



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Název projektu	Rozvoj vzdělávání na Slezské univerzitě v Opavě
Registrační číslo projektu	CZ.02.2.69/0.0./0.0/16_015/0002400

Prezentace předmětu:
KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI

Vyučující:
Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ



**SILESIA
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI

2. PŘEDNÁŠKA

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.



Kvantitativní metody v ekonomické praxi

Struktura přednášky

Témata přednášky:
a) maticové rovnice,
b) výpočet determinantů,
c) soustava lineárních rovnic.

Maticové rovnice



SILESIAN
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Platí vztahy:

1) pro regulární matici D
platí: $DD^{-1} = D^{-1}D = E$,

2) pro matici X platí:
 $XE = EX = X$.

Maticové rovnice - příklad



SILESIA
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Řešte maticovou rovnici

$$2X - B = 3XA,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinant matice



SILESIAN
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Každé čtvercové matici A přiřadíme číslo, které budeme označovat $\det A$ a nazývat determinantem matice A .

Čtvercová matice A je regulární právě tehdy, jestliže $\det A \neq 0$.

Výpočet determinantu 2. řádu



**SILESIA
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

Výpočet determinantu 3. řádu



**SILESIAN
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Sarussovo pravidlo:



Vlastnosti determinantu

- 1) Determinant matice A se rovná determinantu A^T .
- 2) Jestliže v matici vzájemně zaměníme dva rovnoběžné řádky (resp. dva rovnoběžné sloupce), změní determinant znaménko.



Vlastnosti determinantu

3) Společného nenulového činitele k všech prvků jednoho řádku (resp. jednoho sloupce) matice lze vytknout před determinant.

4) Determinant matice se rovná nule, jestliže:

a) všechny prvky aspoň jednoho řádku (resp. sloupce) jsou rovny nule,

b) jeden řádek (resp. sloupec) matice je LK řádků (resp. sloupců) s ním rovnoběžných.

Vlastnosti determinantu



**SILESIA
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

5) Jsou-li A , B čtvercové matice stejného řádu, platí :

$$\det (AB) = \det A \cdot \det B.$$

Regulární x singulární matice



SILESIA
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Určete parametry v daných maticích tak, aby matice A , C byly singulární a matice B , D byly regulární. Matice jsou:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4+a \\ a+1 & 5-a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3+b & 6 \\ 6-b & b \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & c & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ d^2 & 2d & 1 \\ 2d & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte determinanty:



**SILESIA
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\begin{vmatrix} 2x & -3 \\ x-1 & 1-x \end{vmatrix} \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} a+x & x \\ -x & x-a \end{vmatrix} = a^2$$

Upravte a vypočtete determinant



**SILESIA
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ 1 & 2 & a^2 \\ 2 & 1 & a^2 \end{vmatrix}$$

Upravte a vypočtete determinant



**SILESIAN
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Vypočtěte příklad:

Pro která a je determinant D záporný?

$$D = \begin{vmatrix} -1 & a & 3 \\ -2 & 1 & a \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix}$$



Soustavy lineárních algebraických rovnic

Soustavou m lineárních
algebraických rovnic o n neznámých
nazveme soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \quad (S)$$

Rozšířená matice soustavy



SILESIAN
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Matice

$$A_r = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

se nazývá **rozšířená**
matice soustavy (S).

Frobeniova věta



**SILESIAN
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Soustava lineárních rovnic (S) má řešení tehdy a jen tehdy, když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.

Kolik řešení má soustava?



SILESIAN
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Necht' soustava lineárních rovnic (S) má řešení, h je hodnost matice soustavy a n je počet neznámých.

Potom platí:

a) je-li $h = n$, pak soustava (S) má právě jedno řešení,

b) je-li $h < n$, pak soustava (S) má nekonečně mnoho řešení, závislých na $n - h$ parametrech.

Příklad:

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4,$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1,$$

$$4x_1 - 2x_2 - x_3 = 7.$$



Příklad:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 12 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & 3 & 19 \end{array} \right)$$



Příklad:



**SILESIA
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 7 & 9 \end{array} \right)$$

Příklad:



$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 10 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & & \end{array} \right)$$

Cramerovo pravidlo



**SILESIAN
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Pomocí Cramerova pravidla
můžeme řešit soustavu
lineárních rovnic, je-li matice
soustavy regulární.

Cramerovo pravidlo



SILESIAN
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Necht' je dána soustava n rovnic o n neznámých.

Necht' matice A této soustavy je regulární (tj. $\det A \neq 0$).

Cramerovo pravidlo



SILESIAN
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Potom soustava má právě jedno řešení a platí:

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}$$

kde B_i je matice, která vznikne z matice A tak, že i -tý sloupec matice A nahradíme aritmetickým vektorem pravých stran soustavy a ostatní sloupce ponecháme beze změny.

Cramerovo pravidlo – příklad



SILESIAN
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Pomocí Cramerova pravidla řešte
soustavu:

$$x - y + 2z = 7$$

$$2x - 3y + 5z = 17$$

$$3x - 2y - z = 12.$$

Cramerovo pravidlo – řešení příkladu



SILESIAN
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Vypočteme příslušné determinanty:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6,$$

$$\det B_x = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 17 & -3 & 5 \\ 12 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 18,$$

Cramerovo pravidlo – řešení příkladu



SILESIA
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\det B_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 17 & 5 \\ 3 & 12 & -1 \end{vmatrix} = -12,$$

$$\det B_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 17 \\ 3 & -2 & 12 \end{vmatrix} = 6.$$

Cramerovo pravidlo – řešení příkladu

Daná soustava má právě jedno řešení:

$$x = \frac{\det B_x}{\det A} = \frac{18}{6} = 3,$$

$$y = \frac{\det B_y}{\det A} = \frac{-12}{6} = -2,$$

$$z = \frac{\det B_z}{\det A} = \frac{6}{6} = 1.$$

Cramerovo pravidlo - příklad



SILESIAN
UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Cramerovým pravidlem vypočtete neznámou y :

$$-2x + y + 3z = 1$$

$$3x + 2y + 3z = -2$$

$$-x + 3y - z = 8.$$

Závěr přednášky



**SILESIAN
UNIVERSITY**
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Děkuji Vám za pozornost !!!