



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Název projektu	Rozvoj vzdělávání na Slezské univerzitě v Opavě
Registrační číslo projektu	CZ.02.2.69/0.0./0.0/16_015/0002400

Prezentace předmětu:
KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI

Vyučující:
Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ



KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI

5. PŘEDNÁŠKA

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

Kvantitativní metody v ekonomické praxi

Struktura přednášky

Témata přednášky:
a) limita funkce,
b) výpočet limity funkce,
c) asymptoty funkce.



JESAN
UNIVERSITY

Spojitosť a limita funkce



lze definovat :

a) pomocí okolí bodu
(Cauchyova definice)

pomocí posloupností
(Heineova definice)

Spojitosť funkce



Funkce f je **v bodě** $C \in \mathbb{R}^n$
spojitá, jestliže

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$
platí

$x_n \rightarrow C \implies f(x_n) \rightarrow f(C)$

Spojitosť funkce



Funkce f je spojitá, jestliže je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Poznámka:



a) Každá elementární funkce je spojitá v libovolném bodě svého definičního oboru.

b) Funkce $y = x^x$ není spojitá v bodě $x = 0$

Bolzanova věta



Nechť f je spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$ taková, že $f(a) < f(b)$.

Potom existuje reálné číslo $c \in \langle a, b \rangle$ tak, že $f(c) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

Weierstrassova věta



Necht' f je spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom f nabývá v intervalu $\langle a, b \rangle$ jak svého minima, tak i maxima.



Limita funkce - příklady

1) Z grafu funkce určíme limitu funkce v krajních bodech definičního oboru funkce:

a) $y = \sqrt[1]{5}$

Limita funkce - příklady



b) $y = \cos x$

Limita funkce - příklady



2) a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 3x + 18}{x} =$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 3x + 18}{x} =$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 3x + 18}{x} =$

Výpočet limity funkce – lomená funkce



$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P_k(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0, & \text{je-li } k < m \\ \infty, & \text{je-li } k > m \\ \text{podíl } \dots, & k = m \end{cases}$$

Výpočet limity funkce – lomená funkce



$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 + x - 3}{1.5x^4 - 1} =$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 3}{5x^4 - 4} =$$

Výpočet limity funkce – lomená funkce



$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2}{x} =$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^4}{x^2 - 8} =$$

Výpočet limity funkce – lomená funkce



$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 3}{5x^3} =$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3}{5x^7} =$$

Výpočet limity funkce – lomená funkce



$$g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 1}{6x} =$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^4 - 2}{7x} =$$

Výpočet limity funkce – lomená funkce



$$1. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^4 - x^2}{5 - x} = ?$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^5}{x} = ?$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^3 - x^2}{2 - x} = 4$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x}{2 - x} = \infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^2}{x^4 - x^2} = ?$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^4 + x^2}{x^2 - 1} = \infty$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - x^2}{x^2 - 1} = ?$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^4 - x^2}{x^2 - 1} = ?$$

Výpočet limity funkce – neurčitý výraz $\frac{0}{0}$



Úprava výrazu: rozklad
na součin nebo použití vztahu

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$$

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-3)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-2}{x-3} =$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{3x^2 + 2x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)}{3(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}{3\left(x - \frac{1}{3}\right)} = -.$$



Výpočet limity funkce – neurčitý výraz $\frac{0}{0}$



$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} =$$

Výpočet limity funkce – neurčitý $\frac{0}{0}$ výraz



$$d) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{9-x}-2}{4-\sqrt{11+x}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{9-x}-2)}{(4-\sqrt{11+x})} \cdot \frac{(4+\sqrt{11+x})}{(4+\sqrt{11+x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{9-x}-2)(4+\sqrt{11+x})}{(4-\sqrt{11+x})(4+\sqrt{11+x})}$$

Výpočet jednostranných limit



Po dosazení dostaneme výraz $\frac{k}{c} \Rightarrow$

**Jednostranné limity se počítají
v bodech nespojitosti funkce.**

Výpočet jednostranných limit



$$a) \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x-1} : (\text{dosadíme } 1,1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x-1} : (\text{dosadíme } 0,9)$$

Výpočet jednostranných limit



b) Dokažte, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \cdot$.

Výpočet jednostranných limit



c) Vypočtete limitu $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

Výpočet limity – Eulerovo číslo



Definice Eulerova čísla:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Výpočet limity – Eulerovo číslo



$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^x$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right)^{x^2}$$

Asymptoty funkce – svislá asymptota



Předpokládejme, že pro zvolenou funkci platí: $\lim_{x \rightarrow C} f(x) = \infty$. To znamená, že je-li limita funkce ve vlastním bodě ($x = C$) nevlastní, pak říkáme, že existuje **svislá asymptota** funkce a rozumíme jí přímkou o rovnici $x = C$.

Asymptoty funkce – vodorovná asymptota



Předpokládejme, že pro zvolenou funkci platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x) = a \quad \text{kde } a, b \in \mathbb{R}.$$

To znamená, že je-li limita funkce v nevlastním bodě vlastní,

pak říkáme, že existuje **vodorovná asymptota** funkce a

má rovnici $y = b$ resp. $y = a$

Asymptoty funkce – šikmá asymptota



Předpokládejme, že pro zvolenou funkci platí:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) - \frac{kx + q}{x} \right) = 0 \text{ a současně } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) - \frac{kx + q}{x} \right) = 0 \text{ kde } k, q \in \mathbb{R}.$$

Pak říkáme, že existuje **šikmá asymptota**, která má rovnici $y = \frac{kx + q}{x} +$

Uvedený vztah platí i v případě, že všude ∞ zaměníme za $-\infty$.

Řešený příklad:



Vypočtete všechny asymptoty funkce $f(x) = x \frac{x^3}{x^2}$

Svislá asymptota má rovnici $x =$

Vodorovná asymptota funkce neexistuje.

Vypočteme rovnici šikmé asymptoty:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = x \quad q = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - x}{x} =$$

Šikmá asymptota má rovnici $y = x +$

Závěr přednášky



Děkuji Vám za pozornost !!!