



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



Název projektu	Rozvoj vzdělávání na Slezské univerzitě v Opavě
Registrační číslo projektu	CZ.02.2.69/0.0./0.0/16_015/0002400

Prezentace předmětu:
KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI

Vyučující:
Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.



KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI

9. PŘEDNÁŠKA

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.



Kvantitativní metody v ekonomické praxi

Struktura přednášky

Témata přednášky:

- a) pravděpodobnost náhodného jevu,*
- b) vlastnosti pravděpodobnosti,*
- c) kombinatorika,*
- d) náhodná veličina (diskrétní, spojitá).*

Náhodný pokus x náhodný jev



Příklady náhodného pokusu

- kolo štěstí, hod kostkou
- zjišťování volebních preferencí polit. stran voličů
- zjišťování hodnoty nákupů zákazníků

Příklady náhodného jevu

- padne nejméně 80%, padne šestka
- volič preferuje VV (ODS, TOP09, ČSSD aj.)
- hodnota nákupu zákazníka je 126 Kč

Náhodný jev



- *Jev jistý* - musí nutně nastat
- *Jev nemožný* - za žádných okolností pokusu nastat nemůže
- Jev, který spočívá v nenastoupení jevu A , je *jevem opačným*:
- *Jevy neslučitelné* - nemohou současně nastat

Elementární jevy



- Elementární jevy* jsou takové jevy, které:
- v dané situaci nelze rozložit na dílčí jevy
 - jsou neslučitelné
 - množinu všech elementárních jevů nazýváme *jevový prostor*
 - jeden z elementárních jevů musí vždy nastat

Jevový prostor



Vytváření nových jevů pomocí:

- **Sjednocení** jevů A a B
označujeme $A \cup B$
- **Průnik**, tj. jev představovaný
současným výskytem jevů A a B ,
označujeme $A \cap B$



Příklady náhodného jevu

Na „kole štěstí“:

1. Padnutí **alespoň 12%** je jevem jistým, padnutí **méně než 12%** je jevem nemožným!
2. Jestliže padnutí **alespoň 50%** znamená jev A , potom padnutí **méně než 50%** je jevem opačným k jevu A , tedy jevem A^c .



Příklady náhodného jevu

Při zjišťování věku zákazníků v marketu:

3. Věk zákazníka **nejvýše** 160 let je jevem jistým, věk zákazníka **více než** 160 let je jevem nemožným.
4. Jestliže věk zákazníka **nejvýše** 20 let je jev A , potom věk zákazníka **alespoň** 21 let je jevem opačným k jevu A , tedy jevem \bar{A}



Příklady jevového prostoru

5. Jevový prostor „kolo štěstí“ se skládá z 10 elementárních jevů, možnými výsledky je totiž padnutí
12, 14, 15, 16, 20, 30, 50, 70, 80, 100 %
6. Jevový prostor věku dospělých zákazníků (v rocích) daného supermarketu je 18, 19, 20, – neomezená množina elementárních jevů

POZOR!!!



Náhodný jev **může** být totožný s některým elementárním jevem, nebo může zahrnovat **více** elementárních jevů, např. padnutí sudého počtu ok je sjednocením trojice elementárních jevů (2, 4, 6)

Intuitivní pravděpodobnost



Míru možnosti nebo šance výskytu hromadného náhodného jevu udává číslo, které nazýváme *pravděpodobností* (Prst) tohoto jevu



Vlastnosti pravděpodobnosti

- Prst = číslo z intervalu mezi 0 a 1
- Jevu nemožnému se přiřazuje $Prst = 0$
- Jevu jistému $Prst = 1$
- Čím větší má jev pravděpodobnost, tím větší je šance, že jev nastane



Klasická pravděpodobnost

- Náhodný pokus má n elementárních jevů (tj. výsledků pokusu), které mají **stejnou pravděpodobnost** výskytu
- Jev X nastane tehdy, když nastane jeden z m předem stanovených příznivých výsledků
- Potom pravděpodobnost jevu X je dána podílem všech příznivých výsledků a všech možných výsledků:

$$Prst(X) = \frac{m}{n}$$

Příklad



V urně je 10 koulí, z toho 6 černých a 4 bílé:

- a. Stanovte pravděpodobnost, že 1 vytažená koule bude bílá

- b. Stanovte pravděpodobnost, že z 5 vytažených koulí budou 3 černé a 2 bílé

Řešení příkladu a)



Elementárním jevem je kterákoliv z vytažených koulí.

Počet všech elementárních jevů $n = 10$, počet příznivých jevů je $m = 4$, (bílé)

$$Prst = 4/10 = 0,4$$

Řešení příkladu b)



Elementárním jevem je kterákoliv pětice vytažených koulí.

Počet všech elementárních jevů se rovná počtu všech kombinací 5 koulí vytažených z 10 koulí, tj.

$$n = \binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$$

což je počet **možných** výsledků!

Řešení příkladu b)



Počet **příznivých** výsledků je počet těch kombinací 5 koulí, kde 3 jsou černé (ze 6) a 2 bílé (ze 4),

$$\text{tedy } m = \binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2} = 20 \cdot 6 = 120$$

Hledaná pravděpodobnost $Prst$ je podle vzorce:

$$Prst = \frac{120}{252} = 0,461 \text{ tj. } 46,1\%$$

Kombinatorika



Mějme n prvků (například písmen, koulí, lidí aj.)

Kolika způsoby je možné vytvořit skupinu o x prvcích, přičemž

1. **záleží** nebo 2. **nezáleží**

na pořadí prvků ve skupině?

ad 1. **Variace** (písmena: ano, ona...)

ad 2. **Kombinace** (tažená čísla ve sportce)

Prvky ve skupině se eventuálně mohou opakovat!?



Vzorce

Variace bez opakování: $V_x(n) = \frac{n!}{(n-x)!}$

V případě, že $n = x$, jedná se o permutace: $P(n) = n!$

Variace s opakováním: $V_x^{op}(n) = n^x$

Kombinace bez opakování: $C_x(n) = \binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!x!}$

Kombinace s opakováním: $C_x^{op}(n) = \binom{n+x-1}{x}$

Příklad:



1. Kolik 3-písmenných slov lze vytvořit z písmen A, B, C, D, E ?
 - Jedná se o variace s opakováním, neboť záleží na pořadí písmen a písmena se mohou ve slově opakovat

$$V_x^{op}(n) = n^x = 5^3 = 125$$



Příklad:

2. Kolika způsoby lze vytvořit 3-členné předsednictvo představenstva podniku ze 6 zvolených členů?
- Jedná se o kombinace bez opakování, neboť zde nezáleží na pořadí členů předsednictva a členové se přirozeně nemohou opakovat

$$C_3(6) = \binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

Náhodná veličina



Náhodná veličina (NV) = Číselný výsledek náhodného pokusu.

Výsledky - obecně různé vlivem náhodných činitelů mají různé pravděpodobnosti realizace

Náhodná veličina (NV) = odpovídá kvantitativnímu znaku populačního souboru (je jeho **zobecněním**)

Rozdělení náhodné veličiny



je pravidlo (předpis), které každé číselné hodnotě nebo množině hodnot přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude této hodnoty nebo hodnoty z tohoto intervalu.

Rozdělení náhodné veličiny



Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny =
úplné poznání NV:

- stanovení hodnot, jichž může NV nabývat
- znalost pravděpodobností, s nimiž NV nabývá určité hodnoty, nebo hodnoty z nějakého intervalu

Vyjádření rozdělení náhodné veličiny



- 1. Pravděpodobnostní funkce**
(typ diskrétní NV)
- 2. Hustota pravděpodobnosti**
(typ spojitě NV)
- 3. Distribuční funkce**
(oba typy NV: diskrétní / spojitý)

Pravděpodobnostní funkce



$p(x)$ – každé hodnotě $x \in \mathbf{D}$ přiřazuje odpovídající pravděpodobnost:

$$p(x) = P(X = x)$$

$p(x)$ splňuje vztahy:

$$\sum_{x \in \mathbf{D}} p(x) = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^b p(x)$$

- pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty z intervalu $[a, b] \subset \mathbf{D}$, je rovna součtu pravděpodobností hodnot z tohoto intervalu (\mathbf{D} je množina diskrétních hodnot)

Hustota pravděpodobnosti



- **Hustota pravděpodobnosti** $f(x)$ je nezáporná funkce splňující podmínku:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$$

- **Celá plocha pod grafem funkce** $f(x)$ – nad osou x je rovna 1

Distribuční funkce



- **Distribuční funkce** $F(x)$ je definovaná na \mathbb{R} vztahem:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

- $F(x)$ je neklesající funkce splňující:

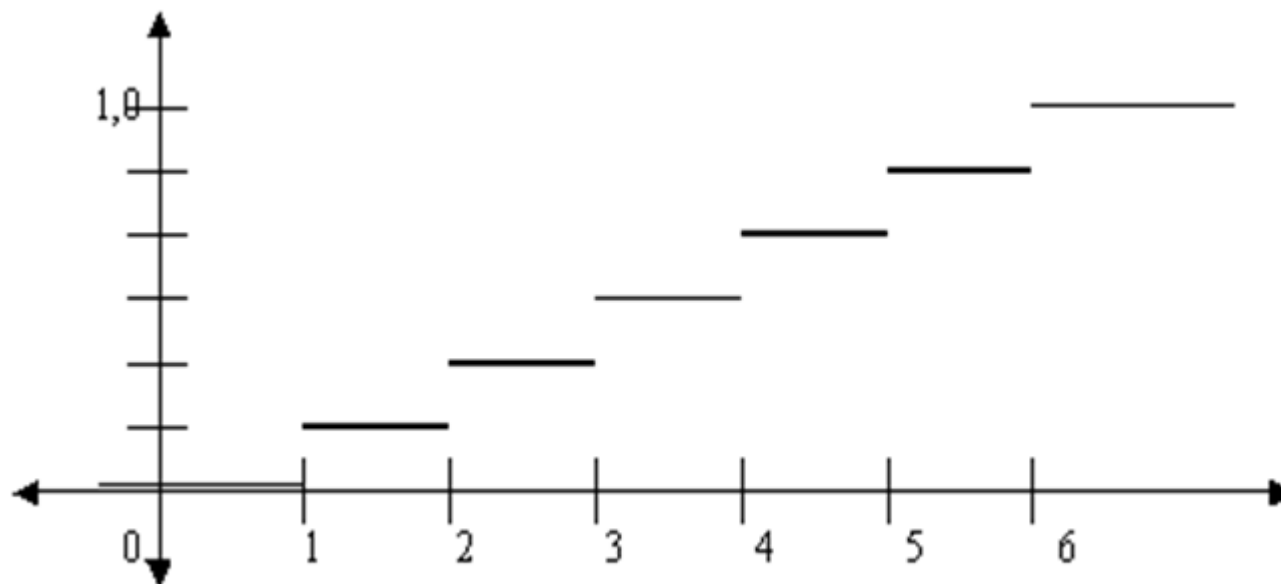
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \text{ pro } x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \text{ pro } x \rightarrow +\infty$$

Příklad distribuční funkce pro diskrétní NV: Hrací kostka



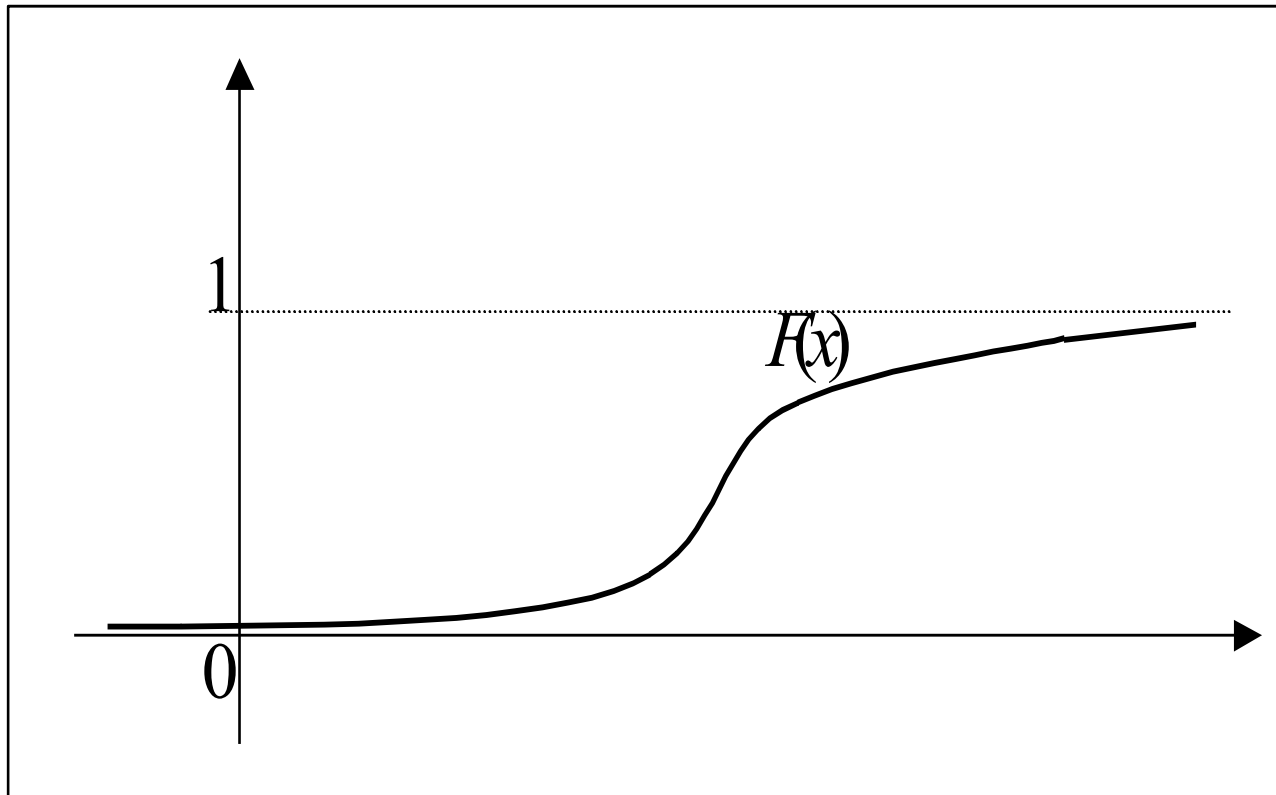
$$F(x) = P(X \leq x)$$



Distribuční funkce spojitě NV



1. Neklesající spojitá funkce
2. Limity 0 a 1 pro $x \rightarrow \pm\infty$



Vztah mezi hustotou a distribuční funkcí



- Mezi hustotou pravděpodobnosti a distribuční funkcí platí následující vztahy: HP je **derivací** DF:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

- Naopak: distribuční funkce náhodné veličiny je **neurčitým integrálem** (primitivní funkcí) k hustotě pravděpodobnosti, tj.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Závěr přednášky



Děkuji Vám za pozornost !!!