EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Název projektu	**Rozvoj vzdělávání na Slezské univerzitě v Opavě**
Registrační číslo projektu	**CZ.02.2.69/0.0./0.0/16_015/0002400**

Prezentace předmětu:

KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI

Vyučující:

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI

3. PŘEDNÁŠKA

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

Kvantitativní metody v ekonomické praxi

Struktura přednášky

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Témata přednášky:

a) číselné posloupnosti,

b) vlastnosti posloupností,

c) výpočet limity posloupnosti.

Posloupnosti

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Nekonečnou číselnou posloupností prvků číselné množiny **je funkce**, která každému přirozenému číslu *n* přiřazuje reálné číslo.

definiční obor – *N*

obor hodnot - *R*

Zápis: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Zadání posloupnosti

- *n*-tým členem $a_n = \dfrac{2n-1}{4n}$ $\left\{\dfrac{2n-1}{4n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- výčtem prvků $\{2,4,6,8,\ldots\}$
- rekurentně $a_{n+1} = 2a_n + 3, \quad a_1 = -2$
- graficky

Grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů.

Aritmetická posloupnost

•rozdíl mezi dvěma po sobě jdoucími členy je konstantní, nazývá se **diference** *d*

$$d = a_{n+1} - a_n$$

Platí:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Příklad. Sečtěte všechna přirozená čísla od 1 do 1000.

Geometrická posloupnost

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Podíl mezi dvěma po sobě jdoucími členy je konstantní, nazývá se kvocient ***q***

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Platí:

1) $a_n = a_1 q^{n-1}$

2) $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$

Součet nekonečné geometrické řady

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$s = \frac{a_1}{1-q} \qquad |q| < 1$$

POSLOUPNOST KONVERGUJE

Příklad:

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

Určete součet posloupnosti:

a) $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

b) 2, 4, 8, 16, …

Monotónnost posloupnosti

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **je rostoucí, jestliže** $\forall n \in N: \quad a_n < a_{n+1}$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **je klesající, jestliže** $\forall n \in N: \quad a_n > a_{n+1}$

Omezenost posloupnosti

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **je omezená shora, jestliže**

$$\exists K \in R, \forall n \in N: \quad a_n \leq K$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **je omezená zdola, jestliže**

$$\exists L \in R, \forall n \in N: \quad a_n \geq L$$

Příklad:

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Je dána posloupnost $a_n = \frac{3n-1}{2n}$

Určete:

a) $a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_{100} =$ $a_{1000} =$

$a_{n+1} =$

b) monotónnost posloupnosti

Příklad:

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

c) max P = , min P = ,

sup P = , inf P

d) Je posloupnost omezená?

Limita posloupnosti – vlastní limita

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se blíží konečnému číslu A, zapisujeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

jedná se o vlastní limitu.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní.

Limita posloupnosti – nevlastní limita

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

b) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se blíží nevlastnímu číslu ∞, resp. $(-\infty)$

zapisujeme $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$, resp. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$

jedná se o nevlastní limitu.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je divergentní.

Limita posloupnosti neexistuje

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

c) Posloupnost nemusí mít ani vlastní ani nevlastní limitu.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je divergentní.

Např. $\left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

Definice vlastní limity posloupnosti

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\lim a_n = A \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$$

Definice nevlastní limity posloupnosti

$$\lim a_n = \infty \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 : \quad a_n > M$$

$$\lim a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 : \quad a_n < -M$$

Výpočet limit – lomená funkce

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_r(n)}{Q_s(n)}=\begin{cases}\infty\ (-\infty) & r>s\\ 0 & r<s\\ podíl\ \ldots & r=s\end{cases}$$

Výpočet limity posloupnosti - příklady

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

1) $$\lim \frac{4n^2 - 1}{5n^2 + 3n + 2} =$$

2) $$\lim \frac{3n + 5}{-4n^2 + 2} =$$

Výpočet limity posloupnosti - příklady

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

3) $$\lim \frac{5n^3 - 2n + 2}{4n - 1} =$$

4) $$\lim \frac{5n^3 - 2}{1 - 4n} =$$

Výpočet limity posloupnosti - příklady

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

5) $$\lim \frac{\sqrt{9n^2-2}+\sqrt{4n^2+1}}{7n+3} =$$

6) $$\lim \frac{-5n^3}{2n-1} =$$

Výpočet limity posloupnosti - příklady

7) $$\lim \frac{-5n^3 - 2}{4n} =$$

8) $$\lim \frac{\sqrt{25n^2 - 2}}{7n + 3} =$$

Výpočet limit s odmocninami

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2+7n}-2n}$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$$

Výpočet limit s odmocninami

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

3) $$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+5n}\right)$$

4) $$\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=$$

Výpočet limit „*n* v exponentu“

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\lim\left(-\frac{3}{7}\right)^n =$$

$$\lim\left(\frac{-7}{3}\right)^n =$$

Výpočet limit „*n* v exponentu“

$$\lim \frac{7^n - 11^n}{6^n} =$$

$$\lim \frac{6^n}{7^n - 11^n} =$$

Výpočet limit „*n* v exponentu“

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\lim \frac{2.5^{n+2} - 3.2^{n-1}}{2^{n+3} + 3.5^{n-1}} =$$

$$lim \frac{10^{n} + 8.3^{n+2}}{4.10^{n} - 6^{n+3}} =$$

Limita vedoucí na Eulerovo číslo

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

Limita vedoucí na Eulerovo číslo

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\lim\left(1-\frac{5}{3n+4}\right)^{3n+7}=$$

$$\lim\left(\frac{4n^2+3}{4n^2-1}\right)^{\frac{n^2}{3}}=$$

Jiné limity:

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

$$\lim\left(\frac{8n-5}{4n+4}\right)^{2n+7} =$$

$$\lim\left(\frac{4n+4}{8n-5}\right)^{2n+7} =$$

Opakování – domácí úkol

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION IN KARVINA

a) $lim \frac{2n}{5n+8} =$

b) $lim \frac{8n^5+1}{2-7n+2n^6} =$

c) $lim(-2)^n =$

d) $lim \frac{2}{5n+8} =$

e) $lim \frac{4n^3+1}{2-7n+2n^3} =$

f) $lim \left(\frac{1}{2}\right)^n =$

Závěr přednášky

SILESIAN UNIVERSITY
SCHOOL OF BUSINESS
ADMINISTRATION IN KARVINA

Děkuji Vám za pozornost !!!