96, nulovou hypotézu H_0 nezamítáme (přijímáme).

Jinými slovy: na zvolené hladině významnosti 0,05 vzorek neodporuje hypotéze o výši mediánové měsíční mzdy pracovníků dané profese v Karviné (tj. 15 tis. Kč)

Také: vybraný vzorek je v souladu s karvinskou populací v této profesi!

Chi – kvadrát test

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

- Data mohou být **nominální** (nejslabší požadavek)!
- Testuje se (nulová) hypotéza

H_0: výběr pochází z populace s daným rozdělením

- Zadané rozdělení je obvykle:

- diskrétní rozdělení se stejnými pr- stmi
- (tzv. **test nezávislosti**)
- diskrétní rozdělení s rozdílnými pr- stmi
- (tzv. **test dobré shody**)

Příklad – test nezávislosti - limonády

Nová limonáda se prodávala za stejnou cenu jeden týden ve 3 různých typech obalu: A, B, C, počet prodaných limonád viz tabulka:

Typ obalu	Prodané kusy
A	135
B	130
C	155
Celkem	420

Ovlivňuje styl designu obalu počet prodaných limonád?

Jinak: Závisí prodej na obalu?

Příklad – test nezávislosti - limonády

Krok 1. **Nulová hypotéza H_0:**

Počet prodaných kusů **nezávisí** na typu obalu (rozdíly v prodeji u vzorku jsou pouze dílem náhody).

Očekávané četnosti (Expected): $E_1 = E_2 = E_3 = {}^{420}/_3 = 140$

Pozorované četnosti (Observed): $O_1 = 135,\ O_2 = 130,\ O_3 = 155$

Krok 2. Testové kritérium: $$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

k - **počet kategorií** ($k = 3$)

Příklad – test nezávislosti - limonády

Krok 3. Porovnání hodnoty vypočítaného kritéria

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 2,5$$

CHIINV(0,05;2) = 6,0

s tabulkovou **kritickou hodnotou** rozdělení $\boldsymbol{\chi^2_\alpha(2) = 6,0}$

kde α (= 0,05) je zadaná hladina významnosti

V každé kategorii: O_i alespoň 5 !

Jestliže $X^2 = 2,5 < \chi^2_{0,05}(2) = 6,0$

potom H_0 nezamítáme! (jinak **zamítáme**)

***p*-hodnota (signifikance)** = 0,287 > 0,05 (Nezamítáme)

Příklad – test nezávislosti – limonády – nové zadání – domácí úkol

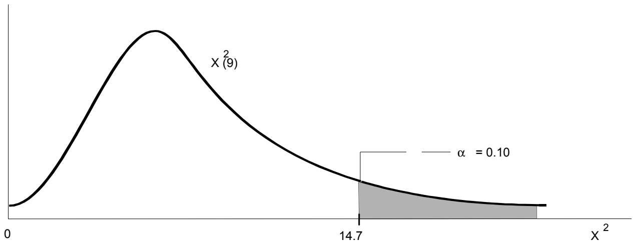
Nová limonáda se prodávala za stejnou cenu jeden týden ve fakultním bufetu ve 3 různých typech obalu: A, B, C, počet prodaných limonád viz tabulka:

NOVÉ ZADÁNÍ:

Typ obalu	Prodané kusy	
A	135	120
B	130	130
C	155	170
Celkem	420	420

Ovlivňuje styl designu obalu počet prodaných limonád?

Kritické hodnoty
rozdělení Chi-kvadrát $\chi^2_\alpha(n)$



SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

n \ α	0,995	0,99	0,975	0,95	0,9	0.1	0.05	0.025	0.01	0,005
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	2.7	3.8	5.0	6.6	7.9
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	4.6	6.0	7.4	9.2	10.6
3	0,07	0,12	0,22	0,35	0,58	6.3	7.8	9.4	11.3	12.8
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	7.8	9.5	11.1	13.3	14.9
5	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	9.2	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1,74	2,09	2,70	3,33	4,17	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21.0	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8,64	9,51	10,98	12,34	14,04	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,58	32.0	35.2	38.1	41.6	42.2
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	35.6	38.9	41.9	45.6	48.6
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

Příklad – test dobré shody – barvy automobilů

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Automobil Škoda - Felicia se prodává ve čtyřech barvách:

- 40% zákazníků požaduje zelenou barvu automobilu
- 25% červenou barvu,
- 25% modrou barvu a
- 10% bílou barvu.

K ověření správnosti předpokladu o struktuře poptávky podle barev použijte záznamy o nákupech v dané prodejně v jistém měsíci.

Příklad – test dobré shody – barvy automobilů

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Vstupní údaje obsahuje následující tabulka:

j	Barva	$p_{0,j}$	n_j
1	zelená	0,40	201
2	červená	0,25	105
3	modrá	0,25	144
4	bílá	0,10	30
součet		1,00	480

Na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujte hypotézu, že uvedené pravděpodobnostní odhady odpovídají zjištěným hodnotám prodejů.

Příklad – test dobré shody – barvy automobilů

Krok 1. **Nulová hypotéza H$_0$:**

$$H_0 : p_{0,1} = 0{,}4, p_{0,2} = p_{0,3} = 0{,}25, p_{0,4} = 0{,}1$$

Očekávané četnosti:

$E_1 = 192$, $E_2 = 120$, $E_3 = 120$, $E_4 = 48$

Pozorované četnosti:

$O_1 = 201$, $O_2 = 105$, $O_3 = 144$, $O_4 = 30$

Krok 2. Testové kritérium: $$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

k - **počet kategorií** ($k = 4$)

Příklad – test dobré shody – barvy automobilů

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\text{Očekáv\_čet\_}i = \text{Pravděp\_}i \times \text{celk\_čet}$$

Příklad:

i = zelená, $\text{Pravděp\_}i = 0{,}40$, $\text{celk\_čet} = 480$

$E_1 = \text{Očekáv\_čet\_}i = 0{,}4*480 = 192$

atd.

Příklad – test dobré shody – barvy automobilů

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Krok 3. Porovnání hodnoty vypočítaného kritéria

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 13{,}85$$

s tabulkovou **kritickou hodnotou** rozdělení $\chi^2_{0,05}(3) = 7{,}81$

V každé kategorii: O_i je alespoň 5 (>30)

Platí $X^2 = 13{,}85 > \chi^2_{0,05}(3) = 7{,}81 = \mathrm{CHIINV}(0{,}05;3)$

proto H_0 zamítáme!

Alternativně: Sig =CHIDIST(13,85; 3) = 0,003 < 0,05

Testování nezávislosti kvalitativních znaků

V jednom vzorku (výběru) můžeme současně sledovat dva nebo i více (kvalitativních) znaků

Příklad:

Při kontrole jakosti výrobku sledujeme přítomnost nebo nepřítomnost vady *A* (znak *A*), nebo přítomnost nebo nepřítomnost vady *B* (znak *B*).

A i *B* nabývají pouze dvě alternativní hodnoty – **kategorie**: **Ano, Ne** **(Přítomnost, Nepřítomnost**, apod.).

Testování nezávislosti kvalitativních znaků

Uvažujte soubor se dvěma **kvalitativními** znaky ***A*** a ***B***

Znak ***A*** má *r* možných kategorií hodnot označených: $A_1, A_2, \ldots, A_r$

znak ***B*** má *s* možných kategorií hodnot: $B_1, B_2, \ldots, B_s$

Výsledek celého složeného experimentu lze shrnout do **kontingenční tabulky**:

Testování nezávislosti kvalitativních znaků

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Kategorie znaku A/B	B_1	B_2	B_3	....	B_s	Součet
A_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	....	n_{1s}	$n_{1\cdot}$
A_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	....	n_{2s}	$n_{2.}$
A_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	....	n_{3s}	$n_{3\cdot}$
....	.....	....	....	....	....	....
A_r	n_{r1}	n_{r2}	n_{r3}	....	n_{rs}	$n_{r\cdot}$
Součet	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{.3}$	....	$n_{.s}$	n

Testování nezávislosti kvalitativních znaků
Čtyřpolní kontingenční tabulka

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Vzhled / Hmotnost výrobků	Vyhovující hmotnost	Nevyhovujícíhm otnost	Součet-Marg. četnost
Vyhovující vzhled	239	60	299
Nevyhovující vzhled	14	7	21
Součet - Marg. četnost	253	67	320

Testování nezávislosti kvalitativních znaků

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Krok 1. Nulová hypotéza H_0:

Vzhled výrobku nezávisí na hmotnosti
(rozdíly u vzorku jsou pouze dílem náhody).

Očekávané četnosti: $E_{11} = 253*299/320 = 236{,}4$
$E_{21} = 253*21/320 = 16{,}6$
$E_{12} = 67*299/320 = 62{,}6$
$E_{22} = 67*21/320 = 4{,}4$

Pozorované četnosti: $O_{11} = 239$, $O_{12} = 14$, $O_{21} = 60$, $O_{22} = 7$

Krok 2. Testové kritérium X^2:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = 2{,}086$$

$df = (r-1)(s-1)$ počet stupňů volnosti ($k = (2-1)(2-1) = 1$)

Testování nezávislosti kvalitativních znaků

$$\frac{\text{Ocekáv\_č}\_i,j}{\text{celk.c.}} = \frac{\text{Marg\_č}\_i}{\text{celk.č.}} \times \frac{\text{Marg\_č}\_j}{\text{celk.č.}}$$

$$\text{Očekáv\_č\_}i,j = \text{Marg\_č\_}i \times \text{Marg\_č\_}j \,/\, \text{celk\_č}$$

Příklad:

i = 1: Hmotnost-Nevyhovující

j = 2 : Vzhled-Vyhovující

celk_č = 320

E_{12} = Očekáv_č_1,2 = 299*67/320 = 62,6

atd.

Testování nezávislosti kvalitativních znaků

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Krok 3. Porovnání hodnoty vypočítaného kritéria s tabulkovou kritickou hodnotou rozdělení, kde $\alpha = 0,10$ je zadaná hladina významnosti.

V každé kategorii má být alespoň 5 hodnot!

Jestliže $X^2 = 2,1 < \chi^2_{0,1}(1) = 2,7$ potom H_0 nezamítáme!

Alternativně:

Pro hodnotu X^2 zjistíme p-hodnotu (tj. signifikanci - - má být menší než 0,1)

p = CHIDIST(2,1;1) = 0,147 - tedy H_0 nezamítáme!

Čtyřpolní tabulka – kontingenční tabulka 2 x 2:

Znak2			**Součet**
Znak1	h_1	h_2	
h_1	A	B	$A+B$
h_2	C	D	$C+D$
Součet	$A+C$	$B+D$	n

Kritérium: $$X^2 = \frac{n(AD-BC)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}$$

Jestliže $X^2 > \chi^2_\alpha(1)$ **, pak H_0 zamítáme, jinak ji nezamítáme!**

Příklad: VZHLED X HMOTNOST

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

A = 239, B = 60, C = 14, D = 7

$$X^2 > \chi^2_{0,1}(1) = 2{,}7$$

$$X^2 = \frac{n(AD - BC)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)} = 2{,}1$$

Vliv kouření na úmrtnost v Karviné

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Kontingenční tabulka pro 2917 zemřelých v Karviné

Kouření versus *Počet zemřelých na rakovinu plic*

Pozorované čet.	zemřel RP	zemřel JINAK
kouření ANO	137	817
kouření NE	198	1765

Analyzujte, zda kouření respondentů ovlivnilo úmrtnost na rakovinu plic (*RP*).

Použijte Chi-kvadrát test.

Vliv kouření na úmrtnost v Karviné

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Pozorované čet.	zemřel RP	zemřel JINAK	Suma
kouření ANO	137	817	954
kouření NE	198	1765	1963
Suma	335	2582	2917

Očekávané čet.	zemřel RP	zemřel JINAK	(Eij-Oij)^2/Eij	
kouření ANO	109,56	844,44	6,87	0,89
kouření NE	225,44	1737,56	3,34	0,43

CHI-SQUARE	11,54
alfa	0,05
df	1
CHIINV	3,8415
CHIDIST=Sig	0,0007

Vliv kouření na úmrtnost v Karviné

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Nulovou hypotézu o nezávislosti znaků zamítáme!

(Úmrtnost na rakovinu plic závisí na kouření respondentů)

$$X^2 = \frac{n(AD - BC)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)} = 11{,}54$$

Závěr přednášky

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Děkuji Vám za pozornost !!!